ção gráfica de $y=ax$ e $y=ax+b$ em que a e b são valores numéricos. Ainda no 3.º ano, estuda a resolução gráfica da equação numérica do 1.º grau a uma incognita; de um sistema de duas equações numéricas do 1.º grau a duas incognitas e desigualdades inteiras do 1.º grau a uma incógnita. No 7.º ano estuda a resolução gráfica da equação do 2.º grau e a representação gráfica do trinómio do 2.º grau.

Depois de tudo isto, o actual programa intercala o estudo da Trigonometria, seguindo-se depois, finalmente, a Geometria Analítica.

Leia-se, agora, o programa de Geometria Analítica e ver-se-á que é constituido por «easy questions about advanced science...», a que se refere o ilustre APPLETON.

Mas se se quiser que seja dada aos alunos uma ideia da existência da Geometria Analítica, como ramo próprio das ciências matemáticas, bastará que as instruções que acompanhem o programa destinem uma ou duas lições para que o professor apresente uma síntese dos conhecimentos dos anos anteriores que os alunos já possuem desse ramo da Matemática.

MOVIMENTO CIENTÍFICO

CONGRESSO LUSO-ESPANHOL PARA O PROGRESSO DAS CIÊNCIAS — Málaga — 1951

De 9 a 16 de Dezembro de 1951 realizou-se em Málaga o XIV Congresso Luso-Espanhol para o Progresso das Ciências. Juntaram-se naquela cidade espanhola cerca de duzentos intelectuais espanhóis e portugueses, que apresentaram os resultados dos seus trabalhos de investigação e discutiram as matérias que os interessam nos vários ramos da ciência.

A Secção de Matemática reuniu-se sob a presidência do Prof. Alfonso Rey Pastor (Univ. de Madrid) e a vice-presidência do Prof. Diogo Pacheco de Amorim (Univ. de Coimbra), secretariados pelo Prof. Aldeanueva Salguero (Escuela de Peritos Industriales de Málaga). O discurso inaugural foi pronunciado pelo Prof. Almeida Costa (Univ. do Porto), que se ocupou do tema: «História dos domínios multiplicativos associativos».

Os trabalhos apresentados, que, por vezes, suscitaram atentas discussões, foram os seguintes:

1. «La tabulación numérica de ecuaciones», por Juan Garcia.
2. «O teorema de Pohlke e a sua generalização ao caso da projecção central», por Jayme Rios de Souza.
3. «Nuevos metodos nomográficos», por J. Belgrano.
4. «Sobre o conceito de posição», por Renato Pereira Coelho (que se deslocou subsidiado pela Sociedade Portuguesa de Matemática).
5. «Critérios para comparar estimadores», por Sixto Rios.
6. «Estimación de las reservas matemáticas por medio de muestras», por Juan Béjar (comunicação apresentada por Sixto Rios).
7. «Sobre la construcción de funciones continuas no derivables» por Rey Pastor.
8. «Esquemas indefinidos de Poisson», por Diogo Pacheco de Amorim.
9. «Sobre algunas funciones algebraicas relacionadas con la integración sistematica de diferenciales elementales», por Manuel Velasco Pando (comunicação apresentada por Rey Pastor).
10. «Algunos teoremas sobre las funcionales lineales», por San Juan (também apresentada por Rey Pastor).
11. «Modificación del test de Lawley para pequeñas muestras», por Alfonso Guiraum (comunicação lida por Sixto Rios).
12. «Sobre una generalización de las curvas de Pearson», por S. Navarro Sagristá (idem).
13. «Sobre os dois grupos de funções de conjunto de primeira classe e a axiomática dos espaços topológicos mais gerais», por Luís Albuquerque (representante da Sociedade Portuguesa de Matemática).
14. «Las matematicas en la mecanica cuantica», por António López Franco (lida pelo Prof. Iñiguez, vice-reitor da Univ. de Zaragoza).
15. «Sugerencia acerca de la construcción de aparatos para el calculo de integrales dobles y la integración de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias», por J. Belgrano.

Na reunião final das direcções das Associações Espanhola e Portuguesa para o Progresso das Ciências foi resolvido que o próximo Congresso se realizasse em 1953, em Oviedo. L. A.

COLÓQUIO INTERNACIONAL DE GEOMETRIA DIFERENCIAL

Promovido pelo Centro Belga de Investigações Matemáticas realizou-se, em Louvain, em Abril de 1951, um colóquio sobre Geometria Diferencial que reuniu um grupo de especialistas deste ramo da Geometria.

É o terceiro colóquio internacional organizado pelo C. B. I. M. e segue-se aos de Geometria Algébrica e de Topologia das variedades fibradas, que tiveram lugar em 1949 e 1950 e a que a *Gazeta de Matemática* (**43** e **48**) já se referiu.

As comunicações enviadas e conferências feitas foram reunidas em volume* podendo assim delas beneficiar um maior número de matemáticos.

Para dar uma indicação dos assuntos tratados, reproduzimos o índice da publicação:

* *Colloque de Géométrie Différentielle* — C. B. R. M., George Thone, Liège et Masson & Cie, Paris, 1951.

SOBRE OS INSTRUMENTOS MATEMÁTICOS DA ESTATÍSTICA

No Laboratório de Engenharia Civil, M. O. P., foi realizado um curso sobre Instrumentos Matemáticos da Estatística que teve início em 21 de Janeiro e termo em 21 de Março. Foi constituído por 15 lições e regido pelo matemático da instituição.

O curso apoiou-se sobre um outro realizado no Laboratório em Maio e Junho de 1951 para o seu pessoal técnico e sobre trabalho realizado na previsão de comportamentos ligada a problemas de dimensionamento de estruturas e de traçado de especificações. Foi imediatamente motivado por necessidades reveladas no seguimento destes trabalhos; a extensão da possibilidade de frequência a funcionários das Direcções Gerais, nas Universidades, Institutos, etc., surgiu do sentimento da possível utilidade. A justeza do sentimento ficou patenteada pela larga inscrição e sobretudo pela frequência às lições e pelo interesse revelado nos períodos de questões que prolongaram cada exposição.

As lições assumiram a forma de tratamento de vários temas sem preocupação de ligação entre eles e, dentro de cada um, sem intuito de compendiação; o expositor visou muito deliberadamente conceitos e métodos — e não resultados. Em particular, só iniciou uma ou outra demonstração para esclarecer um conceito ou exemplificar um método suspendendo-a onde ou quando o seu fim parecia atingido.

Segue a lista dos temas com a indicação sumária dos números de sessões que cada consumiu e um breve sumário com uma ou outra indicação de método, alcance, ponto de vista, etc.

(I) *Introdução* (1). — Fez-se a justificação do método que iria ser utilizado nas exposições; em particular distinguiu-se o «papel da demonstração na matemática» do «papel da demonstração na exposição da matemática.» Criticou-se certo cepticismo superficial e espectacular que foi moda entre distintos cultores do Cálculo das Probabilidades e que induz o principiante (com os «paradoxos», por exemplo) em divagações extemporâneas e faz de cada um autor duma teoria da probabilidade. Desta maneira se procurou evidenciar o interesse duma axiomática das probabilidades como base capaz para o desenvolvimento do Cálculo das Probabilidades e, principalmente no curso, como introdução útil às meditações sobre a natureza do aleatório a que todo o usuário dedica necessàriamente algum tempo. Desta forma ficou colocado na sua perspectiva o tema Probabilidade e Medida.

(II) *Probabilidade e Medida* (4). — Introduzindo a distribuição uniforme no intervalo (0,1) e um mecanismo adequado, pôs-se o problema da probabilidade dum conjunto de pontos desse intervalo. Por exemplo, considerou-se demoradamente o conjunto ternário de Cantor e procurou-se a sua probabilidade no contexto indicado. A axiomática dos corpos elementares de probabilidade de Kolmogoroff foi o fio condutor que permitiu abandonar a possibilidade duma probabilidade que fosse um «número» por uma que fosse «extensão» e chegar à medida B pela crítica da medida J e à medida S pela generalização da medida L. A axiomática da medida P (Cramér) apareceu como solução do problema posto: a probabilidade é uma medida P.

O problema do valor médio pôs o do integral definido; primeiro à Cauchy, depois à Riemann – Jordan, à Borel e finalmente à Lebesgue – considerando sempre a distribuição uniforme em (0,1). Os integrais de Stieltjes correspondentes apareceram quando nos libertámos desta hipótese e suposemos uma distribuição da massa 1 definida pela sua cumulante, qualquer.

(III) *Distribuições* (4). – Este grupo de lições visou um objectivo duplo: procurou-se a familiaridade com as densidades e cumulantes das distribuições fundamentais e a facilidade no uso das tábuas que permitem o cálculo efectivo. Para tanto partiu-se das distribuições gama e beta (à maneira de Weatherburn, um pouco encurtada talvez) e estabeleceram-se os nexos com a normal, as do χ^2, de t, de z e F, binomial e de Poisson; desta maneira as «Tables of the Incomplete Γ-Function» e as «Tables of the Incomplete B – Function» de Karl Pearson tomaram o lugar central que lhes compete enquanto que pelo caminho ficavam a claro as transformações simples que das funções de Euler levam às densidades e cumulantes referidas. Exemplificou-se com uma estima de parâmetro e um ensaio de hipóteses.

(IV) *Funções Geradoras* (1). – O título e uma breve introdução procuraram avivar o convívio com estes úteis instrumentos e permitiram uma arrumação da função característica. Esta foi porém o centro de interesse; não tanto, de resto, como função geradora de momentos como pelo teorema da inversão apoiado no da característica da soma e nos dos limites.

(V) *A Lei Normal* (2). – Viu-se a chamada lei normal aparecer como um artifício de cálculo em Moivre (1733). Estabeleceu-se de novo como lei de erros que satisfaz a certas condições simples: as de Gauss, modernizadas. E finalmente, na posição de Laplace, como lei do erro resultante para certo tipo de composição dos erros elementares (também sujeitos a condições).

Esclareceu-se (Laplace-Liapounoff) a posição central que a lei de Laplace-Gauss ocupa na teoria das probabilidades e o domínio em que ela aparece em variadas circunstâncias como uma lei assintótica. Acentuou-se, por outro lado os riscos de uma aceitação por grosso da hipótese da normalidade (distribuição de Cauchy, distribuição dos valores extremos).

(VII) *Estatísticas da Distribuição quase Ignorada* (1). – Levantou-se os problemas da existência de distribuição e do tratamento de distribuições sobre as quais só podem afirmar-se, além da existência, propriedades muito gerais. Esclareceu-se com os teoremas fundamentais das estatísticas ordenadas as possibilidades e deu-se um panorama de resultados neste ramo recente e prometedor da estatística.

(VIII) *Estatísticas Ordenadas* (1). — Definiu-se o problema das distribuições exactas e das distribuições assintóticas de estatísticas ordenadas. Considerou-se primeiro o caso dos quantilhos para que se deu a distribuição exacta (conhecida a cumulante) e uma distribuição limite. Terminou-se com as estatísticas de ordem fixa (extremos e outras) pela exposição e crítica da solução de Fisher e Tippet e da de Gumbel.

Em fecho recordou-se que o curso não foi um episódio sem passado nem futuro no trabalho da instituição mas que, muito pelo contrário serviu de ponte obrigatória de uma para outra parte de trabalhos em progresso. Foi referida também a inevitabilidade da organização no nosso meio de certa actividade do tipo *seminário de matemáticas aplicadas* que preste à engenharia a assistência necessária.

NOTICIÁRIO

DOUTORAMENTO NA F. C. L.

Tiveram lugar, em Fevereiro de 1952, na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, as provas para doutoramento em Ciências Matemáticas do assistente do Instituto Superior de Ciências Económicas e Financeiras, José Ribeiro de Albuquerque, nosso querido colaborador.

A tese intitulada «Teoria dos conjuntos projectivos»(1) foi discutida pelo Prof. Doutor José Vicente Gonçalves. Os pontos afixados foram os seguintes: 1 — Formas quadráticas; transformações lineares e invariantes gerais; 2 — Funções simétricas (em geral); funções simétricas das raízes de um polinómio; 3 — Eliminação (polinómios de uma variável); 4 — Raízes imaginárias em equações (inteiras) reais; 5 — Teoremas de redutibilidade (equações de coeficientes inteiros); 6 — Estudo analítico das quádricas regradas; 7 — O problema da intersecção das superfícies em Geometria Descritiva; 8 — Figuras geradas por feixes de planos; 9 — Funções de variação limitada; 10 — As formas quadráticas fundamentais na teoria das superfícies; 11 — Equações lineares às derivadas parciais de 1.ª ordem; 12 — O problema fundamental do Cálculo das Variações.

Os interrogatórios, relativos aos pontos n.os 6 e 12, tirados à sorte, foram feitos, respectivamente, pelos Profs. Doutores J. V. Gonçalves e J. F. Ramos e Costa.

A *Gazeta de Matemática* felicita o Doutor J. Ribeiro de Albuquerque.

(1) *Revista da Faculdade de Ciências*, 2.ª série, A — Vol. 1, págs. 345 a 400, Lisboa, 1951.

CONGRESSO INTERNACIONAL DE MECANICA TEÓRICA E APLICADA

De 20 a 28 de Agosto deste ano realizar-se-á na Universidade de Istambul o 8.º Congresso Internacional de Mecânica Teórica e Aplicada. As comunicações apresentadas serão distribuídas por 5 secções: 1—Elasticidade, plasticidade e reologia; 2 — Mecânica dos fluidos (aerodinâmica e hidrodinâmica); 3 — Mecânica dos sólidos (balística, vibrações, atrito e lubrificação); 4 — Mecânica estatística, termodinâmica e propagação do calor; 5 — Matemáticas da Física e Mecânica e métodos de cálculo.

As línguas oficiais do Congresso são: inglês, francês, alemão e italiano.

A direcção do Secretariado é: P. O. Box 245 — Istambul — Turquia.

PRÉMIO

O «Instituto for the Unity of Science» concederá um prémio de $500 à melhor memória sobre o tema «Mathematical Logic as a Tool of Analysis: Its Uses and Achievements in the Sciences and Philosophy». Dois prémios adicionais de 200 dollars cada serão atribuídos aos dois outros melhores trabalhos. Trata-se duma competição internacional a que todos podem concorrer. Os trabalhos não devem conter mais de 25.000 palavras, podem ser escritos em inglês, francês, ou alemão e têm de ser apresentados antes de 1 de Janeiro de 1953. Para informações mais pormenorizadas dirigir-se a: Institute for the Unity of Science, American Academy of Arts and Sciences, 28, Newbury Street, Boston, 16, Mass. U. S. A.

M. Z.

(De Acta Mathematica» **87**, — Uppsala, 1952)

MATEMÁTICAS ELEMENTARES

Exames de aptidão para frequência das licenciaturas em Ciências Matemáticas, Ciências Físico-Químicas e Ciências Geofísicas, preparatórios para as escolas militares e curso de engenheiros geógrafos — Ano de 1951 — Ponto n.º 2.

3336—Demonstrar que, se os inteiros positivos a e b forem primos entre si, $a+b$ e a^2-ab+b^2 ou são primos entre si ou têm o máximo divisor comum 3. R: *Sabe-se que, se* a *e* b *são primos entre si,* a+b *e* ab *também são. Mas*

$$a^2-ab+b^2=(a+b)^2-3\,ab\,.$$

Vê-se então que todo o divisor comum a a^2-ab+b^2 *e* a+b *é divisor de* 3 ab *e, portanto, só pode ser* 3 *(além de* 1*) visto* a+b *e* ab *serem primos entre si.*

3337 — Considere-se a sucessão dos números primos até p; seja a o produto de alguns desses números, b o produto dos outros; demonstrar que $a+b$ admite um divisor primo superior a p R: *Se* a+b *é primo, a proposição é evidente. Se* a+b *não é primo, admitirá um divisor primo* c *que não pode ser nenhum dos factores de* a *ou* b. *Na verdade, supondo* c *um dos factores de* a, *por ex., seria* $b=\dot{c}$ *(teorema fundamental da divisibilidade), o que é absurdo porque, nestas condições,* c *seria também um dos factores de* b *(se um número primo divide um produto de factores primos é igual a um deles).*

3338 — Demonstrar que $3\cdot 2^{3n+1}+7n-6$, onde n é inteiro positivo, é sempre divisível por 49.

N. B. — Escrevendo $f(n)=3\cdot 2^{3n+1}+7n-6$ calcular $f(1)$, formar a diferença $8f(n)-f(n+1)$ e proceder por indução completa. R:

$$f(1)=3\cdot 2^4+7\cdot 1-6=49$$

$$8\,f(n)-f(n+1)=2^3\,[3\cdot 2^{3n+1}+7n-6]-$$

$$-[3\cdot 2^{3n+4}+7(n+1)-6]=49n-49=\dot{49}\,.$$

Portanto, se $f(n)=\dot{49}$ *também* $f(n+1)=\dot{49}$, *o que demonstra a proposição por indução completa, visto estar verificado que* $f(1)=\dot{49}$.

3339 — Decompor de todos os modos possíveis 1164 em duas parcelas inteiras positivas, múltiplas de 13 e de 29 respectivamente. R: *Sendo* (x_1, y_1) *uma solução inteira positiva da equação* $13x+29y=1164$, *a correspondente solução do problema proposto é*

$$13\,x_1\,,\quad 29\,y_1\,.$$

3340 — Demonstrar que o produto dos n primeiros números ímpares é igual a $\frac{1}{2^n}C_n^{2n}P_n$, onde C_n^{2n} e P_n representam respectivamente o número de combinações de $2n$ objectos n a n e o número de permutações de n objectos. R:

$$\frac{1}{2^n}C_n^{2n}\,P_n=\frac{1}{2^n}\cdot\frac{(2n)!}{n!\;n!}\cdot n!=$$

$$=\frac{1}{2^n}(2n)(2n-1)(2n-2)\cdots(n+2)(n+1)=$$

$$=(2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1$$

atendendo a que $2n-2k=2(n-k)$.