Exemplo de conjunto não mensurável à Lebesgue

por **Ruy Luís Gomes**

Dado o grande interesse teórico deste assunto, por um lado, e por outro a circunstância de não ser considerado senão em bibliografia ainda hoje pouco acessível aos estudantes das nossas Universidades, pareceu-nos útil trazer ao conhecimento dos leitores da «Gazeta de Matemática» um exemplo simples de conjunto não-mensurável.

E fazemo-lo transcrevendo, acrescentado de todas as demonstrações, o *capítulo VII, intitulado Non-Measurable Sets, das lições dadas por J. von Neumann no Institute for Advanced Study, Princeton, nos anos lectivos de 1933-34 e 1934-35* [1].

Trata-se da exposição de um dos maiores matemáticos da actualidade e até do ponto de vista didático se impõe com um modelo de clareza e de simplicidade.

E nada mais é preciso invocar para justificar a sua publicação nesta revista.

Demonstração da existência de conjuntos não-mensuráveis à Lebesgue

DEFINIÇÃO 1. *Dado um conjunto* M *de números reais diz-se que o número* a *é um período de* M *se* $(x+a) \in M$ *quando e só quando* $x \in M$.

Segundo esta definição, zero é sempre um período de qualquer conjunto M de números reais.

TEOREMA 1. *Designemos por* P *o conjunto dos períodos de* M. P *é um grupo aditivo.*

Dem. Basta provar que P contém, com a e b, $a-b$. Ora, escrevendo

$$(x+(a-b))+b=x+a$$

e notando que a e b são, por hipótese, períodos de M, imediatamente se deduz que $a-b$ é um período.

THEOREMA 2. *Seja* P *o conjunto dos períodos de* M. *Há-de realizar-se uma destas três hipóteses*: 1) P *só contém o período* 0; 2) P *contém um período mínimo, positivo,* a, *e todos os seus elementos são múltiplos inteiros,* na, *de* a; 3) P *é denso no conjunto,* R, *dos números reais.*

Dem. Se P contém um período diferente de zero, é evidente que contém um período positivo, por isso mesmo que P é um grupo aditivo. Designemos, então, por a o infimo dos períodos positivos de P e suponhamos, como primeira hipótese, que esse ínfimo é o menor dos períodos positivos de P.

Seja b outro período qualquer. Existe um inteiro e um só, n, tal que $n \leqslant b/a < n+1$, donde $0 \leqslant b-an < a$. Ora, como $b-an$ também é um período e não-negativo, terá de ser $b-an=0$ ou $b=an$, pois a é o menor dos períodos positivos.

Suponhamos, finalmente, que P não admite mínimo positivo, mas designemos $\bar{a}$ o ínfimo dos períodos positivos de M. Pela definição de ínfimo, existe um período positivo b tal que $\bar{a}<b<\bar{a}+\varepsilon$ e, consequentemente, um outro período positivo c tal que $\bar{a}<c<b$. Segue-se daqui que $0<b-a<\varepsilon$, sendo $b-a$ um período positivo de M. Dados, então, dois números quaisquer $\alpha<\beta$ é sempre possível arranjar um período positivo $a'<\beta-\alpha$, donde $a'+\alpha<\beta$. Depois, determinemos o inteiro n tal que

$$(n-1)\,a' \leqslant \alpha\,, \quad \alpha < n\,a'\,.$$

Virá

$$\alpha < na' = (n-1)\,a' + a' \leqslant \alpha + a' < \beta\,,$$

como se pretendia demonstrar.

DEFINIÇÃO 2: *Seja* M *um conjunto de números reais e representemos por* I_{ab} *o intervalo semi-aberto* $a \leqslant x < b$. *Definimos* $f(a,b)$ *como* $\mu_e(I_{ab}M)$, *sendo* μ_e *a medida exterior*-L.

É imediato que $f(a,b)$ é finito, não-negativa e $f(a,b) \leqslant \mu(I_{ab}) = b-a$.

TEOREMA 3: *Dados três números* $a<b<c$ *tem-se* $f(a,c)=f(a,b)+f(b,c)$.

Para fazer a demonstração começamos por recordar o seguinte

LEMA: *Todo conjunto aberto* G *se pode escrever como soma de uma sucessão monótonamente ascendente,* $\{M_k\}$, *de conjuntos fechados tais que*

$$\rho\,(M_k\,,1-M_{k+1}) > 0\,.$$

Com efeito, como $1-G$ é fechado, se o ponto P pertence a G, $d(P,1-G)>0$ e inversamente. Consequentemente, $G=\Sigma M_k$, sendo M_k o conjunto dos

---

[1] JOHN VON NEUMANN — *Functional Operators*, Vol. I: *Measures and Integrals*, Princeton University Press, 1950.

pontos de G tais que $\rho(P, 1-G) \geqslant \frac{1}{k}$. E é evidente que $M_k \subset M_{k+1}$ e $M_k = \overline{M}_k$, pois $\rho(P, 1-G)$ é uma função contínua em ordem a P.

Posto isto, representemos por P um ponto de M_k e por a um ponto de $1-M_{k+1}$. Tem-se

$$\rho(Q, 1-G) < \frac{1}{k+1},$$

visto que $a \notin M_k$. Consequentemente, existe um ponto $R \in 1-G$ tal que $\rho(Q, R) < \frac{1}{k+1}$ sendo, por outro lado, $\rho(P, R) \geqslant \frac{1}{k}$.

De $\rho(P, Q) + \rho(Q, R) \geqslant \rho(P, R)$, vem, pois $\rho(P, Q) \geqslant \rho(P, R) - \rho \geqslant (Q, R) > \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)}$, donde finalmente $\rho(M_k, 1-M_{k+1}) = \frac{1}{k(k+1)} > 0$.

Nestas condições, dado um conjunto aberto G de medida finita e um conjunto qualquer M, temos $GM = \sum M_k M = M_k M + M_{k+1} M - M_k M + \cdots$ donde

$$\mu_e(GM) \leqslant \mu(M_k M) + \sum_{p=1}^{\infty} \mu_e(M_{k+p} M - M_{k+p-1} M).$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned}(1) \quad & \mu_e(M_{k+1} M - M_k M) + \mu_e(M_{k+3} M - M_{k+2} M) + \cdots \\ & = \lim_{p=\infty} \{ \mu_e(M_{k+1} - M_k M) + \cdots - \\ & - \mu_e(M_{k+2p+1} M - M_{k+2p} M) \} = \\ & = \lim_{p=\infty} \mu_e(M_{k+2p+1} M - M_k M)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} & \mu_e(M_{k+2} M - M_{k+1} M) + \mu_e(M_{k+4} M - M_{k+3} M) + \cdots \\ (2) \quad & = \lim_{p=\infty} \{ \mu_e(M_{k+2} M - M_{k+1} M) + \cdots + \\ & + \cdots \mu_e(M_{k+2p} M - M_{k+2p-1} M) \} \\ & = \lim_{p=\infty} \mu_e(M_{k+2p} M - M_{k+1} M),\end{aligned}$$

pois os conjuntos que figuram em (1) e em (2), têm entre si distâncias positivas e quando isto se verifica a medida exterior à Lebesgue, μ_e, é aditiva.

Ora, como

$$M_{k+2p+1} M - M_k M \subset GM$$
$$M_{k+2p} M - M_{k+1} M \subset GM$$

segue-se que as duas séries (1) e (2) são ambas convergentes, daí resultando que o mesmo sucede à série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu_e(M_n M - M_{n-1} M),$$

soma das duas anteriores.

Tomando, então, k suficientemente grande, resulta

$$\Sigma \mu_e(M_{k+p} M - M_{k+p-1} M) < \varepsilon,$$

donde $\mu_e(GM) < \mu_e(M_k M) + \varepsilon$,

e, portanto, $\mu_e(GM) \leqslant \lim_{k=\infty} \mu_e(M_k M)$.

Combinando esta desigualdade com

$$\mu_e(GM) \geqslant \lim_{k=\infty} \mu_e(M_k M),$$

consequência imediata de $GM \supset M_k M$, vem

$$\mu_e(GM) = \lim_k \mu_e(M_k M).$$

Ora, sendo

$$I_{ac} = (a, b) + (b, c) + (b)$$

e escrevendo (a, b) e (b, c) como soma dos respectivos conjuntos M_k, vem

$$(a, b) = \Sigma M'_k, \quad (b, c) = \Sigma M''_k,$$

e

$$I_{ac} M = \Sigma M'_k M + \Sigma M''_k M + (b) M$$
$$\begin{aligned}\mu_e(I_{ac} M) &= \lim_k \mu_e(M'_k M + M''_k M) \\ &= \lim_k \mu_e(M'_k M) + \lim_k \mu_e(M''_k M) \\ &= \mu_e(I_{ab} M) + \mu_e(I_{bc} M)\end{aligned}$$

ou

$$f(a, c) = f(a, b) + f(b, c).$$

Teorema 4: *Se* p *é um período do conjunto* M, *então* $f(a+p, b+p) = f(a, b)$.

Na verdade se $x' \in I_{a+p b+p} M$, temos $x' \in M$ e $x' = p + x$, $x \in I_{ab}$. E como p é um período resulta também $x \in M$, quere dizer, $I_{a+p\, b+p} M \subset I_{ab} M$ e inversamente, donde $f(a+p, b+p) = f(a, b)$.

Teorema 5: *Se* $a' \leqslant a$, $b' \leqslant b$, *resulta* $f(a', b') \leqslant f(a, b)$.

Basta atender a que $I_{a'b'} \subset I_{ab}$.

Teorema 6: *Se* M *tem um conjunto de períodos denso em toda a parte, e se* $b - a = b' - a'$, *tem-se* $f(a, b) = f(a', b')$, *de modo que* $f(a, b)$ *é na realidade uma função* $g(b-a)$ *de comprimento de* I_{ab} *exclusivamente.*

Dem. Como $b - a = b' - a'$, vem $b - b' = a - a'$. Determinemos, então, um período p tal que

$$a - a' \leqslant p < a - a' + \varepsilon$$
$$b - b' \leqslant p < b - b' + \varepsilon.$$

Teremos

$$a \leqslant a' + p < a + \varepsilon, \quad b \leqslant b' + p < b + \varepsilon$$

e, em consequência,

$$f(a', b') = f(a' + p, b' + p) \leqslant f(a, b + \varepsilon) \leqslant f(a, b') + \varepsilon.$$

Igualmente teríamos

$$f(a, b) \leqslant f(a' b') + \varepsilon,$$

donde

$$f(a, b) = f(a', b').$$

Daqui por deante suporemos que M admite um conjunto de períodos denso em toda a parte.

Teorema 7: *Dados dois números positivos quaisquer* u, v, g(u) + g(v) = g(u+v).

Dem. Determinemos três nùmeros $a < b < c$, tais que $b - a = u$, $c - b = v \cdot$ Vem $f(a, c) = f(a, b) + f(b, c)$ donde o teorema.

Teorema 8: *Se* k *designa um número racional positivo qualquer, tem-se* g(k u) = k g(u).

Dem. Se k é inteiro, trata-se de uma consequência imediata do teorema 6. Se k é da forma $\frac{m}{n}$, vem

$$g\left(\frac{m}{n} u\right) = \frac{1}{n} n\, g\left(\frac{m}{n} u\right) = \frac{1}{n} g(m u) = \frac{m}{n} g(u).$$

Teorema 9: g(u) = c u, onde $0 \leqslant c \leqslant 1$.

Dem. Pelo teorema 7, vem $0 \leqslant g(u+v) - g(u) = g(v)$ ou $0 \leqslant g(x) - g(y) \leqslant x - y$, com $y = u$, $x = u + v$, donde se conclue que $g(u)$ é uma *função contínua*, de u. Aproximando este resultado do teorema 8, resulta $g(x) = x\, g(1) = c\, x$. Ora, sendo $0 \leqslant f(a, b) \leqslant b - a$, vem $0 \leqslant c \leqslant 1$.

Teorema 10: *Se* g(u) = c u, *então* c = 1, a *menos que* M *seja um conjunto de medida nula e neste caso* c = 0.

Dem. Seja I um intervalo e façamos $m = \mu_e(I M) < \infty$. Em virtude da definição da medida exterior-L podemos cobrir $I M$ com uma família numerável de intervalos abertos, J_i, de comprimento total inferior a $m + \varepsilon$. Consequentemente, $I M \subset J_1 M + J_2 M + \cdots$, $m = \mu_e(I M) \leqslant \mu_e(J_1 M) + \mu_e(J_2 M) + \cdots + \cdots \leqslant c(l_1 + l_2 + \cdots) < c(m + \varepsilon)$, designando por l_i o comprimento de J_i. Mas, sendo $m < c(m + \varepsilon)$, vem $m \leqslant c m$, $0 \leqslant c \leqslant 1$, resulta que $c = 1$, a não ser que $m = 0$. E se $m = \mu_e(I M)$, para todo I, tem-se [1] $\mu_e(M) = 0$.

Teorema 11: *Se* M *tem um conjunto de períodos denso em toda a parte, realiza-se uma destas três hipóteses:* 1) M *tem medida nula*; 2) 1—M *tem medida nula*; 3) $\mu_e(\mathrm{M}) = \mu_e(1-\mathrm{M}) = \infty$ *e* $\mu_i(\mathrm{M}) = \mu_i(1-\mathrm{M}) = 0$.

Dem. Em virtude do teorema anterior, se $\mu_e(\mathrm{M}) \neq 0$, tem-se $c = 1$. Seja, então, N um conjunto mensurável contido em $1 - M$. A definição de conjunto mensurável [2] permite-nos escrever $\mu_e(I(M + N)) = \mu_e(I M) + \mu_e(I N)$, $q \cdot q \cdot$ seja o intervalo I. Portanto, designando por a, b os extremos de I, vem $0 = (b-a) - (b-a) = \mu_e(I) - \mu_e(I M) \geqslant \mu_e(I(M+N)) - \mu_e(I M) = \mu_e(I N)$, donde $\mu_e(I N) = 0$ e depois $\mu_e(N) = 0$. Quere dizer, a medida interior de $1 - M$, $\mu_i(1-M) = 0$.

Sendo assim, ou também é $\mu_e(1-M) = 0$, e, portanto, $1-M$ tem medida nula. Ou $\mu_e(1-M) > 0$. Atendendo ainda a que, pela definição de período M e $1-M$ têm os mesmos períodos, resulta que M tem medida nula ou, então, $\mu_i(M) = 0$ e $(\mu_e(M) > 0$.

Na hipótese, $\mu_e(M) > 0$, $\mu_e(1-M) > 0$, vem, $\mu_i(M) = \mu_i(1-M) = 0$ e, portanto, $\mu_e(M) = \mu_e(I-M) = \infty$.

Em consequência, M e $1-M$ não *são mensuráveis.*

Teorema 12 (*construção de um conjunto* M) *: existem conjuntos não mensuráveis.*

Dem. Definamos no conjunto dos números reais a seguinte relação de equivalência: $x \sim y$ se $x - y =$ racional. E designemos por C_x a classe dos números equivalentes a x. O conjunto dos números reais é evidentemente a soma das classes C_x, e tem-se: 1) a classe C_0 coincide com o conjunto dos números racionais; 2) se x e x' são ambos racionais $C_x = C_{x'}$; 3) se x e x' são ambos irracionais $C_x\, C_{x'}$ é vazio, sendo vazio pois $C_x\, C_{-x}$, para x irracional.

Consideremos agora os pares $[C_x\, C_{-x}]$ em que x é irracional e não façamos distinção entre $[C_x\, C_{-x}]$ e $[C_{-x}, C_x]$. Segue-se daqui que para $x \sim y$ ou $-x \sim y$, $[C_y, C_{-y}]$ não se distingue de $[C_x, C_{-x}]$.

Aplicando então o *axioma de Zermelo* escolhamos um C_x de cada um dos pares distintos $[C_x, C_{-x}]$ e representemo-lo por $C_{\bar{x}}$. Façamos finalmente $C = \sum_{\bar{x}} C_{\bar{x}}$, $\overline{\overline{C}} = \sum_{\bar{x}} C_{-\bar{x}}$. Temos $\overline{C}\, \overline{\overline{C}} = 0$, $C_0 + \overline{C} + \overline{\overline{C}} =$ conjunto dos números reais e $1 - \overline{C} = C_0 + \overline{\overline{C}}$. Por outro lado, cada um dos conjuntos, C_0, $\overline{C}$, $\overline{\overline{C}}$ admite um conjunto denso em toda parte de períodos, a saber a totalidade dos números racionais e àlém disso $\mu(C_0) = 0$.

Se $\overline{C}$ é mensurável o mesmo acontece a $1 - \overline{C}$ e portanto a $\overline{\overline{C}}$ em virtude de $1 - \overline{C} = C'' + C_0$. E sendo $\overline{C}$, $\overline{\overline{C}}$ transformados um do outro por intermédio da simetria $y = -x$ as suas medidas terão de ser iguais. Ora, por força de $C_0 + \overline{C} + \overline{\overline{C}} =$ conj. dos números reais conclue-se que nem $\overline{C}$ nem $\overline{\overline{C}}$ podem ter medida nula. Então, pelo teorema anterior, combinado com $1 - \overline{C} = \overline{\overline{C}} + C_0$, $\mu(C_0) = 0$, vem $\mu_e(\overline{C}) = \mu_e(\overline{\overline{C}}) = \infty$ e $\mu_i(\overline{C}) = \mu_i(\overline{\overline{C}}) = 0$, donde se deduz que $\overline{C}$ e $\overline{\overline{C}}$ são exemplos de *conjuntos não mensuráveis* (de números reais).

---

(1) Basta tomar $\{K_i\}$ tal que $M \subset K_1 + K_2 + \cdots$, pois será $\mu_e(M) = \mu_e(M K_1 + M K_2 + \cdots) \leq \mu_e(M K_1) + \mu_e(M K_2) + \cdots = 0$.

(2) Se A é um conjunto mensurável tem-se $\mu_e(X) = \mu_e(A X) + \mu_e(X - A)$, q. q. seja X (Carathéodory). Basta, pois, aplicar esta igualdade ao caso $X = I(M + N)$, $A = I N$.