desenvolvimento a partir de $\dfrac{1}{1+z\cos^2 x}$. *b*) Comprove o resultado. *c*) Deduzir por processos convenientes os valores dos seguintes integrais:

$$a)\ \int_0^{\pi}\frac{dx}{(1+\cos^2 x)^2}\,,\quad b)\ \int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sec^4 x}\ \text{ e}$$

$$c)\ \int_0^{\pi}\frac{\cos^{2n} x\,dx}{(1+\cos^2 x)^{n+1}}.$$

3604 – Sendo $A(1,1,1)$, $B(1,3,1)$, $C(3,1,1)$, $D(3,3,1)$, $E(2,2,0)$ e $F(2,2,2)$ determine vectorialmente: *a*) O volume do poliedro regular de vértices A, B, C, D, E e F. *b*) O momento resultante do sistema $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, $\vec{OC}$ e $\vec{OD}$ em relação ao baricentro dos vértices do poliedro, nos quais se aplicam massas iguais. *c*) Demonstre que

$$\Sigma\, m_i\,\overline{OM_i}^2 = (\Sigma\, m_i)\,\overline{OG}^2 + \Sigma\, m_i\,\overline{GM_i}^2$$

sendo M_i os pontos em que se aplicam massas m_i, G o centro de gravidade e O um ponto qualquer, fazendo a correspondente aplicação ao poliedro $ABCDEF$.

PROBLEMAS

Problemas propostos ao concurso

SECÇÃO ELEMENTAR

3605 — Um número que, no sistema de base 10, se escreve com três algarismos, escreve-se, num outro sistema de base menor que dez, com os mesmos algarismos dispostos em ordem inversa. Determinar o número.

3606 — Considere uma esfera de raio R. Quantas esferas de raio R são tangentes à primeira e simultâneamente tangentes a mais cinco destas últimas?

SECÇÃO MÉDIA:

3607 – Considere a equação

$$\cos 2x + \xi \operatorname{sen} x = \eta$$

em que ξ e η são as coordenadas dum ponto P do plano $\xi o \eta$. Determinar o número de soluções da equação proposta segundo a posição de P no respectivo plano.

3608 – Determinar os polinómios $f(x)$ do 3.º grau tais que

$$f(x^2) \equiv k\, f(x)\cdot f(-x)$$

SECÇÃO SUPERIOR:

3609 – Provar que, se o polinómio trigonométrico

$$p(t) = a_0 + a_1\cos t + \cdots + a_n \cos nt$$
$$+\, b_1 \operatorname{sen} t + \cdots + b_n \operatorname{sen} nt$$

é nulo qualquer que seja o valor dado a t, todos os seus coeficientes são nulos.

3610 – Provar que $\vec{v} = |\,r\,|^a\,\vec{r}$ é um vector irrotacional qualquer que seja o inteiro a; só é porém solenoidal se $a = -3$.

Resolução dos problemas do concurso propostos no n.º 51

3436 – Enviaram soluções exactas os Srs. J. Vinhas Novais e José Machado Gil. Publicamos a solução do primeiro:

Representando por a, b, c e d respectivamente os três lados e a altura do triângulo referente ao lado a, e atendendo a que $d < b, c$, temos 4 hipóteses a considerar:

1.ª H	$a=n$	$b=n+2$	$c=n+3$	e	$d=n+1$
2.ª H	$a=n+1$	$b=n+2$	$c=n+3$	e	$d=n$
3.ª H	$a=n+2$	$b=n+1$	$c=n+3$	e	$d=n$
4.ª H	$a=n+3$	$b=n+1$	$c=n+2$	e	$d=n$.

A altura d de um triângulo, em relação ao lado a, está relacionada com os três lados pela expressão

$$d = \frac{2}{a}\times\sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}$$

com $p = \dfrac{1}{2}(a+b+c)$.

Considerando as 4 hipóteses possíveis acima indicadas somos conduzidos a 4 equações em n, cujas raízes são também raízes das equações

1.ª H $\quad n^4 + 6n^3 - 18n^2 + 20n + 25 = 0$
2.ª H $\quad n^3 - 16n^2 - 56n - 48 = 0$
3.ª H $\quad n^3 - 16n^2 - 52n - 48 = 0$
4.ª H $\quad n^3 - 24n - 48 = 0$

obtidas quadrando as equações referidas.

Existem tantos triângulos nas condições do enunciado quantas as raízes inteiras destas equações, que sejam ainda raízes das equações donde foram obtidas por quadratura.

Sabendo-se que as raízes inteiras de $P(n)$ dividem o termo independente e que se m é raíz então $P(n) = (n-m)\cdot Q(n)$, chegamos à conclusão de que só na 3.ª hipótese existe uma raíz inteira, e uma só: $n=12$.

Fica assim demonstrada a existência do triângulo nas condições do enunciado, que é único, e fica também determinado $a = 14$, $b = 15$, $c = 13$ e $d = 12$.

3437 — Apresentaram soluções exactas os Srs. J. Vinhas Novais e J. Machado Gil; as demonstrações eram ambas baseadas no método de redução ao absurdo. Damos uma demonstração directa por ser este tipo de demonstração preferível ao indirecto:

Seja b a base; então

$$a\,b^2 + a\,b + a = a^3$$

ou

$$b^2 + b + 1 = a^2$$

donde

$$b = \frac{-1 \pm \sqrt{4\,a^2 - 3}}{2}.$$

Para ser $4\,a^2 - 3 = N^2$ deve ser $(2a+N)(2a-N) = 3$ e, como N e a devem ser inteiros, terá que ser $2a + N = 3$ e $2a - N = 1$, sistema cuja solução dá $a = 1$ e $N = 1$ e portanto $b = 0$ ou $b = -1$.

Quere dizer, não existe base de sistema de numeração em que aquele facto se dê.

3438 — Apresentou solução correcta, que damos a seguir, o sr. J. Machado Gil.

De $\operatorname{sen} 7\,a = 7 \operatorname{sen} a - 56 \operatorname{sen}^3 a + 112 \operatorname{sen}^5 a - 64 \operatorname{sen}^7 a$ vem para $a = \frac{\pi}{7}$

$$\operatorname{sen} \pi = 0 = 7 \operatorname{sen} \frac{\pi}{7} - 56 \operatorname{sen}^3 \frac{\pi}{7} + 112 \operatorname{sen}^5 \frac{\pi}{7} - 64 \operatorname{sen}^7 \frac{\pi}{7}$$

e, por ser $\operatorname{sen} \frac{\pi}{7} \neq 0$

$$64 \operatorname{sen}^6 \frac{\pi}{7} - 112 \operatorname{sen}^4 \frac{\pi}{7} + 56 \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{7} - 7 = 0\,.$$

Ora, fazendo $\operatorname{sen} \frac{\pi}{7} = x$, vem

$$(1) \qquad 64\,x^6 - 112\,x^4 + 56\,x^2 - 7 = 0$$

equação cujas raízes são os valores que pode ter $\operatorname{sen} \frac{a}{7}$, quando a é determinado pelo valor dado de $\operatorname{sen} a$ e $a = \pi$.

Dado $\operatorname{sen} a$, os arcos com este seno pertencem a

$$n\,\pi + (-1)^n\,a \qquad (n \text{ inteiro})$$

cuja sétima parte é

$$\frac{n\,\pi}{7} + (-1)^n \frac{a}{7} = \alpha\,.$$

Ora, α é côngruo para o módulo 2π com um dos arcos: $\frac{a}{7}$; $\pi - \frac{a}{7}$; $\frac{\pi}{7} - \frac{a}{7}$; $\pi + \frac{\pi}{7} + \frac{a}{7}$; $\frac{2\pi}{7} + \frac{a}{7}$; $\pi + \frac{2\pi}{7} - \frac{a}{7}$; $\frac{3\pi}{7} - \frac{a}{7}$; $\pi + \frac{3\pi}{7} + \frac{a}{7}$; $\frac{4\pi}{7} + \frac{a}{7}$; $\pi + \frac{4\pi}{7} - \frac{a}{7}$; $\frac{5\pi}{7} - \frac{a}{7}$; $\pi + \frac{5\pi}{7} + \frac{a}{7}$; $\frac{6\pi}{7} + \frac{a}{7}$; $\pi + \frac{6\pi}{7} - \frac{a}{7}$, quando n varia. Estes arcos dão os senos distintos, para $a = \pi$, $\pm \operatorname{sen} \frac{\pi}{7}$; $\pm \operatorname{sen} \frac{2\pi}{7}$ e $\pm \operatorname{sen} \frac{4\pi}{7}$ que são as raízes de (1).

Estas raízes têm por produto

$$-\operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{7} \operatorname{sen}^2 \frac{2\pi}{7} \operatorname{sen}^2 \frac{4\pi}{7} = (-1)^6 \left(-\frac{7}{64}\right) = -\frac{7}{64}$$

e, por ser $\frac{\pi}{7} + \frac{2\pi}{7} + \frac{4\pi}{7} = \pi$, vem

$$\operatorname{sen} \frac{2\pi}{7} + \operatorname{sen} \frac{4\pi}{7} + \operatorname{sen} \frac{8\pi}{7} =$$

$$= 4 \operatorname{sen} \frac{\pi}{7} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{7} \operatorname{sen} \frac{4\pi}{7} = 4 \times \frac{\sqrt{7}}{8} = \frac{\sqrt{7}}{2}\,.$$

3439 — Não foram recebidas soluções completas deste problema. Enviaram, porém, soluções satisfatórias os Srs. J. Machado Gil, Fernando de Jesus e J. Vinhas Novais. A mais completa de todas é a deste último.

Tomemos para eixos coordenados a recta fixa (eixo dos $x\,x$) e a perpendicular a esta passando pelo ponto fixo $P(0, a)$. Seja θ o menor ângulo positivo constante definido pelo eixo dos $x\,x$ e pela tangente à circunferência no ponto $M(0, b)$ em que esta corta o mesmo eixo.

O centro da circunferência é o ponto de intersecção das rectas, r, $y - \frac{a}{2} = \frac{b}{a}\left(x - \frac{b}{2}\right)$ — mediatriz do segmento $P\,M$ —, e r' $y = -\frac{1}{m}(x - b)$ $(m = tg\,\theta)$ — perpendicular à tangente em M; as suas cordenadas verificam pois a equação

$$x^2 - m^2\,y^2 - 2\,a\,y + a^2 = 0$$

do lugar geométrico procurado. Trata-se pois duma hipérbole $(m \neq 0)$ ou parábola $(m = 0)$.

Se porém é $m = \infty$ o lugar é uma cónica degenerada no eixo dos $x\,x$.

J. S. Paulo

3440 — Não foram recebidas soluções deste problema.

A série proposta, $1 + r \cos z + r^2 \cos 2z + \cdots + r^n \cos nz + \cdots$ reduz-se à série de Laurent

$$\frac{1}{2}\left[1 + r\,\xi + r^2\,\xi^2 + \cdots + r^n\,\xi^n + \cdots\right] + \frac{1}{2}\left[1 + r\,\xi^{-1} + r^2\,\xi^{-2} + \cdots + r^n\,\xi^{-n} + \cdots\right]$$

mediante a transformação $\xi = e^{iz}$, e é portanto convergente sempre que $|r| < 1$ e $z \neq 0$.

Nestas condições, fixado um r, a série de LAURENT converge sempre que

$$a \leqslant |\xi| \leqslant b$$

(dependendo a e b do valor atribuído a r). Como $\xi| = e^{-y}$, a série proposta é convergente desde que

$$\log a \leqslant -y \leqslant \log b$$

isto é, numa faixa do plano dos z, contida entre duas rectas paralelas ao eixo real.

J. G. Teixeira

3441 — Apresentou solução correcta que damos a seguir, o Sr. J. Vinhas Novais.

Uma homografia que conserve a recta do infinito no plano $x0y$ é uma afinidade.

As equações da transformação afim são

$$\begin{aligned} x &= a_1 x' + a_2 y' + a_3 \\ y &= b_1 x' + b_2 y' + b_3 \end{aligned} \qquad \text{com} \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = J \neq 0$$

e $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ constantes.

Representando por ξ e η as coordenadas do centro de gravidade da área S e por ξ' e η' as do centro da gravidade da área S', temos

$$\xi = \frac{\int_S x\,dx\,dy}{\int_S dx\,dy} \qquad \xi' = \frac{\int_{S'} x'\,dx'\,dy'}{\int_{S'} dx'\,dy'}$$

e expressões análogas para η e η'.

Pretendemos demonstrar que

$$\xi = a_1 \xi' + a_2 \eta' + a_3$$
$$\eta = b_1 \xi' + b_1 \eta' + b_3$$

Vamos demonstrar para a coordenada ξ:

$$\xi = \frac{\int_S x\,dx\,dy}{\int_S dx\,dy} = \frac{\int_{S'} (a_1 x' + a_2 y' + a_3)\,J\,dx'\,dy'}{\int_{S'} J\,dx'\,dy'} =$$

$$= \frac{\int_{S'} (a_1 x' + a_2 y' + a_3)\,dx'\,dy'}{\int_{S'} dx'\,dy'} =$$

$$= \frac{a_1 \int_{S'} x'\,dx'\,dy' + a_2 \int_{S'} y'\,dx'\,dy' + a_3 \int_{S'} dx'\,dy'}{\int_{S'} dx'\,dx'} =$$

$$= a_1 \xi' + a_2 \eta' + a_3 .$$

BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de Matemática de que os Autores ou Editores enviarem dois exemplares à Redacção.

95 — CURRY, HASKELL B. — **Leçons de Logique Algébrique,** Gauthier-Villars, Paris, 1952.

A Universidade de Lovaina convidou, em 1951, o Professor HASKELL CURRY a fazer um curso sobre Lógica da Matemática.

As lições do Professor CURRY foram editadas em volume pela Livraria Gauthier Villars em 1952, com o título *Leçons de logique algébrique.*

Também há anos, em 1942, a convite da Universidade de S. Paulo, o Professor W. QUINE fez um curso de Lógica da Matemática e as suas lições foram reunidas em volume, editado pela Livraria Martins (S Paulo), com o título *O Sentido da nova lógica.*

É assim que procedem os países que desejam eliminar ràpidamente o seu desfasamento num dado ramo da ciência.

Quando será que uma universidade portuguesa, ou o Instituto para a Alta Cultura, se resolverá a convidar um destes dois eminentes professores, ou outro de igual categoria, a fazer, em Portugal, um curso de lógica da Matemática no intuito de eliminar o nosso desfasamento (digo desfasamento por eufemismo) neste importantíssimo ramo da ciência?

Se se reconhece que em Portugal os estudos sobre Lógica da Matemática são incipientes e que se torna necessário iniciá-los com rapidez e vigor, julgo que o único processo será convidar um professor da categoria dos eminentes professores que citei para reger um curso frequentado pelas pessoas que se devem interessar pelo assunto, como sejam os assistentes de matemática e filosofia das escolas superiores e os professores de matemática e filosofia dos liceus. É uma sugestão que infelizmente eu sei que não será aproveitada.

Algumas conferências realizadas no nosso país sobre Lógica da Matemática não eliminam as nossas deficiências. Numa conferência, a assistência está separada do conferente pela sua passividade de ouvinte, ao passo que num curso os alunos estão em contacto com o professor por meio do trabalho que lhes é distribuído, pelas dúvidas que surgem e troca de impressões que daí resulta.

Enquanto que as conferências seriam de resultado muito precário ou nulo, o curso seria uma sementeira de ideias e de métodos de trabalho o que produziria necessàriamente os seus frutos.

As belezas naturais do nosso país e a benignidade