aplicada. Contudo, se vós realmente ides aplicar a análise aos casos reais, vereis que há uma grande distância desde a ideia geral do método de aproximação até a aplicação com êxito do mesmo método. Existe, por exemplo, a questão do tempo disponível e do poder humano. Para certos tipos de trabalho temos engenhosas invenções mecânicas ou eléctricas, tais como o analisador diferencial ou calculadores eléctricos. Contudo na maior parte dos casos temos de fazer o cálculo sem esse auxílio. Então não é suficiente saber que o processo de aproximação converge. Nós temos que encontrar qual o método que requere o menor tempo para um dado grau de aproximação. Nós temos que ter uma boa estimativa do melhoramento na precisão através das sucessivas étapas. Todas estas questões práticas requerem difíceis considerações matemáticas. Penso que necessitamos definitivamente de matemáticos que nos auxiliem a apurar e, se assim desejais dizê-lo, a criticar e sistematizar os nossos métodos intuitivos. De facto, aplicações frutuosas da matemática à engenharia requerem a cooperação de matemáticos e engenheiros. Não é de modo algum uma tarefa rotineira reconhecer as relações matemáticas basilares comuns em campos aparentemente muito diferentes. O matemático que intenta fazer pesquisas em matemática aplicada tem de ter um muito bom sentido dos processos físicos envolvidos. Por outro lado o engenheiro tem de entrar nos fundamentos da análise até uma profundidade considerável de modo a poder utilizar com propriedade os instrumentos matemáticos. Uma reunião arbitrária de máquinas não constitui um eficiente estabelecimento de máquinas. Sabemos que há no vosso arsenal matemático poderosos instrumentos. A tarefa que se nos depara é saber como adaptá-los e aplicá-los.

O matemático: Penso que vós haveis apreendido aí alguma coisa. Para levar mais longe a vossa analogia, a fim de transformar a solução dos problemas de engenharia em produção, vós necessitais uma certa espécie de inventores de instrumentos. Estes são os verdadeiros matemáticos aplicados. Os seus domínios originais podem diferir; eles podem partir da matemática pura, da física, ou da engenharia, mas o seu alvo comum é «forjar» matemática para a engenharia.

Tradução de A. Pereira Gomes

Duas desigualdades

por Ruy Luís Gomes

No livro VI, Integração, da colecção Bourbaki, a páginas 220-221, vem enunciado [1] — exercício 10) *a*) — o seguinte resultado:

Num espaço de Banach [2] F, *sejam* a *e* b *dois vectores tais que* $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = 1$. *Mostrar que para todo número* t *tal que* $0 \leqslant t \leqslant 1$, *e para todo* p *tal que* $1 \leqslant p \leqslant \infty$

$$(1) \qquad |a - tb|^p \leqslant 2^p\, |a - t^p b|$$

$$(2) \qquad |a - t^p b| \leqslant 2p\, |a - tb| .$$

E como indicação para a sua resolução acrescenta-se — *exprimir* $\mathrm{a} - \mathrm{t^p\, b}$ *como combinação linear de* $\mathrm{a} - \mathrm{tb}$ *e* $\mathrm{a} - \mathrm{b}$ *e observar que para* $0 \leqslant \rho \leqslant 1$, *vem* $|\mathrm{a} - \rho \mathrm{b}| \geqslant 1 - \rho$ *e* $|\mathrm{a} - \mathrm{b}| \leqslant 2\, |\mathrm{a} - \rho \mathrm{b}|$.

Ora, tratando-se de duas desigualdades fundamentais para o estudo das relações entre diferentes espaços L^p, pareceu-nos útil enviar para a *Gazeta de Matemática* uma demonstração de (1) e (2).

Desigualdade (1).

Se $|a - t^p b| \geqslant 1$ o resultado é imediato, pois as hipóteses feitas permitem-nos escrever

$$|a - tb| \leqslant |a| + |tb| = 1 + t \leqslant 2$$

e portanto

$$|a - tb|^p \leqslant 2^p \leqslant 2^p\, |a - t^p b| .$$

Se $|a - t^p b| < 1$, temos

$$|a - tb| = |a - t^p b + t^p b - tb| \leqslant |a - t^p b| + $$
$$+ t - t^p \leqslant |a - t^p b| + 1 - t^p \leqslant 2\, |a - t^p b| ,$$

visto ser [3]

$$1 - t^p = \Big|\, |a| - |t^p b| \,\Big| \leqslant |a - t^p b| .$$

Por outro lado, como $|a - t^p b| < 1$, vem

$$|a - t^p b|^p < |a - t^p b|$$

(1) Com a marca que distingue os exercícios mais difíceis.

(2) Espaço vectorial sobre o corpo dos números reais ou complexos em que cada vector a tem uma *norma* $|a|$, finita, não-negativa, tal que: 1) $|a| = 0$ equivale a $a = 0$; 2) $|\lambda a| = |\lambda|\,|a|$, qualquer que seja o número λ, real ou complexo; 3) $|a + b| \leq |a| + |b|$. Não interessa neste exercício o facto de F ser ainda um espaço *completo*.

(3) A desigualdade triangular aplicada a $a = b + (a - b)$ e $b = a + (b - a)$ dá-nos $|a| \leq |b| + |a - b|$, $|b| \leq |a| + |a - b|$, donde $\big|\, |a| - |b| \,\big| \leq |a - b|$.

e portanto

$$|a-tb|^p \leqslant 2^p\,|a-t^p b|.$$

Desigualdade (2).

Comecemos por supor que $1 \leqslant p \leqslant 2$.

Escrevendo, segundo a indicação expressa no próprio Bourbaki,

$$a-t^p b=\lambda(a-tb)+\mu(a-b),$$

vem [1], para $t \neq 1$,

$$\lambda=\frac{1-t^p}{1-t}, \qquad \mu=-t\,\frac{1-t^p}{1-t}$$

e como

$$|a-b|=|a-tb+tb-b| \leqslant 2\,|a-tb|,$$

chega-se ao resultado

$$|a-t^p b| \leqslant \frac{1+2t-3t^p}{1-t}\,|a-tb|.$$

Mas, [2]

$$\frac{1+2t-3t^p}{1-t} \leqslant 2p,$$

logo

$$|a-t^p b| \leqslant 2p\,|a-tb|.$$

Passemos agora à hipótese $2 \leqslant p$ e façamos $p=n+q$, com $1 \leqslant q \leqslant 2$ e n inteiro.

Aplicando sucessivamente o processo de decomposição

$$\begin{aligned}|a-t^p b| &= |a-tb+tb-t^p b|\\ &\leqslant |a-tb|+1-t^{p-1}\\ &\leqslant |a-tb|+|a-t^{p-1}b|\end{aligned}$$

vem finalmente

$$|a-t^p b| \leqslant n\,|a-tb|+|a-t^q b|$$

e portanto

$$\begin{aligned}|a-t^p b| &\leqslant n\,|a-tb|+2q\,|a-tb|=\\ &=p\,|a-tb|+q\,|a-tb| \leqslant 2p\,|a-tb|,\end{aligned}$$

pois [3] $q \leqslant p$.

De (1) e (2) é fácil deduzir

$$|y-z|^p \leqslant 2^p\,\Big|\,|y|^{p-1}\cdot y-|z|^{p-1}\cdot z\,\Big| \tag{3}$$

e

$$\Big|\,|y|^{p-1}\cdot y-|z|^{p-1}\cdot z\,\Big| \leqslant p\,|y-z|\,(|y|+|z|)^{p-1}, \tag{4}$$

nas quais y e z repesentam dois vectores quaisquer de F. [1]

Na verdade, supondo, por exemplo, que $|z| \leqslant |y|$, podemos aplicar (1) com

$$a=\frac{y}{|y|}, \quad b=\frac{z}{|z|} \quad \text{e} \quad t=\frac{|z|}{|y|},$$

obtendo-se

$$\left|\frac{y}{|y|}-\frac{|z|}{|y|}\,\frac{z}{|z|}\right|^p \leqslant 2^p\left|\frac{y}{|y|}-\frac{|z|^p}{|y|^p}\,\frac{z}{|z|}\right|$$

donde

$$|y-z|^p \leqslant 2^p\,\Big|\,y\,|y|^{p-1}-z\,|z|^{p-1}\Big|.$$

Mas como esta desigualdade é simétrica em y, z, continua válida para $|y| \leqslant |z|$ e portanto é geral.

Passemos agora à dedução de (4). Partindo da hipótese $|z| \leqslant |y|$, vem

$$\left|\frac{y}{|y|}-\frac{|z|^p}{|y|^p}\,\frac{z}{|z|}\right| \leqslant 2p\left|\frac{y}{|y|}-\frac{|z|}{|y|}\,\frac{z}{|z|}\right|$$

donde

$$\Big|\,|y|^{p-1}y-|z|^{p-1}z\,\Big| \leqslant 2p\,|y|^{p-1}\,|y-z|.$$

Trocando y com z, o que corresponde à hipótese $|y| \leqslant |z|$, vem

$$\Big|\,|y|^{p-1}\cdot y-|z|^{p-1}z\,\Big| \leqslant 2p\,|z|^{p-1}\,|y-z|.$$

Portanto

$$\Big|\,|y|^{p-1}\cdot y-|z|^{p-1}z\,\Big| \leqslant 2p\,|y-z|\,(|y|^{p-1}+|z|^{p-1})$$

e, a fortiori,

$$\Big|\,|y|^{p-1}y-|z|^{p-1}z\,\Big| \leqslant 2p\,|y-z|\,(|y|+|z|)^{p-1}.$$

Nota I. As desigualdades (3) e (4), mas apenas para números reais, foram deduzidas, pela primeira vez, por S. Mazur (Lwow) no artigo *Une remarque sur l'homéomorphie des champs fonctionnelles* [Studia Mathematica, Tome 1 (1929), p. 83-85].

Estão escritas desta outra maneira:

$$\left|\operatorname{sinal} y\,|y|^{\frac{1}{p}}-\operatorname{sinal} z\,|z|^{\frac{1}{p}}\right|^p \leqslant 2^p\,|y-z|$$

e

$$\operatorname{sinal} y\,|y|^p-\operatorname{sinal} z\,|z|^p\,| \leqslant p\,|y-z|(|y|+|z|)^{p-1},$$

e a sua dedução directa de (1) e (2) é muito simples pois a e b só podem ter os valores ± 1.

Note-se, porém, que na segunda desigualdade de Mazur figura o coeficiente p e não $2p$.

---

[1] Para $t=1$ a desigualdade é evidente.

[2] Basta verificar que $\Phi(t)=1+2t-3t^p-2p(1-t)$ tem derivada ≥ 0 e anula-se para $t=1$.

[3] Para $p=\infty$, ainda as desigualdades são válidas, mesmo na hipótese $|a-t^p b|=0$ quanto a (1) e $|a-tb|=0$, quanto a (2), pois ambas exigem $t=1$ e portanto implicam $|a-tb|=|a-t^p b|=|a-b|=0$.

[1] Enunciadas ainda no mesmo exercício, mas a segunda com o coeficiente $2p$ em vez de p.