ANO XIII — N.º 51 **GAZETA DE MATEMÁTICA** ABRIL — 1952

REDACTOR PRINCIPAL: *M. Zaluar* • EDITOR: *Gazeta de Matemática, Lda.* • ADMINISTRADOR: *A. Sá da Costa*

REDACTORES ADJUNTOS: *J. Gaspar Teixeira, J. Morgado e J. da Silva Paulo*

Composto na Tipografia Matemática, Lda. — R. Almirante Barroso, 20, rc — LISBOA-N

Sur la distance d'un point variable à un ensemble fixe

par **Lucien Chamard** *

1.—Soit M un point extérieur à un ensemble donné E. La plus grande sphère ouverte centrée en M et disjointe de E (ou sphère d'appui de E centrée en M) a pour rayon ρ, la distance de M à E, et se note S_M^ρ. Les points de E situés à la surface de S_M^ρ sont des projections de M sur E et constituent l'ensemble fermé $\varpi(M)$. Quant aux segments rectilignes qui joignent M à ses projections, ce sont les projetantes de M sur E et leur faisceau se note $\Phi(M)$. Mx désignant une demi-droite issue de M et extérieure à $\Phi(M)$, [1] le plus grand cône de révolution indéfini et ouvert d'axe Mx et disjoint de $\Phi(M)$ est le «cône d'appui» de $\Phi(M)$ axé sur Mx et son demi-angle au sommet φ est la «distance angulaire» de Mx à $\Phi(M)$. Il se note Γ_M^φ.

2. — Considérons deux points M et M' situés respectivement aux distances ρ et ρ' de E. Selon le système de notations sus-indiqué $\Phi(M)$ et $\Phi(M')$ désignent respectivement les faisceaux de projetantes de ces deux points, tandis que $\varpi(M)$ et $\varpi(M')$ sont les ensembles de leurs projections.

Théorème I. $\Phi(\mathrm{M})$ *et* $\Phi(M')$ *sont respectivement du même côté au sens large* [2] *que le point correspondant par rapport au plan radical des deux sphères* S_M^ρ *et* $S_{M'}^{\rho'}$.

Celà est évident si S_M^ρ et $S_{M'}^{\rho'}$ son disjointes, puisque $\varpi(M)$ appartient à S_M^ρ, $\varpi(M')$ à $S_{M'}^{\rho'}$ et que le plan radical de deux sphères sans point intérieur commun les sépare. Si les deux sphères S_M^ρ et $S_{M'}^{\rho'}$ ont des points communs, le plan radical sépare encore les parties des sphères non communes, parties qui portent respectivement $\varpi(M)$ et $\varpi(M')$.

Dans ce dernier cas, c'est-à-dire si $MM' < \rho + \rho'$, on peut présenter la proposition précédente sous la forme suivante:

Théorème I'. $\Phi(\mathrm{M})$ *et* $\Phi(\mathrm{M}')$ *sont respectivement de même côté que* M *et* M' *par rapport à la surface du cône de révolution qui a pour sommet le milieu* I *de* MM', *pour axe* IM [3] *et pour demi-angle au sommet l'angle* ω *définit par*

$$\cos\omega = -\left[\frac{|\rho'-\rho|}{\overline{MM'}} \cdot \frac{(\rho+\rho')}{\sqrt{2(\rho^2+\rho'^2)-\overline{MM'}^2}}\right].$$

En effet, la surface du cône en question, qui passe par le cercle commun aux surfaces des deux sphères, sépare $\varpi(M)$ et $\varpi(M')$ au même titre que le plan radical et laisse M du côté de $\varpi(M)$ et M' du côté de $\varpi(M')$.

Cas particulier: Pour $\rho = \rho'$, les deux propositions précédentes s'identifient avec la proposition que M. Georges Durand a donnée sous la dénomination de Lemme des deux points [4].

On sait que les faisceaux de projetantes jouissent de la semi-continuité supérieure d'inclusion ou $\overline{SCI}$ [5], c'est-à-dire que si M' tend vers M,

* Docteur-ès-Sciences, Professeur à l'École William Ponty, Sébikotane, et chargé du cours de Mathématiques du S. P. C. N. à l'Institut Universitaire de Dakar.

(1) Si $\Phi(M)$ ne remplit pas $\overline{S_M^\rho}$ c'est-à-dire la fermeture de S_M^ρ.

(2) «au sens large» signifie que $\varpi(M)$ [ou $\varpi(M')$] peut avoir tout ou partie de ses points dans le plan radical des deux sphères.

(3) Dans le cas où $\rho' > \rho$.

(4) Georges Durand, «Sur une généralisation des Surfaces Convexes» Thèse, Paris, 1931 ou *Journal de Math. pures et appliquées*, 9.e série, Tome X. Année 1931. Fasc. n.º 4, Chap. I, § 16, p. 347.

(5) Georges Bouligand. *Introduction à la Géométrie Infinitésimale Directe*, N.º 77.

l'accumulatif de $\Phi(M')$ est inclus dans $\Phi(M)$. Cette propriété associée au théorème I', m'a conduit à ce résultat

Théorème II. — *Soit* Mx *une demi-droite issue d'un point* M *extérieur à un ensemble* E, *demi-droite elle-même extérieure au faisceau des projetantes de* M. *On peut trouver une suite* $\{M_i\}$ *de points tendants vers* M, *admettant* Mx *comme demi-tangente unique et telle que l'accumulatif des faisceaux de projetantes* $\Phi(M_i)$ *est formé de projetantes de* M *situées à la surface du cône d'appui* $\Gamma^{\varphi}_{M_x}\Phi(M)$ *axé sur* Mx.

Démonstration du Théorème II: Du Théorème I et de la $\overline{S.C.I.}$ des projetantes, on déduit immédiatement ce résultat: L'accumulatif des faisceaux de projetantes pour *toute* suite de points admettant Mx comme demi-tangente unique appartient au sous-faisceau des projetantes de M qui se trouvent sur la surface du cône d'appui de $\Phi(M)$ qui a pour axe Mx, et pour demi-angle au sommet φ et pour notation Γ^{φ}_{Mx}.

Nous allons démontrer que *toute* projetante MA de M située sur la surface de Γ^{φ}_{Mx} appartient à l'accumulatif des projetantes de *quelque* suite de points admettant Mx comme demi-tangente unique. Celà est évident si M n'a qu'une projetante sur la surface de Γ^{φ}_{Mx} et, en particulier, si M est un point ordinaire (doué d'une seule projetante sur E).

Mais supposons que M ait plus d'une projetante sur la surface de Γ^{φ}_{Mx} et considérons l'une d'elles, soit MA. Toute demi-droite issue de M et située dans l'angle $A\widehat{M}X$ est l'axe d'un cône d'appui de $\Phi(M)$ ne portant pas d'autre projetante de M que MA sur sa surface.

MA appartient donc à l'accumulatif des projetantes de toute suite de points admettant une demi-droite quelconque de l'angle $A\widehat{M}x$ comme demi-tangente unique. Considérons, dans l'angle $A\widehat{M}x$, une suite de demi-droites $\{Mx\}_{i=1,2,3,\cdots}$ définie par $(Mx\widehat{,}Mx\,i)=\dfrac{\varphi}{2^i}$ et soit $\sigma^{\varepsilon_i\,\eta_i}_{M_i\,x_i}$ un secteur sphéro-conique de sommet M, d'axe Mx_i, de rayon ε_i et de demi-angle au sommet η_i. Le rayon ε_1 est arbitraire et $\varepsilon_i=\dfrac{\varepsilon_1}{2^{i-1}}$ tandis que $\eta_i=\dfrac{\varphi}{2^{2+i}}$.

Chaque secteur sphéro-conique $\sigma^{\varepsilon_i\,\eta_i}_{Mx_i}$ contient des points dont l'accumulatif des projetantes, pour i donné, contient MA. On peut choisir dans $\sigma^{\varepsilon_i\,\eta_i}_{Mx_i}$ un point Mi de telle sorte que la suite $\{Mi\}$ admette Mx comme demi-tangente unique. Chaque point Mi de la suite se projette sur un voisinage $\mathfrak{A}_i$ de A, d'après la $\overline{S.C.I.}$ et le raisonnement complémentaire que nous venons de donner. Lorsque i parcourt la suite des entiers, M_i tend vers M suivant Mx et l'accumulatif de ses projetantes comprend visiblement MA puisque le voisinage $\mathfrak{A}_i$ est évanescent.

Notons que, d'après le Théorème précédent, φ n'est autre que l'angle ω de la formule du Théorème I' lorsque M' tend vers M en même temps que ρ' tend vers ρ.

$$\cos\varphi=-\left[\lim\frac{|\rho'-\rho|}{MM'}\cdot\frac{2\rho}{\sqrt{4\rho^2}}\right]=-\left[\lim\frac{|\rho'-\rho|}{M'M}\right]$$

on en déduit que $-\cos\varphi$ n'est autre que la dérivée de la fonction de point $\rho(M)$ dans la direction Mx.

On retrouve donc là un résultat déjà établi par M. de Misès [6] qui n'a pas dégagé le rôle de la notion purement géométrique de cône d'appui des faisceaux des projetantes.

4. — On sait que, pour une fonction $\rho(M)$ admettant des surfaces de niveau douées d'une normale en chaque point, le gradient en M est un vecteur dont la direction orientée, normale à la surface de niveau qui passe par M, est celle de l'accroissement B «le plus rapide» de $\rho(M)$, ou mieux celle de l'accroissement de $\rho(M)$ qui correspond au déplacement rectiligne MM' le plus court.

La fonction $\rho(M)$ qui fait l'objet de la présente étude a des ensembles de niveau qui n'ont pas partout le caractère de surface; de plus, de même en leurs parties superficielles, ces ensembles de niveau ne sont pas, en général, doués d'une normale en chaque point; enfin il se peut qu'en certains points de ces parties superficielles la fonction ne puisse croître.

Pour être sûr qu'un point M ait ses environs superficiels sur l'ensemble de niveau F_ρ qui le porte et qu'en ce point la fonction $\rho(M)$ puisse croître nous nous limiterons à la partie de F_ρ qui mérite le nom de frontière extérieure pour l'ensemble ouvert des points situés à une distance de E moindre que ρ [7]. Une telle frontière est formée de

(6) R. de Misès. *La base géométrique du Théorème de* M. Mandelbrojt. Comptes-rendus de l'Acad. des Sc. de Paris. 205-1937, pp. 1353, 1355.

(7) Un point de la frontière extérieure d'un ensemble est un point de la frontière de cet ensemble qui est aussi point d'accumulation de points extérieurs à l'ensemble.

points (α) et éventuellement de certains points (β). [8]

Si M est un point (α), il existe pour $\Phi(M)$ un «cône d'appui maximal» unique [9] Γ^{θ}_{M}, dont le demi-angle au sommet θ est le maximum de l'angle φ introduit dès le début de cette étude. Pour un point (α), θ est obtus. Dans la direction Mz, la dérivée de $\rho(M)$ est $-\cos\theta = \max \lim\limits_{M'\to M} \frac{\rho(M')-\rho(M)}{MM'}$.

Si M est un point (β), il convient de remarquer de suite que $\theta = \frac{\pi}{2}$ et que

$$\max \lim_{M'\to M} \frac{\rho(M')-\rho(M)}{MM'} = 0$$

et qu'il peut exister plus d'un cône d'appui maximal pour $\Phi(M)$. Les axes des cônes d'appui en question remplissent un angle plan dont la mesure peut prendre n'importe quelle valeur entre 0 et 2π inclusivement ou bien encore sont deux demi-droites oposées.

Ce qui précède justifie la définition suivante:

Définition: *On appele «gradient» (généralisé) de la fonction* ρ (M) *en un point* M *le collectif des vecteurs dont la direction orientée est celle de tout cône d'appui maximal de* Φ (M) *et dont la longueur est le cosinus du supplément du demi-angle au sommet de ce cône d'appui maximal.*

En un point (α) le gradient se réduit à un vecteur unique de longueur inférieure ou égale à 1 (l'égalité est atteinte pour un point ordinaire, c'est-à-dire doué d'une seule projetante).

En point (β) où $\rho(M)$ peut croître, le gradient, formé de vecteurs nuls ne se manifeste plus que par les directions de ces vecteurs.

En un point (β) où $\rho(M)$ ne peut croître ou bien en un point (γ) le gradient n'existe pas.

5. — On sait qu'en Analyse classique on considère les lignes de forces ou lignes de gradient définies par le fait qu'en chacun de leurs points elles sont tangentes au gradient de la fonction de point envisagé. Dans le cas de la fonction $\rho(M)$, on doit considérer plus généralement les «ensembles de gradients» caractérisés par le fait que leur contingent postérieur est, à chaque point, formé par le gradient de $\rho(M)$ au même point.

J'ai pu établir le résultat suivant:

Théorème III — *L'ensemble de gradient de la fonction distance* ρ (M) *issu* [10] *du point* M *est formé de points de multifurcation si* M *est lui-même un point de multifurcation.*

En effet, considérons l'ensemble de niveau F_ρ $(\rho' > \rho)$ et la sphère d'appui $S^{M\,M'}_{M}$ de $F_{\rho'}$ centrée en M. MM' est la plus petite distance de M à $F_{\rho'}$, donc le rapport $\frac{\rho(M')-\rho(M)}{MM'}$ est, grâce au fait que M' est une projection de M sur $F_{\rho'}$, aussi grand que possible. Je dis que, si M est un point de multifurcation il en est de même de M'. En effet, supposons pour un instant le contraire, c'est-à-dire que M' soit ordinaire et soit $M'A'$ la projetante de M' sur E. La sphère $S^{M\,M'}_{M}$ passe, comme $S^{A',M'}_{A'}$ par le point M' et doit être incluse dans $S^{A',M'}_{A'}$. Son centre M doit donc être sur le rayon $A'M'$ de $S^{A',M'}_{A'}$ c'est-à-dire sur la projetante $M'A'$ de M'. Mais alors, on sait que tout point situé sur une projetante d'un autre point est ordinaire [11]. M serait donc ordinaire contrairement à l'hypothèse. Aussi nous devons admettre que M' est un point de multifurcation.

Ce fait subsiste quelle que soit la différence $\rho' - \rho$ ou, ce qui revient au même, la proximité des points M et M'.

En résumé, si M est un point de multifurcation et si M' est un point tel que $\frac{\rho(M')-\rho(M)}{MM'}$ conserve une valeur maxima, si petit que soit MM', M' ne cesse pas, dans les mêmes conditions d'être un point de multifurcation, de sorte que la limite de la demi-droite MM' apartient à la fois au gradient de $\rho(M)$ et au ctg postérieur de l'ensemble des points de multifurcation relatifs à l'ensemble E.

C. Q. F. D.

Si M était ordinaire, le gradient de $\rho(M)$ en M serait opposé à la projetante unique et l'ensemble de gradient issu de M serait le prolongement de cette projetante jusqu'à ce qu'on rencontre éventuellement un point de multifurcation.

6. — ρ désignant toujours la valeur de la fonction distance à partir de laquelle on définit les ensembles de gradient, si on fait tendre ρ vers zéro, on s'aperçoit qu'au départ de E, les points frontaux de E, c'est-à-dire les points de E qui livrent passage à la surface d'une sphère d'appui non nulle, se comportent comme des points ordinaires tandis que les autres sont «comme» des points de multifurcation.

---

(8) Un point (α) est un point par lequel passe un plan d'appui du faisceau de ses projetantes ne portant aucune de ces projetantes. Un point (β) admet encore un plan d'appui pour ses projetantes mais ce plan d'appui contient obligatoirement deux d'entre elles. Un point (γ) n'a pas de plan d'appui de projetantes.

(9) Cette unicité s'établit par un raisonnement analogue à celui qu'on trouve dans l'ouvrage de M. T. Bonnesen «*Les Problèmes des Isopérimètres et des Isépiphanes. Collection des Monographies sur la Théorie des Fonctions.* Paris. Gauthier-Villars. 1929. Chap. III, N.º 25, p. 44.

(10) J'entends par là que je ne considère sur cet ensemble que des points situés à une distance de E supérieure à la distance ρ du point M.

(11) G. Bouligand. *Introduction à la Géométrie Infinitésimale Directe,* Paris, Vuibert, 1932, Chap. XII, N.º 91, p. 93.