

$\theta \backslash b$	0	1	2	3	4	5	6
1	1	1					
2	1	2					
3	1	3	2				
4	1	4	5				
5	1	5	9	5			
6	1	6	14	14			
7	1	7	20	28	14		
8	1	8	27	48	42		
9	1	9	35	75	90	42	
10	1	10	44	110	165	132	
11	1	11	54	154	275	297	132

Tableau donnant en fonction de  $\theta$  et de  $b$  les valeurs de:

$$N_{(a,b)}[A > B-2] =$$

On rappelle que:

$$\text{Si } b \leq 1$$

$$N_{(a,b)}[A > B-2] =$$

$$= \frac{(a+b)!}{a!b!}$$

$$\text{et } b \geq 2$$

$$\text{si } a > b-2$$

$$N_{(a,b)}[A > B-2] = \frac{(a+b)!}{a!b!} - \frac{(a+b)!}{(a+2)!(b-2)!}$$

Remarque. Les deux formules ci dessus peuvent être condensées en une seule:

Si  $b \leq 1$  ou si  $b \geq 2$

$$N_{(a,b)}[A > B-2] = \frac{(a+b+1)(a-b+2)}{(a+1)(a+2)} \frac{(a+b)!}{a!b!}$$

$\theta \backslash b$	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3					
4	1	4	6	3				
5	1	5	10	9				
6	1	6	15	19	9			
7	1	7	21	34	28			
8	1	8	28	55	62	28		
9	1	9	36	83	127	90		
10	1	10	45	119	200	207	90	
11	1	11	55	164	319	407	297	

Tableau donnant en fonction de  $\theta$  et de  $b$  les valeurs de:

$$N_{(a,b)}[A > B-3]$$

On rappelle que:

$$\text{Si } b \leq 2$$

$$N_{(a,b)}[A > B-3] =$$

$$= \frac{(a+b)!}{a!b!}$$

$$\text{Si } b \geq 3$$

$$a > b-3$$

$$N_{(a,b)}[A > B-3] = \frac{(a+b)!}{a!b!} - \frac{(a+b)!}{(a+3)!(b-3)!}$$

$\theta \backslash b$	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4				
5	1	5	10	10	4			
6	1	6	15	20	14			
7	1	7	21	35	34	14		
8	1	8	28	56	69	48		
9	1	9	36	84	125	117	48	
10	1	10	45	120	209	242	165	
11	1	11	55	165	329	451	407	165

Tableau donnant en fonction de  $\theta$  et de  $b$  les valeurs de:

$$N_{(a,b)}[A > B-4]$$

On rappelle que

$$\text{Si } b \leq 3$$

$$N_{(a,b)}[A > B-4] =$$

$$= \frac{(a+b)!}{a!b!}$$

$$\text{Si } b \geq 4$$

$$a > b-4$$

$$N_{(a,b)}[A > B-4] = \frac{(a+b)!}{a!b!} - \frac{(a+b)!}{(a+4)!(b-4)!}$$

$\theta \backslash b$	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5			
6	1	6	15	20	15	5		
7	1	7	21	35	35	20		
8	1	8	28	56	70	55	20	
9	1	9	36	84	126	125	75	
10	1	10	45	120	210	251	200	75
11	1	11	55	165	330	461	451	275

Tableau donnant en fonction de  $\theta$  et de  $b$  les valeurs de:

$$N_{(a,b)}[A > B-5]$$

On rappelle que  
Si  $b \leq 4$

$$N_{(a,b)}[A > B-5] =$$

$$= \frac{a!b!}{(a+b)!}$$

$$\text{Si } b \geq 5$$

$$a > b-5$$

$$N_{(a,b)}[A > B-5] = \frac{(a+b)!}{a!b!} - \frac{(a+b)!}{(a+5)!(b-5)!}$$

(continua)

## P E D A G O G I A

AINDA O PROGRAMA DE MATEMÁTICA DO 1.º CICLO

por Maria Teodora Alves

O meu primeiro artigo sobre «O programa de Matemática da actual reforma do ensino liceal», referente ao 1.º ciclo, é inserto no n.º 48 da *Gazeta de Matemática*, de Julho de 1951, teve a honra de sugerir ao Sr. Dr. ARREU FARIA, ilustre professor do liceu, em

serviço no Colégio Militar, longas e valiosas considerações expostas no n.º 122 da revista *Labor*, de Maio de 1952, sob o título, «Dizei uma só palavra... e o meu programa será conexo».

Pede-me o ilustre professor desculpa por apresentar

opiniões divergentes daquelas que eu expus n.º 48 da *Gazeta de Matemática*. Ora, tendo eu afirmado, no meu artigo, que «exposta a minha opinião sobre as deficiências do programa de Matemática do 1.º ciclo da actual reforma, resta-me indicar as alterações a introduzir, sujeitando-as à crítica de quem se interesse pelo assunto,» estava o Sr. Dr. FARIA, ou quem quer que desejasse criticá-las, dispensado, para as criticar, de pedir desculpa. Mas é uma amabilidade que fico devendo à gentileza do ilustre professor, juntamente com outras que, embora eu reconheça serem imerecidas, me sinto na obrigação de agradecer.

Vejamos como o Sr. Dr. FARIA entende que deverá ser organizado o programa de uma disciplina do curriculum.

Depois de perguntar, *Por que razão as sucessivas reformas que se têm levado a efeito nestes últimos anos, no ensino liceal, não têm servido nem a gregos nem a troianos?* diz o seguinte: *Na resposta a esta pergunta — que se nos afigura crucial no problema do ensino — duas hipóteses apenas se nos apresentam viáveis: — seguir o caminho empírico da improvisação de um programa ainda que fortemente baseado na larga experiência e profundo saber de alguns professores, ou o caminho da experimentação pedagógica, feita na escola com métodos adequados, com o tempo necessário à confirmação ou rejeição das hipóteses postas à lógica da criança, que não é evidentemente a lógica dos adultos.*

*O primeiro é o caminho intuitivo, o segundo é o científico.*

*A importância de tal facto reconhece-a a própria reforma actual ao criar um Instituto de Investigação Pedagógica, organismo da mais alta importância na organização e orientação da vida educativa de uma nação. Será deste organismo que o Estado poderá esperar a palavra de ordem, digamos, proba, científica, que o habilite a promulgar uma reforma verdadeira e útil à Nações.*

Muito bem!

Vejamos agora como o Sr. Dr. FARIA que, no seu artigo inserto na *Labor*, declara ter sido um dos colaboradores, da comissão organizadora, do programa de Matemática do 1.º ciclo, informa que a comissão trabalhou: *«Trabalhou-se no caminho da intuição e eis portanto a razão fundamental da minha contrariedade, ao ver-me arrastado para um trabalho de antemão condenado ao insucesso, por não assentar em bases científicas».*

.....  
*«...Trabalhou-se em condições excepcionais: No tempo, porque houvemos que substituir alguns anos de experimentação pedagógica por escassos meses de meditação e estudo teórico, no espaço, porque tivemos de substituir a*

*escola, o verdadeiro laboratório onde devem ter lugar as complicadas reacções entre alunos, programas e métodos, pelo gabinete onde reagem apenas os nossos pensamentos com as doutrinas dos filósofos da educação.»*

Como prestou o Sr. Dr. FARIA a sua colaboração à comissão organizadora dos programas do 1.º ciclo?

Ele próprio dá a resposta a esta pergunta: *... procurei conjugar os meus fracos conhecimentos pedagógicos com a minha já regular experiência.*

Mas porque eu, que considerei o programa de Matemática do 1.º ciclo desconexo e descompensado na distribuição da matéria pelos dois anos do ciclo, propus, no n.º 48 da *Gazeta de Matemática*, algumas correcções, o Sr. Dr. FARIA, chamando programa às correcções propostas por mim, observa: *«De resto, o programa que a articulista propõe em sua substituição ou qualquer outro organizado em circunstâncias idênticas, não passa de um programa que em boa verdade poderemos classificar do «tira aqui» e do «acrescenta além», programa aleatório e sobretudo inadaptável às realidades da escola!*

*Um programa onde apenas conta a análise combinatória!».*

Para melhor entendimento desta observação do Sr. Dr. FARIA comparemos o programa de Matemática do 1.º ciclo da actual Reforma com o do 1.º ciclo da Reforma de 1936.

A divisibilidade por 2, 3, 5 e por qualquer potência de 10; o m. d. c. e m. m. c. de vários números; os números primos; as operações com números fraccionários e redução a dizima que pertenciam ao programa do 1.º ano da reforma de 1936 aparecem no programa do 2.º ano da reforma de 1948 (a actual).

A raiz quadrada e o sistema métrico decimal e os números complexos que pertenciam ao programa do 2.º ano da Reforma de 1936 aparecem no programa do 1.º ano da Reforma de 1948.

A comissão organizadora do programa de Matemática do 1.º ciclo da actual reforma, com a colaboração do Sr. Dr. FARIA, para substituir o programa que apresentou, fez saltitar as rubricas do programa de 1936 de um ano para o outro.

Quem foi que organizou um programa de Matemática para o 1.º ciclo, alheando-se do método científico, para recorrer ao impressionismo da sua experiência pessoal e das suas leituras, um programa que «poderemos classificar do «tira aqui» e do «acrescenta além» e «onde apenas conta a análise combinatória»?

Mais uma vez se confirma o velho rifão popular: *É mais fácil ver o argueiro no olho do visinho...*

O que é ainda mais curioso é que, tanto o Sr. Dr. FARIA, que colaborou com a comissão organizadora do programa de Matemática do 1.º ciclo, e eu que o critiquei no n.º 48 da *Gazeta de Matemática*,

estamos de pleno acordo acerca das graves dificuldades desse programa.

O Sr. Dr. FARIA até repudia o programa em que colaborou com estas severas palavras: «O tão desejado programa coerente, harmonioso, sem contradições, numa palavra adaptado às capacidades dos alunos — foi apenas uma pura ilusão!

O programa de Matemática do 1.º ciclo da actual Reforma do ensino liceal, não poderia sofrer maior condenação: O repudio de um dos colaboradores da comissão que o organizou!

Eu creio ter sido muito mais generosa para com o programa de Matemática do 1.º ciclo, pois pretendi informá-lo em melhor compensação, propondo algumas correções, sem o condenar em bloco.

Vejam agora a consistência das observações do Sr. Dr. FARIA ao meu artigo do n.º 48 da *Gazeta de Matemática*.

Para ter oportunidade de produzir longas considerações, corrige a minha afirmação de que «No ensino há dois aspectos distintos a considerar:

«Os conceitos e a sua ordenação lógica; a técnica do cálculo e as suas aplicações», do modo seguinte: *As considerações expendidas no preâmbulo deste artigo permitem-me chegar já à conclusão de que a ideia defendida na primeira proposição é incompleta. Ela deveria considerar-se assim: — Os conceitos e a sua ordenação lógica e psicológica.*

Simplemente, o ilustre professor não se lembrou de que, antes daquela minha afirmação, eu citara esta frase do eminente DECROLY: «Les programmes ont été inspirés par des hommes très savants dans leur spécialité, mais trop peu préoccupés de la Psychologie, pour eux l'enfant est accessoire», como poderá ler-se no n.º 48 da *Gazeta de Matemática*. A correção foi, pois, feita para ter oportunidade de produzir judiciosas observações sobre psicologia, dando a impressão de que me eram estranhas...

Como o programa de Matemática do 1.º ano se refere a medições de comprimentos, de superfícies, de volumes, de capacidades e de massa, que são depois tomadas como centro de interesse de vários estudos e, como não se pode medir sem que se escolha um sistema de unidades e, mesmo que seja escolhido somente o sistema métrico decimal, o problema de mudança de unidade surge necessariamente, eu critiquei as «Observações ao programa» por não se referirem a este importante problema.

O Sr. Dr. FARIA produziu a este respeito também longas considerações, entendendo que só no 2.º ano, depois do estudo da proporcionalidade inversa, os alunos poderão compreender o problema de mudança de unidade e, para justificar a sua afirmativa, enuncia concretamente um problema de mudança de unidade

e conclue assim: «*Trata-se nitidamente de um problema de proporcionalidade inversa e, consequentemente, é ainda um problema a tratar posteriormente à proporcionalidade directa.*

Eu vou também enunciar concretamente um problema, para mostrar, ao contrário do ilustre professor, que os alunos podem ser iniciados no problema de mudança de unidade, independentemente do conceito de proporcionalidade inversa.

Mandando desenhar aos alunos, numa folha de papel quadriculado do próprio caderno diário, um quadrado de lado igual a 12 lados da quadricula podem ser postas aos alunos questões como estas, por exemplo:

Qual é a área do quadrado desenhado, tomando por unidade de área:

a) O quadrado de lado igual a um lado da quadricula.

b) O quadrado de lado igual a 3 lados da quadricula.

c) O rectângulo cujos lados consecutivos são respectivamente iguais a 3 e a 4 lados da quadricula.

São problemas de mudança de unidade resolvidos por simples contagem e que podem, depois, ser resolvidos pela operação divisão;

Se o professor mandar construir, aos alunos, cubos de cartolina com 3 ou 4 centímetros de aresta, disporá de uma colecção de cubos que lhe permitirá formar cubos e paralelepípedos rectângulos, por sobreposição conveniente dos cubos construídos, e poderá apresentar aos alunos problemas de mudança de unidade que se resolvem por simples contagem e que, depois, serão resolvidos pela operação divisão.

Análogamente com a medição de comprimentos.

Estes problemas de mudança de unidade são resolvidos no plano concreto do 1.º dos estádios, a que se refere o Sr. Dr. FARIA no seu artigo da *Labor*, e que, embora não o tenha dito, foram extraídos de «*Le raisonnement mathématique de l'adolescent*» por L. JOHAN-NOT, segundo creio.

Quando os alunos estudarem o conceito de número fraccionário e o de razão, os mesmos problemas, e ainda outros serão sucessivamente resolvidos por outra ordem de considerações.

É o domínio de «The three kinds of problems».

Ou entende o Sr. Dr. FARIA que o problema de mudança de unidade deverá ser ensinado aos alunos num só jacto? É certo que estamos na época do avião de jacto...

O aluno que seja ensinado a medir superfícies sem o entendimento do problema de mudança de unidade é conduzido a esta regra muito corriqueira em que foram iniciados na instrução primária e que continuarão durante o seu curso do liceu a recitar assim:

A área do quadrado é lado vezes lado. Regra esta que persisto em chamar... triste regra, como a da dança da vírgula, na multiplicação ou divisão por uma potência de 10.

Tentará o Sr. Dr. FÁRIA explicar a necessidade da recitação desta regra como tentou explicar a da dança da vírgula?

Eu concordo plenamente com o Sr. Dr. FÁRIA, quando lamenta os professores que só sabem usar de uma metodologia na sua vida profissional.

Mas mais lamento os professores que, acerca de uma dada questão de ensino, não possuem nenhuma.

Servindo-me da imagem sugestiva que o Sr. Dr. FÁRIA apresentou, direi que esses professores estão na situação daqueles beligerantes que, no momento decisivo da batalha, não dispõem de nenhum avião... Lutam às cegas.

Apesar da longa e substancial argumentação do Sr. Dr. FÁRIA, continuo firmemente convencida de que a omissão de referências ao problema de mudança de unidade é uma grave omissão das «Observações ao programa».

É certo que o Sr. Dr. FÁRIA acha de somenos importância a existência de «Observações ao programa». Parece-me que até as condena. E nisso julgo que é original. Todos os programas de Matemática que conheço, de escolas estrangeiras, vêm acompanhados de minuciosos esclarecimentos, não somente para limitar a sua interpretação, mas ainda para a coordenação das suas rubricas e metodologia. Além disso, ainda os organismos oficiais e as sociedades científicas, por intermédio das suas revistas, ou publicações próprias, esclarecem e aconselham os professores no modo de orientar o ensino.

Cito por exemplo a magnífica colecção com o título: «The teaching of . . . . in schools», com referência a Álgebra, Geometria, Trigonometria e Cálculo, organizada pela «Mathematical Association» de Inglaterra. São pequenos e magníficos relatórios, em que são dados conselhos aos professores para a orientação do ensino.

Porque o programa se refere a proporcionalidade sem que faça qualquer referência à razão de duas grandezas, inferi que se pretendia tomar, para definição de grandezas proporcionais, uma definição que não fosse baseada no conceito de razão. Por exemplo, esta definição:

Dois classes de grandezas homogêneas finitas dizem-se proporcionais se:

a) Aos estados iguais de uma das grandezas correspondem estados iguais da outra grandeza

b) A soma dos estados quaisquer de uma das grandezas corresponde a soma dos estados correspondentes da outra.

Demonstra-se, e é muito fácil fazê-lo, que esta definição de grandezas proporcionais é equivalente à definição de grandezas proporcionais, estabelecida recorrendo ao conceito da razão de duas grandezas.

É a definição que eu acabei de citar que se refere ao meu comentário:

«É certo que se pode definir a proporcionalidade independente do conceito de razão. Do ponto de vista lógico não há reparos a fazer, mas do ponto de vista pedagógico é erro tão grosseiro que suponho, ninguém defenderá».

Talvez porque não citei aquela definição e o Sr. Dr. FÁRIA não se lembrou da sua existência, atribuí-me outros intuitos, produz longas considerações e pede-me amavelmente licença para servir-se das minhas palavras e exprimir exactamente a opinião contrária à minha.

Depois deste meu esclarecimento fica o Sr. Dr. FÁRIA autorizado a fazê-lo...

Devo dizer que estou plenamente convencida de que não aproveita a autorização que lhe concedo... e concordará comigo.

O meu artigo do n.º 48 da *Gazeta de Matemática* teve a honra de sugerir longas e valiosas considerações ao Sr. Dr. FÁRIA, mas não teve a honra de ser lido com atenção!

Há ainda uma pequena observação a fazer às considerações do Sr. Dr. FÁRIA sobre a proporcionalidade definida pela razão de duas grandezas:

Razão de dois números e razão de duas grandezas são conceitos distintos, e para estabelecer a proporcionalidade de duas grandezas, baseada no conceito de razão, há que estabelecer os dois conceitos e o Sr. Dr. FÁRIA apenas se refere a um deles.

Julgo que vem a propósito esta pergunta:

Por que motivo foram omitidos, no programa de Matemática do 1.º ciclo os conceitos de razão de dois números e razão de duas grandezas, quando um dos colaboradores da comissão organizadora é de opinião que o conceito de proporcionalidade deve ser baseado no conceito de razão?

O longo artigo do Sr. Dr. FÁRIA na *Labor* termina por indicar as condições a que deverá satisfazer um programa. É uma espécie de decreto com 10 artigos. Devo dizer que não concordo com todos os artigos desse novo decálogo, mas lamento que o Sr. Dr. FÁRIA não os fizesse acatar pela comissão organizadora do programa, com a qual colaborou.

Quanto a «The three kinds of problems» não há que lhes adaptar qualquer programa, nem que oficializá-los. Em qualquer programa que verse a operação divisão o conceito de número fraccionário e o conceito de razão, «The three kinds of problems» adaptam-se a esse programa e oficializam-se por si próprios, ao

menos para aqueles professores que cuidam da formação mental dos alunos em vez de cuidarem do seu adestramento.

HARRY WHEAT, em «*A theory of instruction for the middle grades*», refere-se a «The three kinds of problems».

Entende o Sr. Dr. FARIA que deve generalizá-los a 4,5, etc. problemas. Está no seu direito.

WHEAT enuncia-os de um modo geral, afim de incluir o caso da divisão de números inteiros, conceito de número fraccionário e de razão de dois números.

Entende o Sr. Dr. FARIA que deve enunciá-los apenas no caso particular dos números fraccionários. Continua a exercer um direito que ninguém lhe pode contestar.

Há ainda uma afirmação que o Sr. Dr. FARIA faz e que, por muito repetida, constitue um lugar comum, com o sabor ao refervido chá de TOLENTINO:

Não há maus programas, havendo bons professores.

É evidente que o programa de uma disciplina esco-

lar não possui as virtudes de um amuleto; não actua por si próprio. Precisa da interpretação e orientação do professor.

Mas esta afirmação tinha toda a validade quando o professor se podia mover à vontade dentro do programa, dando-o parcial ou totalmente e com a orientação que quizesse e, tudo dependendo, depois, da sua exclusiva apreciação.

Mas, quando um programa é tornado taxativo, devendo ser cumprido integralmente, acatando-se até a ordem das suas rubricas, num ensino dirigido a 40 alunos e que gravita em torno de um exame de resultados apreciados em percentagens, a maior parte das vezes extrapoladas, eu permito-me perguntar, se um programa nestas condições não é um factor da máxima importância e decisivo na vida escolar, quer de alunos, quer de professores?

Não respondo à pergunta, nem faço quaisquer comentários por motivos óbvios, mas peço ao Sr. Dr. FARIA que, de acordo com a sua recta intenção, dê a si próprio a resposta à pergunta que eu formulei.

## ANTOLOGIA

### BOURBAKI E A SUA INFLUÊNCIA\*

par L. Schwarz

BOURBAKI é um grupo de uma dezena de matemáticos, fundado pouco antes da guerra, que se propõe, pela publicação regular de livros, estudar as «estruturas» fundamentais das matemáticas.

BOURBAKI não se ocupa de problemas particulares, reservados aos especialistas, mas exclusivamente daqueles que são de ordem geral, e servem de fundamento às matemáticas, exagerando talvez um pouco, dos problemas que todo o matemático deveria conhecer. Os métodos são muito abstractos, a álgebra e a topologia desempenham aí um papel essencial, de resto aquele que lhes compete normalmente. Cada teoria é dissecada de tal maneira que ela se exprime numa sucessão de teoremas, proposições e corolários com demonstrações muito curtas, cada uma das quais é uma consequência quase imediata da precedente. O papel destes livros é pois, sobretudo, pedagógico; a maior parte dos resultados não são novos, embora expressos em geral por forma original. É certo que es-

tes livros, e o espírito «bourbaquista» em geral, comportam um certo perigo: o exagero escolástico, a «hiperaxiomatização» e a «hipergeneralização», o estilo exageradamente abstracto. Foi sem dúvida o que afastou ao princípio muitos matemáticos; actualmente porém o exito de BOURBAKI é considerável, sobretudo junto da nova geração, que aprende muitas vezes as teorias mais importantes pelos livros de BOURBAKI.

É no fundo possível classificar os espíritos científicos em duas categorias (com todo o arbitrário que comporta qualquer classificação): os espíritos finos (esprits fins) e os espíritos gerais (esprits généraux), não sendo nenhuma destas categorias de modo algum superior à outra. Os espíritos finos interessam-se por questões precisas, geralmente difíceis, necessitando grandes meios; interessam-lhes mais os resultados que as demonstrações, os problemas mais que os métodos; estes problemas, muitas vezes demasiado particulares, são geralmente originaes e tratados em todos os seus pormenores. Os espíritos gerais interessam-se sobretudo pelas teorias gerais, que tentam simplificar ao máximo, tendo de certo modo aversão às «dificuldades» de que os espíritos finos gostam; as demonstrações interessam-lhes

\* Transcrição de *Les mathématiques en France pendant et après la guerre*, conferência do Prof. L. SCHWARZ, da Universidade de Nancy, feita no 2.º Congresso Canadiano de Matemática, em Vancouver, 1949.

Sobre a actividade do grupo BOURBAKI vide *Gazeta de Matemática*, n.ºs 39, 40 e 43. N. R.