Disciplinas	1.º semestre		2.º semestre	
	Aulas teóricas	Aulas práticas	Aulas teóricas	Aulas práticas
4.º ano				
Mecânica Celeste. . . .	2	2	2	2
Geometria Superior . .	–	–	2	2
Física Matemática . . .	2	2	2	2
Geodesia	2	2	–	–
Desenho Topográfico. .	–	4	–	–
	16 horas		12 horas	

. . . .

Art. 5.º – As aulas teóricas têm a duração de uma hora; as aulas práticas são de duas horas, salvo as de Astronomia, Aperfeiçoamento de Astronomia, Topografia, Meteorologia, Geofísica e Análise Química (2.ª parte), que poderão ser de duas ou três horas.

Art. 24.º – O grau de doutor será conferido ao licenciado que, tendo sido admitido, obtenha aprovação nas seguintes provas:

a) Dois interrogatórios, feitos por dois membros do júri, durante um período mínimo de meia hora e máximo de uma hora cada um, sobre dois pontos tirados à sorte pelo candidato, com quarenta e oito horas de antecedência, de entre doze expostos pela Faculdade noventa dias antes da prova;

b) Defesa de uma dissertação, a qual será discutida durante uma hora, pelo menos, por dois professores designados pela secção respectiva.

§ Único. A votação far-se-á no final das provas por escrutínio secreto; a deliberação será tomada por maioria dos professores presentes e o resultado expresso em valores, nos termos do Decreto n.º 34.467, de 28 de Março de 1945.

MODELOS MATEMÁTICOS

A União Matemática Italiana, por deliberação da sua Assembleia Geral, reunida em Taormina, em Outubro de 1951, tomou a iniciativa de promover a construção de modelos para o ensino da Geometria e da Análise. O Prof. L. CAMPEDELLI, da Universidade de Florença, encarregado desta realização, apresentou, na reunião de Bolonha, em Abril de 1952, um relatório sobre as diligências e resultados obtidos. Comunicou estar em estado de fornecer duas séries de modelos em gesso: a série elementar compreendendo as habituais quádricas e outra complementar e superior constituída por modelos de superfícies de 3.ª e 4.ª ordens, superfícies pseudosféricas, etc. Está-se estudando a construção de modelos em metal e em fio.

A «Società Metallurgica Italliana», de Florença, a «Società Rhodiatoce», de Milão e o «Istituto Tecnico Industriale Comunale L. da Vinci», de Florença, prestam auxílio gratuito.

As escolas interessadas podem dirigir-se ao Prof. CAMPEDELLI, Istituto di Matematica dell'Università di Firenze, via degli Alfani, 81.

M. Z.

(Notícia extraída do *Bolletino della Unione Matematica Italiana*, Série III, Ano VII, n.º 2, 1952).

MATEMÁTICAS ELEMENTARES

UMA DEMONSTRAÇÃO POR INDUÇÃO FINITA

por Hamilcar da Silva Lobo

Demonstrar, recorrendo ao teorema da indução finita, que *a soma dos produtos dos coeficientes do desenvolvimento do «binómio» pelos quadrados das ordens respectivas, é igual a* $n(n+1)\,2^{n-2}$, *sendo* n *o expoente do binómio:*

$$1^2\binom{n}{1}+2^2\binom{n}{2}+\cdots+n^2\binom{n}{n}=n(n+1)\,2^{n-2}.$$

A igualdade a demonstrar é uma proposição

$$P(n)\equiv\sum_n p^2\binom{n}{p}=n(n+1)\,2^{n-2}$$

associada a um inteiro n e estendendo-se o somatório desde $p=0$ até $p=n$, como é manifesto.

Verificaremos que $P(2)$ é verdadeira e provaremos que a validade de $P(n)$, para qualquer inteiro n, implica a validade da proposição para o sucessor de n, de acordo com o teorema da indução finita.

A demonstração exige o recurso à fórmula de STIFEL

$$\binom{n+1}{p}=\binom{n}{p}+\binom{n}{p-1}$$

fácil de estabelecer (basta efectuar a soma do 2.º membro!) e o cálculo de $\sum_n p\binom{n}{p}$. Vamos portanto provar em primeiro lugar, que:

1') $$\sum_n p\binom{n}{p}=n\cdot 2^{n-1}.$$

Note-se desde já, como é evidente, que

$$\sum_{p=0}^{n} p\binom{n}{p} = \sum_{p=1}^{n} p\binom{n}{p}\,.$$

Como

$$\sum_{n} p\binom{n}{p} = 1\cdot\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + \cdots + n\binom{n}{n}$$

pode escrever-se (decompondo as parcelas e associando-as convenientemente)

$$\begin{aligned}
&\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{n} + \\
&\quad + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{n} + \\
&\qquad + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{n} + \\
&\qquad + \cdots\cdots\cdots\cdots + \\
&\qquad\qquad + \binom{n}{n} =
\end{aligned}$$

Somas Parciais

$$\begin{aligned}
&= 2^n - \binom{n}{0} \\
&= 2^n - \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1}\right] \\
&= 2^n - \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2}\right] \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&= 2^n - \left[\binom{n}{0} + \cdots + \binom{n}{n-1}\right]
\end{aligned}$$

o que é evidente, somando por linhas. Somando agora por coluna e notando que estas são em número de n advirá imediatamente:

$$\sum_{p=0}^{n} p\binom{n}{p} = n\cdot 2^n - \left[n\binom{n}{0} + (n-1)\binom{n}{1} + (n-2)\binom{n}{2} + \cdots + 2\binom{n}{n-2} + 1\cdot\binom{n}{n-1}\right]$$

ou, pela conhecida propriedade $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$,

$$\sum_{n} p\binom{n}{p} = n\cdot 2^n - \left[1\cdot\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + \cdots + (n-1)\binom{n}{n-1} + n\binom{n}{n}\right.$$

e portanto

$$\sum_{n} p\binom{n}{p} = n - 2^n \cdot \sum_{n} p\binom{n}{p}\Bigg]$$

donde se conclui:

$$\sum_{n} p\binom{n}{p} = n\cdot 2^{n-1} \qquad \text{q. e. d. (1)}$$

(1) A mesma fórmula pode, ràpidamente, ser deduzida derivando ambos os membros do desenvolvimento binomial $(1+x)^n$ e, na expressão obtida, fazer $x=1$. N. R.

Podemos agora passar à demonstração de 1), pelo método da indução finita:

I — P (2) verifica-se.

Com efeito, para $n=2$ tem-se

$$1^2\binom{2}{1} + 2^2\binom{2}{2} = 1\cdot 2 + 4\cdot 1 = 6$$

e

$$2\,(2+1)\cdot 2^{2-2} = 2\cdot 3 = 6$$

isto é:

$$\mathrm{P}\,(2) \equiv \sum_{2} p^2\binom{2}{p} = 2\,(2+1)\,2^{2-2}$$

é verdadeira.

II — Demonstraremos agora que a legitimidade de $P\,(n)$ implica a de $P\,(n^+)$.

Admitindo então, por hipótese, que $P\,(n)$ é verdadeira, há que provar também o ser, necessàriamente,

$$2)\quad P\,(n^+) \equiv \sum_{n+1} p^2\binom{n+1}{p} = (n+1)\,(n+2)\,2^{n-1}\,.$$

Ora pela fórmula de Stifel, tem-se

$$2')\quad \sum_{n+1} p^2\binom{n+1}{p} = \sum_{p=1}^{n+1} p^2\left[\binom{n}{p} + \binom{n}{p-1}\right]$$

ou

$$2'')\quad \sum_{n+1} p^2\binom{n+1}{p} = \sum_{p=1}^{n} p^2\binom{n}{p} + \sum_{p=1}^{n+1} p^2\binom{n}{p-1}.$$

Observe-se que

$$\sum_{p=1}^{n+1} p^2\binom{n}{p} = \sum_{p=1}^{n} p^2\binom{n}{p}$$

visto que $\binom{n}{n+1} = 0$ pela própria significação do símbolo.

Para calcularmos o 2.º somatório do 2.º membro de 2'') e visto as combinações de n serem tomadas $(p-1)$ a $(p-1)$, transformemos p^2 pela igualdade evidente

$$p^2 = (p-1)^2 + 2\,(p-1) + 1\,.$$

A expressão 2'') toma, por consequência, a forma

$$3)\quad \sum^{n+1} p^2\binom{n+1}{p} = \sum^{n} p^2\binom{n}{p} + \sum_{p=1}^{n+1} (p-1)^2\binom{n}{p-1} + 2\sum_{p=1}^{n+1} (p-1)\binom{n}{p-1} + \sum_{p=1}^{n+1}\binom{n}{p-1}$$

Mas, como é evidente, podemos nos 3 últimos somatórios do 2.º membro de 3) substituir $p-1$ por

p passando a defini-los desde $p=0$ até $p=n$. Advirá, portanto

$$4) \qquad \sum^{n+1} p^2 \binom{n+1}{p} = 2 \sum_{p=0}^{n} p^2 \binom{n}{p} + 2 \sum_{p=0}^{n} p \binom{n}{p} + \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}.$$

Então, por hipótese, pela expressão que calculamos anteriormente do $\sum p \binom{n}{p}$ e pelo conhecido valor do $\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}$, resulta

$$5) \qquad \sum^{n+1} p^2 \binom{n+1}{p} = 2^n (n+1) 2^{n-2} + 2 \cdot n \cdot 2^{n-1} + 2^n$$
$$= n(n+1) 2^{n-1} + 2n \cdot 2^{n-1} + 2 \cdot 2^{n-1}$$
$$= n(n+1) 2^{n-1} + 2(n+1) 2^{n-1}$$

e finalmente

$$6) \qquad \sum^{n+1} p^2 \binom{n+1}{p} = (n+1)(n+2) 2^{n-1} \quad \text{q. e. d.}$$

A proposição está pois demonstrada com toda a generalidade visto que se verificou directamente ser válida para $n=2$ e se provou que a validade para qualquer inteiro n implica a validade para o seu sucessor n^+.

PONTOS DE EXAMES DE APTIDÃO ÀS ESCOLAS SUPERIORES

Exames de aptidão para frequência das licenciaturas em Ciências Matemáticas, Ciências Fisico-Químicas e Ciências Geofísicas, preparatórios para as escolas militares e curso de engenheiros geógrafos — Ano de 1952 — Ponto n.º 1.

3559 — Provar que, se a soma de dois números inteiros positivos é um número primo, os dois números são primos entre si. R: *Seja* $a+b=p$, *onde* $a<p$, $b<p$ *e* p *um número primo. Qualquer divisor comum de* a *e* b *será um divisor de* p, *ou seja* 1 *ou* p, *e como* $a<p$ *e* $b<p$ *será* 1 *o único divisor comum e por isso* a *e* b *primos entre si.*

5560 — Calcular dois números inteiros positivos, sabendo que um deles é $\frac{4}{3}$ do outro e que o produto do seu máximo divisor comum pelo seu menor múltiplo comum é 2352. R: *Sabe-se que o produto do m. d. c. pelo m. m. c. é igual ao produto dos dois números. Então se um deles for* x *será* $4/3 \cdot x^2 = 2352$ *donde* $x = \pm 42$. *Os números serão então* 42 *e* 56 *visto só servir a solução positiva.*

3561 — Se o número 6 divide o produto $35a$, qual é o resto da divisão de a por 6? Enunciar e demonstrar o teorema que justifica a resposta. R: *O resto é zero, porque se um número divide o produto de dois factores e é primo com um deles divide necessàriamente o outro.*

3562 — Decompor 100 em duas parcelas inteiras positivas, divisíveis por 7 e por 11 respectivamente. R: *Será* $7x + 11y = 100$ *equação que admite a solução em números inteiros e positivos* $x=8$, $y=4$. *É fácil ver que esta solução em números inteiros e positivos e única, donde resulta que os números são* 56 *e* 44.

3563 — Determinar os valores de m para os quais $x^2 - (m+2)x + m + 3$ é positivo qualquer que seja o valor real atribuído a x. R: *São os valores de* m *que tornam o discriminante negativo, ou seja* $(m+2)^2 - 4(m+3) < 0$ *ou ainda* $m^2 - 8 < 0$ *e por isso* $-2\sqrt{2} < m < +2\sqrt{2}$.

3564 — Determinar a equação biquadrada cujas raízes são ± 2, ± 3. Enunciar e demonstrar o teorema que justifica a resposta.
R: $(x^2 - 2^2)(x^2 - 3^2) = 0$ *ou* $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$.

Exames de aptidão para frequência do Instituto Superior Técnico e Faculdade de Engenharia do Porto — Ano de 1952 — Ponto n.º 2 — Outubro.

3565 — Resolva a equação

$$1 - \frac{x - \sqrt{2}}{x + \sqrt{2}} = \frac{3}{2}(x+1).$$

R: *A equação proposta pode ser equivalente à seguinte* $4\sqrt{2} = 3(x+1)(x+\sqrt{2})$ *que se obtem desembaraçando de denominadores a primeira. Esta equação tem por raizes* $x = (-3 - 3\sqrt{2} \pm \sqrt{27 - 30\sqrt{2}}) : 6$, *expressões que não se podem simplificar. Como aqueles valores de* x *não anulam o denominador* $(x+\sqrt{2})$, *eles são raízes da equação proposta.*

3566 — Resolva a inequação

$$\frac{1}{2}\left(x^2 - 2x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right) < 0.$$

R: *A inequação pode escrever-se sob a forma* $1/2\,[x - (2+\sqrt{6}) : 2]\,[x - (2-\sqrt{6}) : 2]\,(x - 1/3) < 0$. *A inequação é verificada para os valores que tornem ou os três factores negativos ou um só. Estes factos verificam-se para os valores de* x *tais que* $1/3 < x < (2+\sqrt{6}) : 2$ *e* $x < (2-\sqrt{6}) : 2$.

3567 — Faça o desenvolvimento de $\left(x^{-2}-\frac{1}{2}x^2\right)^4$ e simplifique os seus termos. R: *O desenvolvimento simplificado é* $x^{-8}-2x^{-4}+3/2-1/2x^4+1/16x^8$.

3568 — Determine o valor de m para o qual ${}^mC_{m-3}=969$. R: *Como* ${}^mC_{m-3}={}^mC_3$ *será* $m(m-1)(m-2):(1\cdot2\cdot3)=969$ *ou* $m(m-1)(m-2)=2\cdot3\cdot3\cdot17\cdot19=17\cdot18\cdot19$ *donde é* $m=17$.

3569 — Calcule o número de rectas que são determinadas por 15 pontos entre as quais há dois grupos distintos de 3 e 5 pontos colineares. R: *O número de rectas é* ${}^{15}C_2-{}^5C_2-{}^3C_2+2=94$ *que também se podia calcular do seguinte modo* ${}^7C_2+7\times(5+3)+5\times3+2=94$.

3570 — Forme uma equação biquadrada cujas raízes sejam ±1 e $\pm i\sqrt{2}$. R: $(x^2-1)(x^2+2)=0$ *ou* $x^4+x^2-2=0$.

Soluções dos n.os 3559 a 3570 de J. da Silva Paulo

Exames de aptidão para frequência do Instituto de Ciências Económicas e Financeiras — Ano de 1952 — Ponto n.º 2 — Outubro.

3571 — Demonstre que se a^2-b^2 é um número primo, então os números a e b são inteiros consecutivos. R: *Seja* $a>b$ *e* $N=a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ *um número primo. Se* $a-b\neq1$, N *admitiria divisores, contràriamente à hipótese. Logo* $a=b+1$ c. q. d.

3572 — Sabe-se que o número $\overline{1x1yz}$ (base 10) é divisível por 180. Calcule os valores dos algarismos x, y e z. (Indique todas as soluções do problema). R: *O número dado é divisível por* 10, *o que obriga a ser* $z=0$, *e também por* $18=2\times9$ *o que implica dever ser* $y=0,2,4,6,8$ *e* $2+x+y=\dot{9}$. *As soluções são:* $x=7$, $y=0$, $z=0$; $x=5$, $y=2$, $z=0$; $x=3$, $y=4$, $z=0$; $x=1$, $y=6$, $z=0$ *e* $x=8$, $y=8$, $z=0$.

3573 — No desenvolvimento de $\left(\sqrt{ab}+\frac{1}{\sqrt[3]{b}}\right)^n$ o coeficiente do 3.º termo é igual a 91. Calcule n e escreva o *antepenúltimo* termo do desenvolvimento. Simplifique esse termo. R: *Deverá ser* $C_2^n=91$ *o que conduz à única solução de interesse* $n=14$. *O termo pedido é* $T_{13}=C_{12}^{14}\,a\,b\cdot b^{-3}=91\,ab^{-3}$.

3574 — Dada a equação $x^4+px^2+q=0$, deduza a relação que deve existir entre os seus coeficientes para que as quatro raízes reais da equação estejam em progressão aritmética. *(Como se sabe, numa progressão aritmética é constante a diferença entre um termo e o anterior).* R: *Se as 4 raízes da equação,* x_1, $x_2=-x_1$, x_3 *e* $x_4=-x_3$ *estão em progressão aritmética, será* $x_3=x_1/3$. *Além disso, por ser* $x_1^2+x_3^2=-p$ *e* $x_1^2\cdot x_3^2=q$, *a eliminação de* x_1 *e* x_3 *entre estas 3 relações conduz à relação pedida* $9p^2-100q=0$.

3575 — Verifique que, para arcos do 1.º quadrante, é verdadeira a seguinte igualdade

$$\text{arc. tg}\frac{1}{7}+\text{arc. tg}\frac{3}{4}=\frac{\pi}{4}.$$

R: *Tomando a tangente de ambos os membros da igualdade proposta e atendendo a que* $\text{tg arctg}\,x=x$, *tem-se* $(1/7+3/4)/(1-1/7\cdot3/4)=1$ *o que é uma identidade.*

3576 — Calcule os ângulos positivos e inferiores a 180° que verificam a desigualdade

$$2\,\text{sen}^2 x-(1+2\sqrt{3})\,\text{sen}\,x+\sqrt{3}<0.$$

R: *A inequação proposta é equivalente a* $2z^2-(1+2\sqrt{3})z+\sqrt{3}<0$ *(com* $z=\text{sen}\,x$*) donde* $1/2<\text{sen}\,x<\sqrt{3}$ *ou* $1/2<\text{sen}\,x\leqslant1$ *e portanto, os valores de* x *pedidos são* $30°<x<150°$.

Soluções dos n.os 3571 a 3576 de Orlando Morbey Rodrigues

MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAMES DE FREQUÊNCIA E FINAIS

MATEMÁTICAS GERAIS

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — **1.º exame de frequência — Março de 1952.**

3577 — Considere a curva $y=\frac{x}{x^2-5x+4}$ e determine os pontos A e B onde a tangente é paralela a $\overline{OX}$. Ache o lugar dos pontos M tais que $\overline{AM}=K\,\overline{BM}$. Caracterize o lugar segundo os possíveis valores de K. R: *A derivada* $y'=\frac{(x-2)(x+2)}{(x-1)^2(x-4)^2}$ *anula-se com mudança de sinal para* $x=-2$ *e* $x=2$, *onde a função tem respectivamente os valores* $-\frac{1}{9}$ *e* -1. *Portanto* $A(-2,-1/9)$ *e* $B(2,-1)$ *são pontos de tangente paralela a* $\overline{OX}$.