3567 — Faça o desenvolvimento de $\left(x^{-2}-\frac{1}{2}x^2\right)^4$ e simplifique os seus termos. R: *O desenvolvimento simplificado é* $x^{-8}-2x^{-4}+3/2-1/2x^4+1/16x^8$.

3568 — Determine o valor de m para o qual ${}^mC_{m-3}=969$. R: *Como* ${}^mC_{m-3}={}^mC_3$ *será* $m(m-1)(m-2):(1\cdot2\cdot3)=969$ *ou* $m(m-1)(m-2)=2\cdot3\cdot3\cdot17\cdot19=17\cdot18\cdot19$ *donde é* $m=17$.

3569 — Calcule o número de rectas que são determinadas por 15 pontos entre as quais há dois grupos distintos de 3 e 5 pontos colineares. R: *O número de rectas é* ${}^{15}C_2-{}^5C_2-{}^3C_2+2=94$ *que também se podia calcular do seguinte modo* ${}^7C_2+7\times(5+3)+5\times3+2=94$.

3570 — Forme uma equação biquadrada cujas raízes sejam ±1 e $\pm i\sqrt{2}$. R: $(x^2-1)(x^2+2)=0$ *ou* $x^4+x^2-2=0$.

Soluções dos n.os 3559 a 3570 de J. da Silva Paulo

Exames de aptidão para frequência do Instituto de Ciências Económicas e Financeiras — Ano de 1952 — Ponto n.º 2 — Outubro.

3571 — Demonstre que se a^2-b^2 é um número primo, então os números a e b são inteiros consecutivos. R: *Seja* $a>b$ *e* $N=a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ *um número primo. Se* $a-b\neq1$, N *admitiria divisores, contràriamente à hipótese. Logo* $a=b+1$ c. q. d.

3572 — Sabe-se que o número $\overline{1x1yz}$ (base 10) é divisível por 180. Calcule os valores dos algarismos x, y e z. (Indique todas as soluções do problema). R: *O número dado é divisível por* 10, *o que obriga a ser* $z=0$, *e também por* $18=2\times9$ *o que implica dever ser* $y=0,2,4,6,8$ *e* $2+x+y=\dot{9}$. *As soluções são:* $x=7$, $y=0$, $z=0$; $x=5$, $y=2$, $z=0$; $x=3$, $y=4$, $z=0$; $x=1$, $y=6$, $z=0$ *e* $x=8$, $y=8$, $z=0$.

3573 — No desenvolvimento de $\left(\sqrt{ab}+\frac{1}{\sqrt[3]{b}}\right)^n$ o coeficiente do 3.º termo é igual a 91. Calcule n e escreva o *antepenúltimo* termo do desenvolvimento. Simplifique esse termo. R: *Deverá ser* $C_2^n=91$ *o que conduz à única solução de interesse* $n=14$. *O termo pedido é* $T_{13}=C_{12}^{14}\,a\,b\cdot b^{-3}=91\,ab^{-3}$.

3574 — Dada a equação $x^4+px^2+q=0$, deduza a relação que deve existir entre os seus coeficientes para que as quatro raízes reais da equação estejam em progressão aritmética. *(Como se sabe, numa progressão aritmética é constante a diferença entre um termo e o anterior).* R: *Se as 4 raízes da equação,* x_1, $x_2=-x_1$, x_3 *e* $x_4=-x_3$ *estão em progressão aritmética, será* $x_3=x_1/3$. *Além disso, por ser* $x_1^2+x_3^2=-p$ *e* $x_1^2\cdot x_3^2=q$, *a eliminação de* x_1 *e* x_3 *entre estas 3 relações conduz à relação pedida* $9p^2-100q=0$.

3575 — Verifique que, para arcos do 1.º quadrante, é verdadeira a seguinte igualdade

$$\text{arc. tg}\,\frac{1}{7}+\text{arc. tg}\,\frac{3}{4}=\frac{\pi}{4}.$$

R: *Tomando a tangente de ambos os membros da igualdade proposta e atendendo a que* $\text{tg arctg}\,x=x$, *tem-se* $(1/7+3/4)/(1-1/7\cdot3/4)=1$ *o que é uma identidade.*

3576 — Calcule os ângulos positivos e inferiores a 180° que verificam a desigualdade

$$2\,\text{sen}^2x-(1+2\sqrt{3})\,\text{sen}\,x+\sqrt{3}<0.$$

R: *A inequação proposta é equivalente a* $2z^2-(1+2\sqrt{3})z+\sqrt{3}<0$ *(com* $z=\text{sen}\,x$*) donde* $1/2<\text{sen}\,x<\sqrt{3}$ *ou* $1/2<\text{sen}\,x\leqslant1$ *e portanto, os valores de* x *pedidos são* $30°<x<150°$.

Soluções dos n.os 3571 a 3576 de Orlando Morbey Rodrigues

MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAMES DE FREQUÊNCIA E FINAIS

MATEMÁTICAS GERAIS

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — **1.º exame de frequência — Março de 1952.**

3577 — Considere a curva $y=\frac{x}{x^2-5x+4}$ e determine os pontos A e B onde a tangente é paralela a $\overline{OX}$. Ache o lugar dos pontos M tais que $\overline{AM}=K\,\overline{BM}$. Caracterize o lugar segundo os possíveis valores de K. R: *A derivada* $y'=\frac{(x-2)(x+2)}{(x-1)^2(x-4)^2}$ *anula-se com mudança de sinal para* $x=-2$ *e* $x=2$, *onde a função tem respectivamente os valores* $-\frac{1}{9}$ *e* -1. *Portanto* $A(-2,-1/9)$ *e* $B(2,-1)$ *são pontos de tangente paralela a* $\overline{OX}$.

$\sqrt{(x+2)^2+(y+1/9)^2} = K\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}$ *donde*

$(x+2)^2 - K^2(x-2)^2 + (y+1/9)^2 - K^2(y+1)^2 = 0$

que desenvolvida conduz a

$$x^2(1-K^2)+y^2(1-K^2)+2x[(1+K)^2+(1-K)^2]+ \\ +y[(1+K)(1/9-K)+(1-K)(1/9+K)]+ \\ +4+1/81-5K^2=0.$$

Com $K=\pm 1$ *o lugar geométrico é visìvelmente de 1.ª ordem (uma recta).*

Com $|K|\neq 1$ *vem*

$$x^2+y^2-2x\left(-2\frac{1+K^2}{1-K^2}\right)- \\ -2y\left(\frac{K^2-1/9}{1-K^2}\right)+\frac{4+1/81-5K^2}{1-K^2}=0$$

e o lugar geométrico é uma circunferência do centro no ponto $C\left(-2\frac{1+K^2}{1-K^2},\frac{K^2-1/9}{1-K^2}\right)$ *e de raio dado por* $r=4\sqrt{85}\,\frac{K}{1-K^2}$. *Será* $r>0$ *para os valores de* K *nos intervalos abertos* $(-\infty,-1)$ *e* $(0,1)$. *Para* $K=0$ *o lugar reduz-se a um ponto.*

3578 — Defina série absolutamente convergente e prove que a sua soma é independente da ordem dos termos.

Se a série é simplesmente convergente verifica ainda essa propriedade? Enuncie o teorema em que baseou a resposta.

3579 — Defina série absolutamente convergente e prove que a série $\Sigma a_n x^n$ é absoluta e uniformemente convergente em todo o intervalo onde a série dos módulos for uniformemente convergente.

Estude a série $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots$ e o comportamento nos extremos do intervalo de convergência absoluta. R:

$$\lim_{n=\infty}\frac{|x|^{n+1}}{n+1}:\frac{|x|^n}{n}=|x|\lim_{n=\infty}\frac{n}{n+1}=|x|;$$

portanto a série é absolutamente convergente para $|x|<1$. *O intervalo de convergência é* $(-1,1)$. *Converge no extremo direito (série harmónica alternada); diverge no extremo esquerdo.*

3580 — Defina função crescente num ponto e num intervalo e prove que se $f(x)$ é crescente em (a,b) a sua função inversa também o é. Deduza a expressão que liga as derivadas de $f(x)$ e da sua função inversa. R: *Dada* $y=f(x)$ *sejam* $y_1<y_2$ *tais que* $x_1=\varphi(y_1)$ *e* $x_2=\varphi(y_2)$ *onde com* $x=\varphi(y)$ *se representa a inversa. Não se pode ter* $x_1>x_2$ *porque então, por hipótese, se teria* $y_1>y_2$. *Portanto necessàriamente: dados* $y_1<y_2$ *se tem sempre* $\varphi(y_1)\leqslant\varphi(y_2)$.

3581 — Prove que $3\sqrt[3]{x}$ tem ponto de inflexão na origem.

Seja $0<a<b$ e estude a concavidade da curva no intervalo (a,b).

Escreva a equação da tangente no ponto a e demonstre que a curva fica toda para o mesmo lado desta tangente.

Demonstre que naquele intervalo a curva fica entre a corda e a tangente paralela à corda. R: *A equação da tangente no ponto* $(a,f(a))$ *é* $Y=f(a)+f'(a)(X-a)$ *ou seja:* $Y=3\sqrt[3]{a}+\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}(X-a)\ (a\neq 0)$.

A ordenada da tangente no ponto $X=a+h$ *é dada por* $Y=f(a)+hf'(a)$. *A concavidade é positiva ou negativa conforme for positiva ou negativa a diferença* $\Delta=f(a+h)-f(a)-hf'(a)$.

Pela fórmula de Taylor tem-se $\Delta=\frac{h^2}{2!}f''(a+\Theta h)$ *com* $\Theta>0$.

Vem pois $\Delta=\frac{h^2}{2!}\left(-\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{(\Theta h)^5}}\right)$, *que muda de sinal com* h; *fica assim provada a existência de inflexão na origem (de tangente vertical).*

Como a segunda derivada $y''=-\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}$ *é sempre negativa para* x *no intervalo* (a,b) *considerado, a expressão* $\Delta=\frac{h^2}{2!}f''(a+\Theta h)$ *mostra que nesse intervalo a concavidade é sempre voltada para baixo.*

As restantes perguntas desta questão são directas, isto é, foram tratadas no curso tal como aqui se apresentam, e como de costume não se dão sugestões para elas.

Soluções dos n.os 3577 a 3581 de J. Ribeiro de Albuquerque.

I. S. T. — MATEMÁTICAS GERAIS — **Exame final — 1 de Outubro de 1952.**

I

3582 — Sendo

$$f(x)=\frac{1}{\operatorname{sen}x-\operatorname{sen}a}-\frac{1}{(x-a)\cdot\cos a}$$

mostre que

$$\frac{d}{da}\left[\lim_{x=a}f(x)\right]=\sec^3 a-\frac{1}{2}\sec a.$$

R: *Para* $x=a$ *a função é indeterminada do tipo* $\infty-\infty$. *Transformando a indeterminação numa outra da forma* $0/0$ *e aplicando duas vezes a regra de* L'Hospital, *obtemos*

$$\lim_{x=a}f(a)=\frac{\operatorname{sen}a}{2\cos^2 a}=\frac{1}{2}\operatorname{tg}a\cdot\sec a.$$

Derivando o resultado obtido alcançamos com toda a facilidade

$$\frac{d}{da}\left(\frac{1}{2}\operatorname{tg}a\cdot\sec a\right)=\sec^3 a-\frac{1}{2}\sec a.$$

3583 — Dados os pontos $A(d,0,0)$, $B(0,d,0)$, $C(0,0,d)$, determine um outro ponto do espaço equidistante dos três dados e à distância d do seu plano.

Qual é o volume do tetraedro definido pelos quatro pontos? R: *A equação do plano definido pelos três pontos dados é, como se verifica imediatamente,* $x+y+z-d=0$. *A distância do ponto* P (x, y, z) *ao plano é dada por*

$$\left|\frac{x+y+z-d}{\sqrt{3}}\right| = d.$$

Como as coordenadas de P *são necessàriamente iguais (o que, de resto, tem verificação imediata), obtemos logo*

$$x = y = z = \left(\frac{1+\sqrt{3}}{3}\right)d.$$

O volume do tetraedro será dado, por exemplo, pelo determinante

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} d & 0 & 0 & 1 \\ 0 & d & 0 & 1 \\ 0 & 0 & d & 1 \\ x & y & z & 1 \end{vmatrix}.$$

O valor do determinante pode ser obtido fàcilmente utilizando a regra de Chiò *e vem*

$$V = \frac{\sqrt{3}}{6}\,d^3.$$

II

3584 — Verifique que as raízes de índice n não reais dum número real são complexos conjugados dois a dois.

No caso dum número complexo, poderão as suas raízes de índice n ser conjugadas duas a duas?

3585 — Métodos para a determinação dos pontos de estacionaridade duma função. Suas vantagens e inconvenientes.

Como aplicação, mostre que se for $f'(x_0)=0$ e $f''(x_0)\neq 0$, as funções $f(x)$ e $g(x)=[f(x)]^3$ são simultâneamente máximas e mínimas no ponto x_0.

3586 — Cálculo numérico das séries. Expressões que o limite superior do erro pode tomar. Casos em que é possível o cálculo exacto da soma.

3587 — Uma equação algébrica inteira diz-se *recíproca* se as suas raízes são recíprocas duas a duas. Nestas condições, estabeleça as condições a que terão de satisfazer os coeficientes, supostos reais, duma equação recíproca.

Mostre que uma equação binómia, escrita sob a forma normal, é uma equação recíproca.

3588 — Dada uma hipérbole referida às assíntotas, verifique que a equação da tangente num ponto (x_0, y_0) é

$$y_0\cdot x + x_0\cdot y = 2\,x_0\,y_0.$$

A partir desta equação, mostre que a tangente corta as assíntotas em dois pontos que definem um segmento cujo ponto médio é o ponto de tangência, e que a área do triângulo definido pela tangente e pelas assíntotas é constante.

I. S. T. — Matemáticas Gerais — Exame final — 8 de Outubro de 1952.

I

3589 — Mostre que

$$y = \left(a - \frac{1}{a} - x\right)\cdot(4-3x^2)$$

tem um máximo e um mínimo, e que a diferença entre eles é

$$\frac{4}{9}\left(a+\frac{1}{a}\right)^3.$$

Calcule o valor mínimo desta diferença, supondo a um parâmetro variável. R: *Igualando a zero a primeira derivada da função, verificamos com facilidade que as raízes da equação obtida são* $x_1=2a/3$ e $x_2=-2/3\,a$. *Supondo, para fixar ideias, que* a *é positivo, e atendendo a que a segunda derivada da função é igual a* $y''=18x-6\cdot(a-1/a)$ *concluimos que a função tem um mínimo no ponto* x_1 *e um máximo em* x_2. *A diferença entre o máximo e o mínimo é igual, realmente, ao valor indicado no enunciado como se pode verificar.*

Chamando g (a) *àquela diferença, será*

$$g'(a) = \frac{4}{3}\left(a+\frac{1}{a}\right)^2\cdot\left(1-\frac{1}{a^2}\right).$$

Igualando a zero $g'(a)$ *obtemos uma equação cujas únicas raízes reais são* 1 *e* -1. *Mas*

$$g''(a) = \frac{8}{3}\left(a+\frac{1}{a^3}+\frac{2}{a^5}\right).$$

Logo, o mínimo da diferença dá-se para $a=1$, *e tem o valor* $g(1)=\frac{32}{9}$.

3590 — Determine a distância focal da cónica:

$$x^2+4y^2+4x+15y+4=0.$$

R: *A maneira mais rápida de resolver o problema consiste em achar a equação reduzida da cónica (trata-se duma elipse) referida aos eixos.*

Os invariantes tem os valores: $I_1=5$; $I_2=4$; $I_3=-64$.

Tomando como é usual, o eixo maior para eixos dos xx, *chegamos fàcilmente à equação*

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}-1=0.$$

A semi-distância focal tem então o valor $c=\sqrt{16-4}=2\sqrt{3}$ *e a distância focal é, portanto,* $2c=4\sqrt{3}$.

II

3591 — Raízes primitivas da unidade: definição, propriedades e importância.

Sabendo que i é raiz primitiva de índice n da unidade, que valor terá n?

3592 — Diga o que é uma função homogénea e enuncie a sua propriedade fundamental.

Como aplicação, considere uma função homogénea $F(x,y)$ e, partindo da identidade de Euler, averigue em que condições $F'_x(x,y)$ é também função homogénea. Qual será, nesse caso, o grau de homogeneidade de $F'_x(x,y)$?

3593 — Faça o estudo da série de Dirichlet e, a partir dele, determine as condições de convergência absoluta da série

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^k}.$$

Que poderá concluir ainda quanto à natureza da série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} nx}{n^k}$ para os diferentes valores de x? Porquê?

3594 — Resolução de um sistema de Cramer: método das matrizes.

O determinante de um sistema de Cramer poderá ser ortogonal? E hemi-simétrico?

3595 — Considere numa cónica sem centro, definida pela sua equação canónica, um ponto P e a sua projecção E sobre o eixo. Se forem A e B, respectivamente, os pontos de intersecção da tangente e da norem P com o eixo dos xx, e chamarmos sub-tangente ao segmento AE e sub-normal ao segmento EB, mostre que a sub-tangente é dividida ao meio pelo vértice da cónica e que a sub-normal é constante.

Enunciados e soluções dos n.os 3582 a 3590 de J. H. Arandes

ANÁLISE INFINITÉSIMAL

I. S. C. E. F. — Análise Infinitesimal — 1.º exame de frequência — 25 de Fevereiro — 1950.

3596 — Estude a convergência do integral e calcule-o na hipótese de ser convergente

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x\sqrt{4x^2+x+1}}.$$

3597 — Calcule $F(a)=\int_0^{\infty}\log\left(1+\frac{a^2}{x^2}\right)dx.$

3598 — Dados os vectores: $\overrightarrow{OA}=I+2J$, $\overrightarrow{OB}=2I+K$, $\overrightarrow{OC}=J+2K$ e $\overrightarrow{OD}=3I+3J+3K$, determinar:

a) O volume do tetraedro $ABCD$;

b) A equação da aresta AB;

c) A distância de D a ABC;

d) A área ABC;

e) O plano que contém AD e é perpendicular a ABC.

I. S. C. E. F. — Análise Infinitesimal — 1.º exame de frequência extraordinário — 1950-51.

3599 — Seja dado o tetraedro $ABCD$, $A(0,1,2)$, $B(1,0,2)$, $C(1,2,0)$ e $D(5,5,5)$. Determinar: *a*) O volume do tetraedro cujos vértices são os baricentros das faces do tetraedro dado. *b*) O volume do tetraedro obtido, conduzindo pelos 4 vértices planos paralelos às faces opostas. *c*) A equação da altura tirada de A. *d*) o plano mediador de AB. *e*) O plano bissector do ângulo das faces ABC e ABD. *f*) A área do tetraedro $OABC$.

3600 — Mostre que dos 2 integrais $\int_0^1\frac{dx}{x^8\sqrt{1+x^2}}$ e $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^8\sqrt{1+x^2}}$ só um tem valor finito e calcular esse valor.

3601 — Calcular: $\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{4\cos x+5}$.

I. S. C. E. F. — Análise Infinitesimal — 1.º exame de frequência — 1.ª chamada — 1952.

3602 — Calcular os integrais:

$$\int_0^{\pi}x^2\operatorname{sen}^3 x\,dx\ ,\quad \int_0^{\pi}x\operatorname{sen}^4 x\,dx \quad \text{e}$$

$$\int_0^{\pi}x^m\operatorname{sen}^n x\,dx.$$

3603 — Estudar a função

$$f(z)=\int_0^{\pi}\frac{dx}{1+z\cos^2 x}.$$

a) Mostre que $f(z)$ é irracional e efectue o seu desenvolvimento a partir de $\dfrac{1}{1+z\cos^2 x}$. *b*) Comprove o resultado. *c*) Deduzir por processos convenientes os valores dos seguintes integrais:

$$a)\ \int_0^{\pi}\frac{dx}{(1+\cos^2 x)^2}\,,\quad b)\ \int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sec^4 x}\quad \text{e}$$

$$c)\ \int_0^{\pi}\frac{\cos^{2n} x\,dx}{(1+\cos^2 x)^{n+1}}.$$

3604 – Sendo $A(1,1,1)$, $B(1,3,1)$, $C(3,1,1)$, $D(3,3,1)$, $E(2,2,0)$ e $F(2,2,2)$ determine vectorialmente: *a*) O volume do poliedro regular de vértices A, B, C, D, E e F. *b*) O momento resultante do sistema $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, $\vec{OC}$ e $\vec{OD}$ em relação ao baricentro dos vértices do poliedro, nos quais se aplicam massas iguais. *c*) Demonstre que

$$\Sigma\, m_i\, \overline{OM_i}^2 = (\Sigma\, m_i)\, \overline{OG}^2 + \Sigma\, m_i\, \overline{GM_i}^2$$

sendo M_i os pontos em que se aplicam massas m_i, G o centro de gravidade e O um ponto qualquer, fazendo a correspondente aplicação ao poliedro $ABCDEF$.

PROBLEMAS

Problemas propostos ao concurso

Secção Elementar

3605 — Um número que, no sistema de base 10, se escreve com três algarismos, escreve-se, num outro sistema de base menor que dez, com os mesmos algarismos dispostos em ordem inversa. Determinar o número.

3606 — Considere uma esfera de raio R. Quantas esferas de raio R são tangentes à primeira e simultâneamente tangentes a mais cinco destas últimas?

Secção Média:

3607 – Considere a equação

$$\cos 2x + \xi \operatorname{sen} x = \eta$$

em que ξ e η são as coordenadas dum ponto P do plano $\xi o \eta$. Determinar o número de soluções da equação proposta segundo a posição de P no respectivo plano.

3608 – Determinar os polinómios $f(x)$ do 3.º grau tais que

$$f(x^2) \equiv k\, f(x)\cdot f(-x)$$

Secção Superior:

3609 – Provar que, se o polinómio trigonométrico

$$p(t) = a_0 + a_1 \cos t + \cdots + a_n \cos nt + b_1 \operatorname{sen} t + \cdots + b_n \operatorname{sen} nt$$

é nulo qualquer que seja o valor dado a t, todos os seus coeficientes são nulos.

3610 – Provar que $\vec{v} = |r|^a\, \vec{r}$ é um vector irrotacional qualquer que seja o inteiro a; só é porém solenoidal se $a = -3$.

Resolução dos problemas do concurso propostos no n.º 51

3436 – Enviaram soluções exactas os Srs. J. Vinhas Novais e José Machado Gil. Publicamos a solução do primeiro:

Representando por a, b, c e d respectivamente os três lados e a altura do triângulo referente ao lado a, e atendendo a que $d < b, c$, temos 4 hipóteses a considerar:

1.ª H	$a=n$	$b=n+2$	$c=n+3$	e	$d=n+1$
2.ª H	$a=n+1$	$b=n+2$	$c=n+3$	e	$d=n$
3.ª H	$a=n+2$	$b=n+1$	$c=n+3$	e	$d=n$
4.ª H	$a=n+3$	$b=n+1$	$c=n+2$	e	$d=n$.

A altura d de um triângulo, em relação ao lado a, está relacionada com os três lados pela expressão

$$d = \frac{2}{a}\times\sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}$$

com $p = \dfrac{1}{2}(a+b+c)$.

Considerando as 4 hipóteses possíveis acima indicadas somos conduzidos a 4 equações em n, cujas raízes são também raízes das equações

1.ª H	$n^4 + 6n^3 - 18n^2 + 20n + 25 = 0$
2.ª H	$n^3 - 16n^2 - 56n - 48 = 0$
3.ª H	$n^3 - 16n^2 - 52n - 48 = 0$
4.ª H	$n^3 - 24n - 48 = 0$

obtidas quadrando as equações referidas.

Existem tantos triângulos nas condições do enunciado quantas as raízes inteiras destas equações, que sejam ainda raízes das equações donde foram obtidas por quadratura.

Sabendo-se que as raízes inteiras de $P(n)$ dividem o termo independente e que se m é raíz então $P(n) = (n-m)\cdot Q(n)$, chegamos à conclusão de que só na 3.ª hipótese existe uma raíz inteira, e uma só: $n=12$.

Fica assim demonstrada a existência do triângulo nas condições do enunciado, que é único, e fica também determinado $a=14$, $b=15$, $c=13$ e $d=12$.