mereceram as questões de ensino, mesmo as do ensino elementar, porque — e é este um traço bem curioso da sua personalidade — mostrava um tacto especial para os pontos delicados das questões didácticas, quási como se delas tivesse uma experiência directa.

*

Em 1938 CASTELNUOVO é atingido pelas duras leis raciais. Durante esse período doloroso, que se prolonga por seis anos e em que ele arrosta o perigo com serenidade estoica, organisa Cursos Universitários de Matemática para jovens hebreus, aos quais é vedada a frequência das Universidades Italianas, e consegue que os respectivos diplomas sejam validados pela Universidade de Friburgo, na Suiça. No período da ocupação alemã, que vai de 8 de Setembro de 1943 a 4 de Junho de 1944, enquanto a população romana se definha e segue ansiosa a lenta evolução das tropas aliadas na frente de Cassino e na de Anzio e Nettuno, CASTELNUOVO mantém-se na «Cidade Aberta», hospedado com nome falso em casa de alunos.

Mas terminada a guerra, melhores dias lhe estão reservados. Desde logo eleito Presidente da renascida Academia dos «Lincei» (da qual o último presidente tinha sido VOLTERRA), ele dedica o melhor dos seus cuidados à principal academia italiana, a que dá uma estrutura francamente estimuladora da actividade de investigação. É também nomeado Comissário Geral no Conselho Nacional de Investigação, Presidente da delegação italiana à UNESCO e da Sociedade Europeia de Cultura.

Mas também é chamado a intervir nos destinos da Nação. Em 1948 é escolhido como um dos cinco senadores em vida eleitos pelos seus méritos excepcionais.

E agora, na última quadra da existência, sem mesmo repousar da longa caminhada, volta-se de novo para o que foi o *leit-motiv* da sua vida, fonte inexaurível de harmonias feiticeiras: a Geometria Algébrica; e consegue resolver um problema que há muito o absorvia, relativo ao número dos módulos duma superfície irregular.

O seu último acto público foi a mensagem dirigida à Assembleia Geral Constituinte da União Matemática Internacional que se realizou em Roma em Março deste ano. A mensagem foi lida no início dos trabalhas pelo Prof. E. BOMPIANI [1]. CASTELNUOUO estava retido em casa, enfermo de grave hepatite.

*

Homem acolhedor, modesto, de olhar tranquilo e arguto, levemente irónico, recebia todos, grandes e pequenos, com a mesma afabilidade, o mesmo desejo de ser útil, a mesma decidida vontade de socorrer e de encorajar.

Sobretudo a serenidade — a calma contemplação dos homens e dos factos, como se os visse dum outro mundo em que tudo é claro e objectivo — era a nota que mais se fazia sentir a quem dele se abeirava pela primeira vez. E assim, também, a magnanimidade, a largueza de vistas com que encarava até o maior inimigo; disto se apercebeu, e ficou impressionado, o embaixador alemão em Roma VON BRENTANO que estreitou com ele relações de sincera amizade.

O homem de ciência na sua expressão mais elevada — pondo as alegrias do espírito acima dos interesses materiais, devotado a um ideal sem deixar de ser humano, profundo no seu campo especulativo e contudo senhor duma apurada cultura e de fina sensibilidade artística — encontrou em GUIDO CASTELNUOVO uma esplêndida realização. É com homens desta envergadura que se mantem, perene e criadora, a tradição científica na pátria de GALILEU.

Nota — Para a elaboração deste artigo fui largamente coadjuvado pela Prof.ª EMMA CASTELNUOVO, a quem deixo aqui expressa a minha viva gratidão. A última oportunidade que tive de ver reunidos CASTELNUOVO e ENRIQUES foi em 1946, quando, no Liceu Tasso de Roma, assistiam a uma conferência da Prof.ª EMMA CASTELNUOVO, filha dum e sobrinha do outro. Dessa conferência démos uma tradução no n.º 33 da Gazeta de Matemática. ENRIQUES faleceu pouco tempo depois, em 14 de Junho de 1946.

[1] Transcrita adiánte em «Movimento Científico».

Problèmes de dépouillements — IV*

Triangles imités du triangle arithmétique de Pascal

par Pierre Dufresne

Pour l'étude des problèmes de dépouillements traités dans le premier chapitre nous avons utilisé des lemmes qui ont servi de bases à nos démonstrations.

Ce sont ces mêmes lemmes qui nous permettent d'établir des triangles (ou des tableaux) imités du triangle arithmétique de PASCAL.

Il est possible de fondre les énoncés de tous les lemmes dans un énoncé très général.

Rappellons d'abord comment ont été posés nos problèmes de dépouillements.

* Continuação dos n.os 44-45, 46 e 47.

On a supposé donné le nombre total des bulletins θ qui ont été déposés lors d'une élection et la répartition de ces θ bulletins entre les différents candidats $A, B \cdots N$. On a supposé que le dépouillement serait effectué bulletin par bulletin ce qui permet d'obtenir $(\theta-1)$ résultats partiels et le résultat complet.

Et puis on a posé une condition, ou un ensemble de conditions, toujours les mêmes pour un même problème auxquelles devaient satisfaire non seulement le résultat complet mais encore chacun des $(\theta-1)$ résultats partiels.

Nous avons appelé dépouillements favorables — un dépouillement peut être considéré comme amalgame de $(\theta-1)$ résultats partiels et du résultat complet — les dépouillements qui satisfaisaient depuis le premier jusqu' après le dernier bulletin sorti aux conditions posées.

Et le problème a consisté à calculer le nombre des dépouillements favorables ou plutôt d'établir une formule qui donnât ce nombre.

Nous avons d'abord rapproché les conditions imposées et le résultat final obligatoirement connu. Et nous avons dit et c'est en cela que résident tous les lemmes. «Ou le résultat final, et nous le connaissons à l'avance, vérifie les conditions imposées ou il ne les vérifie pas. S'il ne les vérifie pas c'est qu'il n'y a pas de dépouillement favorable. S'il les vérifie c'est la preuve que ce ne sera pas le dernier bulletin dépouillé qui pourra empêcher un dépouillement d'être favorable. Et par suite le nombre des dépouillements favorables possibles des θ bulletins est la somme de tous les dépouillements favorables différents possibles des mêmes bulletins moins un — le bulletin retranché appartenant à n'importe quelle famille».

Ce lemme qui nous a permis d'établir des formules va nous permettre maintenant de calculer de proche en proche les nombres des dépouillements favorables pour des valeurs croissantes de θ.

Lorsque le problème posé ne met en jeu que deux candidats il sera facile d'établir des tableaux à double entrée donnant les nombres de dépouillements favorables en fonction des valeurs de a et de b ou de θ et de a ou encore de θ e de b.

Nous avons vu que les lemmes ne sont applicables que pour des ensembles de valeurs de a, de b et de θ, qui ne sont pas incompatibles avec les conditions énoncées. Il y aura lieu de séparer nettement les cases qui correspondent à des ensembles de valeurs vérifiant les conditions de celles qui correspondent à des ensembles incompatibles. Les premières seules seront remplies. Soit à déterminer le nombre ou les nombres «générateurs». Lorsque $\theta=1$ on peut avoir soit $a=1$ et $b=0$ soit $b=1$ et $a=0$; dans les deux cas un seul dépouillement possible. On inscrira donc le chiffre 1 dans chacune des deux cases $(a=1, b=0)$ et $(b=1, a=0)$ ou au moins dans celle de ces deux cases qui n'est pas «incompatible». Si les deux cases étaient incompatibles il est clair qu'il ne pourrait jamais y avoir de dépouillement favorable.

Nous présenterons deux modèles de tableau: le premier établi en fonction de θ et de b les valeurs de θ étant croissantes vers le bas et celles de b étant croissantes vers la droite. Le nombre à inscrire dans une case «compatible» est la somme de deux nombres inscrits sur la ligne supérieure le premier directement au dessus, le second dans la colonne immédiatement à gauche. Le deuxième établi en fonction de a et de b les valeurs de a étant croissantes vers la droite et les valeurs de b étant croissantes vers le haut. Le nombre à inscrire dans une case «compatible» est la somme de deux nombres inscrits l'un dans la même colonne mais sur la ligne inférieure, l'autre sur la même ligne mais dans la case à gauche.

Lorsque les problèmes posés concernent un plus grand nombre de candidats la représentation par des tableaux n'est plus aussi aisée. Dans le cas de trois candidats on peut utiliser une suite de tableaux chacun correspondant à une valeur déterminée de c. Le nombre à inscrire dans une case du tableau est la somme de trois nombres qui correspondent respectivement à des valeurs de a, de b, et de c diminuée d'une unité. Les deux premiers nombres se trouvent immédiatement sur le même tableau le troisième sur le tableau précédent.

$\theta \backslash b$	0	1	2	3
1	1			
2	1			
3	1			
4	1			
5	1			
6	1			
7	1	1		
8	1	2		
9	1	3	2	
10	1	4	5	
11	1	5	9	5

Tableau donnant en fonction de θ et de b *les valeurs de:*

$$N_{(a,b)\,[A>B+4]}$$

On rappelle que si $a \geqslant b+4$

$$N_{(a,b)\,[A>B+4]} = \frac{a-b-4}{a+b-4}\,\frac{(a+b-4)\,!}{(a-4)\,!\,b\,!}$$

(si $b=0$ quelle que soit la valeur de a il a toujours un dépouillement favorable).

θ \ b	0	1	2	3	4
1	1				
2	1				
3	1				
4	1				
5	1				
6	1	1			
7	1	2			
8	1	3	2		
9	1	4	5		
10	1	5	9	5	
11	1	6	14	14	

Tableau donnant en fonction de θ *et de* b *les valeurs de:*

$$N_{(a,b)[A>B+3]}$$

On rappelle que si $a \geqslant b+3$

$$N_{(a,b)[A>B+3]} = \frac{a-b-3}{a+b-3}\;\frac{(a+b-3)!}{(a-3)!\,b!}$$

(si $b=0$ quelle que soit la valeur de a il y a toujours un dépouillement favorable).

θ \ b	0	1	2	3	4
1	1				
2	1				
3	1				
4	1				
5	1	1			
6	1	2			
7	1	3	2		
8	1	4	5		
9	1	5	9	5	
10	1	6	14	14	
11	1	7	20	28	14

Tableau donnant en fonction de θ *et de* b *les valeurs de:*

$$N_{(a,b)[A>B+2]}$$

On rappelle que: si $a \geqslant b+2$

$$N_{(a,b)[A>B+2]} = \frac{a-b-2}{a+b-2}\;\frac{(a+b-2)!}{(a-2)!\,b!}$$

(si $b=0$ il y a toujours un dépouillement favorable quelle que soit la valeur de a).

θ \ b	0	1	2	3	4	5
1	1					
2	1					
3	1					
4	1	1				
5	1	2				
6	1	3	2			
7	1	4	5			
8	1	5	9	5		
9	1	6	14	14		
10	1	7	20	28	14	
11	1	8	27	48	42	

Tableau donnant en fonction de θ *et de* b *les valeurs de:*

$$N_{(a,b)[A>B+1]}\,.$$

On rappelle que:

si $a \geqslant b+1$

$$N_{(a,b)[A>B+1]} = \frac{a-b-1}{a+b-1}\;\frac{(a+b-1)!}{(a-1)!\,b!}$$

(si $b=0$ il y a toujours un dépouillement favorable quelle que soit la valeur de a).

θ \ b	0	1	2	3	4	5
1	1					
2	1					
3	1	1				
4	1	2				
5	1	3	2			
6	1	4	5			
7	1	5	9	5		
8	1	6	14	14		
9	1	7	20	28	14	
10	1	8	27	48	42	
11	1	9	35	75	90	42

Tableau donnant en fonction de θ *et de* b *les valeurs de:*

$$N_{(a,b)[A>B]}\,.$$

On rappelle que:

si $a \geqslant b$

$$N_{(a,b)[A>B]} = \frac{a-b}{a+b}\;\frac{(a+b)!}{a!\,b!}\,.$$

θ \ b	0	1	2	3	4	5	6
1	1						
2	1	1					
3	1	2					
4	1	3	2				
5	1	4	5				
6	1	5	9	5			
7	1	6	14	14			
8	1	7	20	28	14		
9	1	8	27	48	42		
10	1	9	35	75	90	42	
11	1	10	44	110	165	132	

Tableau donnant en fonction de θ *et de* b *les valeurs de:*

$$N_{(a,b)[A\geq B]}\,.$$

On rappelle que:

Si $b=0$

$$N_{(a,b)[A\geq B]} = \frac{(a+b)!}{a!\,b!} = 1$$

si $\left|\begin{array}{l} b \geqslant 1 \\ \text{et} \\ a > b-1 \end{array}\right.$

$$N_{(a,b)[A\geq B]} = \frac{(a+b)!}{a!\,b!} - \frac{(a+b)!}{(a+1)!\,(b-1)!}\,.$$

Remarque. Les deux formules ci dessus peuvent être condensées en une seule:

Si $b=0$ ou si $\left|\begin{array}{l} b \geqslant 1 \\ a > b-1 \end{array}\right.$

$$N_{(a,b)[A\geq B]} = \frac{a-b+1}{a+1}\;\frac{(a+b)!}{a!\,b!}\,.$$

θ \ b	0	1	2	3	4	5	6
1	1	1					
2	1	2					
3	1	3	2				
4	1	4	5				
5	1	5	9	5			
6	1	6	14	14			
7	1	7	20	28	14		
8	1	8	27	48	42		
9	1	9	35	75	90	42	
10	1	10	44	110	165	132	
11	1	11	54	154	275	297	132

Tableau donnant en fonction de θ *et de* b *les valeurs de:*

$$N_{(a,b)[A>B-2]} =$$

On rappelle que:

Si $b \leqslant 1$

$$N_{(a,b)[A>B-2]} = \frac{(a+b)!}{a!\,b!}$$

et $\left| \begin{array}{l} b \geqslant 2 \\ a > b-2 \end{array} \right.$ si

$$N_{(a,b)[A>B-2]} = \frac{(a+b)!}{a!\,b!} - \frac{(a+b)!}{(a+2)!\,(b-2)!}.$$

Remarque. Les deux formules ci dessus peuvent être condensées en une seule:

Si $b \leqslant 1$ ou si $\left| \begin{array}{l} b \geqslant 2 \\ a > b-2 \end{array} \right.$

$$N_{(a,b)[A>B-2]} = \frac{(a+b+1)(a-b+2)}{(a+1)(a+2)} \, \frac{(a+b)!}{a!\,b!}.$$

θ \ b	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3					
4	1	4	6	3				
5	1	5	10	9				
6	1	6	15	19	9			
7	1	7	21	34	28			
8	1	8	28	55	62	28		
9	1	9	36	83	127	90		
10	1	10	45	119	200	207	90	
11	1	11	55	164	319	407	297	

Tableau donnant en fonction de θ *et de* b *les valeurs de:*

$$N_{(a,b)[A>B-3]}.$$

On rappelle que:

Si $b \leqslant 2$

$$N_{(a,b)[A>B-3]} = \frac{(a+b)}{a!\,b!}$$

Si $\left| \begin{array}{l} b \geqslant 3 \\ a > b-3 \end{array} \right.$

$$N_{(a,b)[A>B-3]} = \frac{(a+b)!}{a!\,b!} - \frac{(a+b)!}{(a+3)!\,(b-3)!}.$$

θ \ b	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4				
5	1	5	10	10	4			
6	1	6	15	20	14			
7	1	7	21	35	34	14		
8	1	8	28	56	69	48		
9	1	9	36	84	125	117	48	
10	1	10	45	120	209	242	165	
11	1	11	55	165	329	451	407	165

Tableau donnant en fonction de θ *et de* b *les valeurs de:*

$$N_{(a,b)[A>B-4]}$$

On rappelle que

Si $b \leqslant 3$

$$N_{(a,b)[A>B-4]} = \frac{(a+b)!}{a!\,b!}.$$

Si $\left| \begin{array}{l} b \geqslant 4 \\ a > b-4 \end{array} \right.$

$$N_{(a,b)[A>B-4]} = \frac{(a+b)!}{a!\,b!} - \frac{(a+b)!}{(a+4)!\,(b-4)!}.$$

θ \ b	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5			
6	1	6	15	20	15	5		
7	1	7	21	35	35	20		
8	1	8	28	56	70	55	20	
9	1	9	36	84	126	125	75	
10	1	10	45	120	210	251	200	75
11	1	11	55	165	330	461	451	275

Tableau donnant en fonction de θ *et de* b *les valeurs de:*

$$N_{(a,b)[A>B-5]}$$

On rappelle que Si $b \leqslant 4$

$$N_{(a,b)[A>B-5]} = \frac{a!\,b!}{(a+b)!}.$$

Si $b \geqslant 5$

$a > b-5$

$$N_{(a,b)[A>B-5]} = \frac{(a+b)!}{a!\,b!} - \frac{(a+b)!}{(a+5)!\,(b-5)!}.$$

(continua)

PEDAGOGIA

AINDA O PROGRAMA DE MATEMÁTICA DO 1.º CICLO

por ***Maria Teodora Alves***

O meu primeiro artigo sobre «*O programa de Matemática da actual reforma do ensino liceal*», referente ao 1.º ciclo, é inserto no n.º 48 da *Gazeta de Matemática*, de Julho de 1951, teve a honra de sugerir ao Sr. Dr. Abreu Faria, ilustre professor do liceu, em serviço no Colégio Militar, longas e valiosas considerações expostas no n.º 122 da revista *Labor*, de Maio de 1952, sob o título, «*Dizei uma só palavra... e o «meu» programa será conexo*».

Pede-me o ilustre professor desculpa por apresentar