PRÉMIO NACIONAL GOMES TEIXEIRA

Afirmou a *Gazeta de Matemática* no n.º 50, publicado em homenagem ao grande matemático português, que o prémio GOMES TEIXEIRA, havia sido uma única vez atribuído até à data a um estudante das nossas escolas superiores. Era falsa a nossa afirmação e temos, ao corrigi-la, a grande satisfação de comunicar aos leitores da *Gazeta de Matemática* e de sermos, talvez, os primeiros a tornar pública a notícia, de que foi premiado também, por trabalho apresentado em 1947, o então aluno da Faculdade de Ciências de Lisboa, Sr. FERNANDO ROLDÃO DIAS AGUDO.

Lastimamos porém não se ter dado há mais a publicidade devida a tão importante acontecimento da vida universitária portuguesa e admiramo-nos bastante por este facto ter passado desapercebido do nosso, infelizmente tão restricto, meio matemático.

Sinceras e vivas felicitações ao Sr. Dr. F. R. DIAS AGUDO pela honra merecida e também os nossos melhores agradecimentos por ter acedido ao pedido da Redacção da *Gazeta de Matemática* para a publicação nesta revista do trabalho premiado, que se intitula «Sobre um teorema de KAKEYA» e que aparecerá num dos próximos números.

M. Z.

PRÉMIO INTERNACIONAL G. FUBINI

A União Matemática Italiana, em homenagem ao ilustre matemático Prof. GUIDO FUBINI, criou um prémio internacional que será atribuído ao autor de trabalhos publicados de Janeiro de 1946 a Dezembro de 1952 reconhecidos como contribuição importante ao progresso da Geometria Diferencial.

O prémio é indivisível e a quantia atribuída em liras italianas é equivalente a 550 gr. de ouro.

A Comissão deliberadora é composta pelos Profs.: S. BOCHNER, da Universidade de Princeton, C. EHRESMANN, da Universidade de Strasburgo e A. TERRACINI, da Universidade de Turim.

Caso a Comissão entenda não poder atribuir o prémio às investigações no domínio da Geometria Diferencial, conferi-lo-á a trabalhos da teoria das funções automorfas ou teorias relacionadas.

M. Z.

PROF. DR. RENATO PEREIRA COELHO

Em 2 e 3 de Junho de 1952, no Instituto Superior de Agronomia, realizaram-se provas de concurso para professor extraordinário do 3.º grupo (Matemática e Cálculo).

Foi concorrente único o assistente da mesma escola Dr. RENATO PEREIRA COELHO. A lição, criticada pelo Prof. Dr. BEDA NETO, da Universidade de Coimbra, versou sobre «Secções planas das superfícies de revolução. Caso particular da esfera».

A dissertação apresentada intitulava-se «Estudos sobre a regularidade dos espaços topológicos» e dela foi arguente o professor do Instituto, Doutor JOSÉ SEBASTIÃO E SILVA.

Ao candidato aprovado apresenta a *Gazeta de Matemática* vivas felicitações.

M. Z.

MATEMÁTICAS ELEMENTARES

Ensino Liceal — Ano de 1952 — Exame do 3.º ciclo — 1.ª chamada.

ATENÇÃO — Se não souber resolver qualquer alínea duma questão, não deixe de tentar as seguintes. A resposta a cada uma delas não depende das anteriores.
As respostas só são válidas com as respectivas justificações.

3442 — O polinómio $P(x)=x^3-x^2+4x-4$ admite a raiz $x=1$.

Determine as outras duas raízes deste polinómio.
R: *Como* $P(x)$ *é divisível por* $x-1$, *será* $P(x)=(x-1)(x^2+4)$. *Os outros zeros do polinómio são as raízes da equação* $x^2+4=0$ *ou seja* $x=\pm 2i$.

3443 — Os vértices dum triângulo são os pontos $A(0,0)$, $B(5,0)$, $C(3,-4)$. Escreva a equação da recta que passa por A e é paralela ao lado BC.

R: *A equação da recta que passa pelos pontos* B *e* C *é* $(x-5)/(5-3)=(y-0)/(0+4)$ *ou seja* $y=2x-10$ *e portanto a recta que lhe é paralela e que passa pela origem (ponto* A) *é* $y=2x$.

3444 — *a*) Estude as variações de sinal da função: $y=\frac{1}{2}(1-x)(x+3)$ no intervalo $(-\infty, +\infty)$.

b) Calcule a inclinação da tangente à parábola definida pela função anterior, no ponto de abcissa $x=0$. *c*) Determine o valor de h de modo que a recta $y=-2x+h$ seja secante àquela parábola.
R: *A função pode escrever-se sob a forma*

$$y=-\frac{1}{2}(x-1)(x+3);$$

como os zeros do polinómio do segundo membro são

$x' = 1 \; x'' = -3$, *e em virtude das propriedades do trinómio do 2.º grau, temos:*

a) *quando* $x \to -\infty \quad y \to -\infty$
» $-\infty < x < -3 \quad y < 0$
» $-3 < x < 1 \quad y > 0$
» $1 < x < +\infty \quad y < 0$
» $x \to +\infty \quad y \to -\infty$

b) *Como* $y' = -x - 1$ *o coeficiente angular da tangente no ponto de abcissa* 0 *é* -1 *e a tangente forma um angulo de 135.º com a parte positiva do eixo dos* xx.

c) *As abcsissas dos pontos de encontro da recta* $y = -2x + h$ *com a parábola* $y = -\frac{1}{2}(x-1)(x+3)$ *são as raízes da equação* $-2x + h = -\frac{1}{2}(x-1)(x+3)$ *ou seja as da equação* $x^2 - 2x + 2h - 3 = 0$.

Para que a recta seja secante à parábola é necessário que tenha dois pontos distintos de comum com a parábola e portanto que aquela equação tenha duas raízes reais e distintas o que se obtem determinando h *de modo que o descriminante seja positivo, isto é, que*

$$1 - (2h - 3) > 0 \quad donde \quad h < 2.$$

3445 — *a*) Se for:

$$x = \cos\alpha + \cos 2\alpha$$
$$y = \operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen} 2\alpha$$

prove que $x^2 + y^2 = 2 + 2\cos\alpha$.

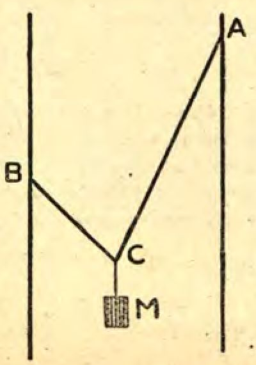
b) Resolva a equação: $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x = 0$. R:

a) *Tem-se* $x^2 + y^2 = \cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2 2\alpha + \operatorname{sen}^2 2\alpha + 2[\cos\alpha(\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha) + \operatorname{sen}\alpha(2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha)] = 2 + 2\cos\alpha$.

b) $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x = 0$ *é equivalente a* $\operatorname{sen} x(1 + \cos x) = 0$ *donde* $\operatorname{sen} x = 0$ *ou* $x = k\pi$, *e* $\cos x = -1/2$ *ou seja* $x = k\pi + (-1)^k 2\pi/3$.

3446 — Um fio está preso a dois postes pelas suas extremidades A e B. Em C fixou-se uma massa M que mantém tensos os segmentos AC e BC.

Sabendo que AC e BC medem respectivamente 20 e 12,6 metros e que a distância entre os pontos A e B é 18 metros, determine a medida do ângulo ACB. (Empregue logaritmos). R: *Como se sabe* $\operatorname{tag} C/2 = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}$ *onde* a, b e c *são as medidas dos lados e* p *o semi-perímetro. Assim teremos*



$$\log \operatorname{tag} C/2 = [\log(p-a) + \log(p-b) + \operatorname{colg} p + \operatorname{colg}(p-c)] : 2 = (\log 12{,}7 + \log 5{,}3 + \operatorname{colg} 25{,}3 + \operatorname{colg} 7{,}3) : 2 = (1{,}10380 + 0{,}72428 + \bar{2}{,}59688 + \bar{1}{,}13668) : 2 = \bar{1}{,}78082$$

e daqui $C/2 = 31^\circ\, 7'\, 10''$ *e portanto* $C = 62^\circ\, 14'\, 20''$.

3447 — *a*) Determine o número N, inferior a 84, que satisfaz às seguintes condições: m. d. c. $(N, 84) = 12$, m. m. c. $(N, 132) = 396$.

b) Calcule o resto da divisão por 5 de 84^{15}.

a) *Pela 1.ª parte do enunciado couclui-se que* $N = 12n < 84$, *logo como* n *é um inteiro só pode ter os valores* 0, 1, 2, 3, 4, 5 *e* 6. *Pela segunda parte deve ser* $Nm = 396$ *ou* $12nm = 396$ *donde* $mn = 33$ *ou* $mn = 3.11$ *e conclui-se que* $n = 3$ *e* $N = 12.3 = 36$. *A solução* $n = 1$, $m = 33$ *não serve por ser m. m. c.* $(12, 132) \neq 396$.

b) *Como* 4 *é o resto da divisão de* 84 *por* 5, *o resto pedido é igual ao resto da divisão de* 4^{15} *por* 5. *Além disso* 4^2 *dá de resto* 1 *quando dividido por* 5, *e o mesmo sucede, portanto, com* $4^{14} = (4^2)^7$, *e daqui se conclue ser* 4 *o resto da divisão de* 84^{15} *por* 5.

Nota — *Esta última questão resolvia-se mais ràpidamente por meio de congruências, notando que* $84 \equiv 4 \pmod 5$ *e que portanto* $84^{15} \equiv 4^{15} \pmod 5$; *além disso por ser* $4^2 \equiv 1 \pmod 5$ *seria* $84^{15} \equiv 4^{15} \equiv (4^1)^7 \cdot 4 \equiv 1 \cdot 4 \equiv 4 \pmod 5$.

Soluções dos n.os 3442 a 3447 de J. da Silva Paulo

Exames de aptidão para frequência do Instituto Superior de Ciências Económicas e Financeiras — Ano de 1952 — 9 de Agosto.

I

3448 — Supondo que os inteiros a, b, x e y satisfazem às condições:

$$\text{m. d. c. } (a, b) = \text{m. d. c. } (b, x) = \text{m. d. c. } (a, y) = 1$$

demonstre que os inteiros $ax + by$ e ab são primos entre si. R: *Demonstremos por redução ao absurdo. Seja* d *um factor primo comum aos inteiros* $ax + by$ *e* ab. *Se* d, *primo, divide* ab *com* a *e* b *primos entre si, por hipótese, divide um dos seus factores. Seja* $a = \dot{d}$. *Então será* $ax = \dot{d}$ *e, por ser* $ax + by = \dot{d}$, *como supuzemos terá que ser tambem* $by = \dot{d}$ *o que é absurdo visto que sendo* b *e* y *primos com* a, *por hipótese, não admitem divisor algum de* a. (*Raciocínio análogo se tivéssemos suposto* $b = \dot{d}$).

3449 — Calcule o resto da divisão por 7 de 18^{1000}. R: *Por ser* $18^{1000} = (\dot{7} + 4)^{1000} = \dot{7} + 4^{1000} = \dot{7} + 4 \cdot 4^{999} = \dot{7} + 4 \cdot 2^{1998} = \dot{7} + 4 \cdot (2^3)^{666} = \dot{7} + 4 \cdot (\dot{7} + 1) = \dot{7} + 4$, *o resto pedido é* 4.

II

3450 — Defina combinações simples de n elementos k a k e verifique a seguinte identidade

$$k \cdot C_k^n = n \cdot C_{k-1}^{n-1} \qquad (n \geqslant k).$$

R: *Com efeito, é*

$$k \cdot C_k^n = k \cdot \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}$$

e

$$n \cdot C_{k-1}^{n-1} = n \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!},$$

com $n \geqslant k \geqslant 1$.

3451 — Dado o trinómio $f(x) = x^2 - 2x + k^2 + k$ determine k de modo que o trinómio seja maior do que $\frac{1}{2}$, *seja qual for o valor real atribuído a* x.

R: *Terá que ser* $f(x) - 1/2 > 0$ *qualquer que seja* x *real. Por ser positivo o coeficiente do termo em* x^2 *bastará que se tenha* $\Delta = 6 - 4k^2 - 4k < 0$ *ou* $-(1+\sqrt{7})/2 < k < (-1+\sqrt{7})/2$.

III

3452 — Verifique a seguinte identidade

$$\operatorname{cotg}(x+y) = \frac{\operatorname{cotg} x \cdot \operatorname{cotg} y - 1}{\operatorname{cotg} x + \operatorname{cotg} y}.$$

R: *Se em*

$$\operatorname{cotg}(x+y) = \frac{1}{\operatorname{tg}(x+y)} = \frac{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}$$

substituirmos $\operatorname{tg} x$ *por* $\frac{1}{\operatorname{ctg} x}$ *e* $\operatorname{tg} y$ *por* $\frac{1}{\operatorname{cotg} y}$, *fica provada a identidade.*

3453 — Calcule os ângulos positivos e inferiores a 360° que satisfazem à igualdade

$$\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) = 0.$$

R: *A equação proposta é equivalente a* $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \operatorname{tg} 3x = 0$ *ou* $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{tg}(-3x)$ *donde* $x + \frac{\pi}{3} = n\pi - 3x$ *ou* $x = \frac{(3n-1)\pi}{12}$ (n *inteiro*). *As soluções pedidas são as que correspondem aos valores inteiros de* $1 \leqslant n \leqslant 8$ *e que são:* $\pi/6$, $5\pi/12$, $2\pi/3$, $11\pi/12$, $7\pi/6$, $17\pi/12$, $5\pi/3$ *e* $23\pi/12$.

Soluções dos n.os 3448 a 3453 de Orlando M. Rodrigues

Exames de aptidão para frequência do Instituto Superior Técnico e Faculdade de Engenharia do Porto — Ano de 1952 — 9 de Agosto.

3454 — Resolva a equação

$$x - \frac{5(x-1)^2}{6} = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{x}{2}\right)^2 + 1$$

determinando os valores das incógnitas expressos em números decimais com a aproximação até milésimas. R: *A forma canónica da equação dada é* $11x^2 - 36x + 26 = 0$. *As raízes são* 2,196 *e* 1,076.

3455 — Determine a ordem do termo que não contém x do desenvolvimento de $(x + 1/x^2)^{21}$ sem fazer este desenvolvimento. Determine a seguir o valor daquele termo. R: *O termo de ordem* $p+1$ *é*

$$T_{p+1} = \binom{21}{p} \frac{1}{x^{2p}} x^{21-p} = \binom{21}{p} x^{21-3p}.$$

Deverá ser $21 - 3p = 0$, $p = 7$. *O termo pedido, que é o oitavo, é* $T_8 = \binom{21}{7}$.

3456 — Simplifique a fracção

$$\frac{x^2 - x + (x-1)\sqrt{2}}{x^2 - 2x - (x+1)\sqrt{2}}.$$

R: *Os zeros do numerador são* 1 *e* $-\sqrt{2}$. *Nenhum dos zeros do numerador anula o denominador, pelo que a fracção é irreductível.*

3457 — Diga qual o maior número de circunferências que podem ser determinadas por 15 pontos complanos onde há 5 que estão sobre a mesma circunferência. R: *Supondo que não há qualquer grupo de* 3 *pontos colineares, será*

$$\binom{15}{3} - \binom{5}{3} + 1.$$

3458 — Determine os valores de m para os quais a equação $2(m-1)x^2 - (m^2 - 28)x - 7m^2 = 0$ tem uma raíz positiva e outra negativa sendo aquela a maior em valor absoluto. R: *Representando por* P *e* S, *respectivamente, o produto e a soma das raízes teremos* $P < 0$ *e* $S > 0$. *Isto é:* $\frac{7m^2}{2(1-m)} < 0$ *e* $\frac{m^2 - 28}{2(m-1)} > 0$ *donde* $m > \sqrt{28}$.

Soluções dos n.os 3454 a 3458 de Laureano Barros