MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAMES DE FREQUÊNCIA E FINAIS

ÁLGEBRA SUPERIOR — MATEMÁTICAS GERAIS

F. C. C. — Álgebra Superior — **2.º Exame de frequência — 1949-50.**

3353 — Discutir e resolver o sistema:

$$x-3y+z-4=0\,,\quad 2x-3y+2z+1=0\,,$$
$$-2x+y-3z-2=0\,,\quad -x+y-\alpha z-3=0\,.$$

3354 — Em que pontos $(x\,,y)$ tem a função

$$f(z)=\frac{1+i\,(z-1)}{2z-i}$$

um valor real? E um valor imaginário puro? Pode prever-se que as linhas obtidas têm um ponto comum? Qual e porquê?

3355 — Seja para a curva $x^2-y^2=1\,,\overline{PQ}$ o segmento de normal em P, entre P e o eixo das abcissas. Determinar e estudar a equação do lugar geométrico dos pontos médios de $\overline{PQ}$.

I. S. A. — Matemáticas Gerais — **1.º Exame de frequência — 15-2-1952.**

3356 — Diga o que entende por série convergente e por soma e resto duma tal série. Enuncie e demonstre o critério de convergência de d'Alembert e o respectivo corolário.

3357 — O que entende por classes contíguas de números racionais? Sendo X uma grandeza positiva e α um número positivo definido por duas classes contíguas H, K de números racionais positivos como se passa da grandeza X para a grandeza αX. Demonstre que dadas duas grandezas A e B positivas existe sempre um número positivo α tal que $A=\alpha B$.

3358 — Deduza a equação da circunferência de centro em $C\,(2{,}1)$ tangente à recta $y-2x-2=0$. Designando por A o ponto em que a recta é tangente à circunferência e por O a origem das coordenadas, escreva a equação do lugar geométrico dos vértices dos triângulos de base OA e de área igual à do triângulo OAC.

3359 — Sabendo que $\cos\frac{\pi}{10}=1-\frac{(\pi/10)^2}{2!}+\frac{(\pi/10)^4}{4!}+\cdots+(-1)^n\frac{(\pi/10)^{2n}}{(2n)!}+\cdots$ calcular $\cos\frac{\pi}{10}$ com êrro inferior a $0{,}01$.

3360 — Calcular:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-3x}}{\sqrt[3]{2x^3+x-1}}$. b) $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+}\dfrac{1}{1+2^{\operatorname{tg}x}}$ e $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}\dfrac{1}{1+2^{\operatorname{tg}x}}$.

3361 — Facultativo — Represente gràficamente o conjunto dos pontos (x,y) que verificam a condição $(3y-xy>2)\cap(y=x)$.

I. S. A. — Matemáticas Gerais — **1.º exame de frequência.**

3362 — Diga o que entende por série absolutamente convergente e demonstre que toda a série absolutamente convergente é convergente. Enuncie e demonstre um teorema relativo a séries de sinais alternados.

3363 — Defina soma de dois números positivos α e β. Demonstre que se for $\alpha=(A\,|\,A')$ e $\beta=(B\,|\,B')$, sendo $A\,,A'$ por um lado e $B\,,B'$ por outro pares de classes contíguas de números racionais, se tem: $\alpha+\beta=(A+B\,|\,A'+B')$.

3364 — Considere a parábola $y^2=6x$ e a recta $y=x+k$. a) Determine o valor de k para que a recta seja tangente à parábola e designe por P o correspondente ponto de tangência. b) Escreva a equação do lugar geométrico dos pontos tais que o quadrado da sua distância a P seja igual à distância à recta $4x-3y+6=0$.

3365 — Calcule, a menos de $0{,}001$, a soma da série $\sum\limits_{0}^{\infty}\dfrac{1}{5^n\,n!}$.

3366 — Calcular a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$;

$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{e^{x(x-1)}}{x^2-2x+1}$ e $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{e^{x(x-1)}}{x^2-2x+1}$.

3367 — Facultativo — Represente gràficamente o conjunto dos pontos (x, y) tais que $(x^2+y^2=1)\cap$ $\cap\,(3x-4y>0)$.

I. S. A. — Matemáticas Gerais — 2.º exame de frequência — Maio 1952.

3368 — Definr os conceitos de máximo e mínimo locais e o de função regular num dado intervalo. Enuncie e demonstre o teorema de Rolle.

3369 — Defina o conceito de assíntota e deduza as fórmulas usuais para a determinação das assíntotas duma curva caso estas existam.

3370 — Estudar a função $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-x-2}$ e representá-la gràficamente.

3371 — Separar as raízes da equação $x^3-3x-1=0$ e determinar uma delas, a menos de 0,01.

3372 — Discutir o sistema $\begin{cases} x+6y+3z=1\\ 4x+15y+pz=2\\ 6x+3py+15z=8.\end{cases}$

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — Exame final — 3 de Outubro de 1951.

3373 — Estude e represente gràficamente a função $y=\dfrac{(a-x)^2}{a+x}$ $(a>0)$. R:

Domínio. $(-\infty, -a)$ *e* $(-a, +\infty)$; $\lim\limits_{x=-\infty} y=-\infty$; $\lim\limits_{y=-a-0} y=-\infty$; $\lim\limits_{x=-a+0} x=+\infty$; $\lim\limits_{x=+\infty} y=+\infty$.

Continuidade. *É contínua em todos os pontos do domínio.*

Traços. *Os pontos* $(a, 0)$ *e* $(0, a)$.

Crescimento. $y=x-3a+\dfrac{4a^2}{a+x}$ *e portanto:* $y'=1-\dfrac{4a^2}{(a+x)^2}$ *que se anula quando* $4a^2=(a+x)^2$ *isto é:* $x_1=-3a$ *e* $x_2=a$. *Função crescente em* $(-\infty, -3a)$; *decrescente em* $(-3a, a)$; *crescente em* $(a, +\infty)$.

Máximos e mínimos. $M(-3a, -8a)$ *e* $m(a, 0)$.

Concavidade. $y''=\dfrac{8a^2}{(a+x)^3}$; $y''<0$ *em* $(-\infty, -a)$ *concavidade negativa;* $y''>0$ *em* $(-a, +\infty)$ *concavidade positiva. Não há inflexão em ponto algum do domínio.*

Assíntotas. *A recta de equação* $x+a=0$ *é assíntota; de* $y=x-3a+\dfrac{4a^2}{a+x}$ *resulta outra assíntota de equação* $y=x-3a$. *As assíntotas de uma curva algébrica, não são, evidentemente, em número superior ao grau da equação da curva (neste caso 2).*

A curva é uma hipérbole.

3374 — Determine a, b, c, d, e, f de tal modo que:

$$f(x)=2x^5-5x^4-5x^2+2x+1\equiv a(x-2)^5+ b(x-2)^4+c(x-2)^3+d(x-2)^2+e(x-2)+f$$

e aproveite o resultado para indicar o número de raízes de $f(x)$ superiores a 2. (Enuncie a regra que lhe permitiu indicar este número de raízes). R: *Forma-se a transformada em* $(x-2)$

	2	−5	0	−5	2	1
2		4	−2	−4	−18	−32
	2	−1	−2	−9	−16	|−31
2		4	6	8	−2	
	2	3	4	−1	|−18	
2		4	14	36		
	2	7	18	|35		
2		4	22			
	2	11	|40			
2		4				
	2	|15				

Temos portanto:

$$f(x)=2x^5-5x^4-5x^2+2x+1= =2(x-2)^5+15(x-2)^4+40(x-2)^3+ +35(x-2)^2-18(x-2)-31.$$

O número de raízes superiores a um número a *não excede o número de variações dos coeficientes da transformada em* $(x-a)$ *e, quando inferior é da mesma paridade.*

Há uma raiz superior a 2.

3375 — Utilize a sucessão de Sturm na contagem e separação das raízes de $x^4+x^3-3x^2+4x-2=0$. R: *Forme-se a sucessão de* Sturm *com o algoritmo conhecido*

$f(x)$	1	1	−3	4	−2
$f_1(x)$	4	3	−6	4	
	−1	6	−12	8	
	27	−54	36		
$f_2(x)$	3	−6	4		

É desnecessário prosseguir no algoritmo das divisões sucessivas, porque a terceira função mantem o sinal em $(-\infty, +\infty)$ *visto ter raízes imaginárias.*

Calculados os limites das raízes (pelo método de Newton*)* $L=1$ *e* $l=-3$*, teremos*:

x	$-\infty$	-3	-2	-1	0	1	$+\infty$
$x^4+x^3-3x^2+4x-2$	+	+	−	−	−	+	+
$4x^3+3x^2-6x+4$	−	−	−	+	+	+	+
$3x^2-6x+4$	+	+	+	+	+	+	+
N.º de variações	2	2	1	1	1	0	0

Confrontando a primeira e última colunas, teremos para resultado da contagem, duas raízes reais; uma raiz no intervalo $(-3, -2)$ *outra em* $(0, 1)$. *Há quatro raízes, duas reais já separadas e duas complexas conjugadas.*

3376 — Quantas funções $y(x)$ define implicitamente a equação $f(x,y)=2x^2+(2-3y)x+y^2-2=0$ nas vizinhanças do ponto $x=1$. Enuncie o teorema de existência. Determine os três primeiros termos do desenvolvimento em série de alguma das funções $y(x)$, atrás definida, na vizinhança do ponto $x=1$. R: *Enunciado do teorema de existência. «Se a função* $f(x,y)$ *se anula no ponto* $P(a,b)$, *isto é:* $f(a,b)=0$; *se numa vizinhança de* $P(a,b)$ *a função é contínua como função de* x; *se numa vizinhança de* P *a função é contínua e monótona como função de* y; *é possível determinar uma vizinhança de* a, *tal que a cada* x *aí tomado, corresponde um e um só* y, *de tal modo que os pares assim associados anulam* $f(x,y)$».

Pode demonstrar-se ainda que, nas hipóteses do teorema enunciado a função $y(x)$ *é contínua em qualquer ponto* x *do seu domínio (a vizinhança de* a *que se determinou) e, por consequência, é representada no plano* xOy *por um arco de curva contínua passando por* $P(a,b)$.

Demonstra-se também que, nas hipóteses do teorema enunciado e supondo ainda que $f(x,y)$ *é diferenciável em* $P(a,b)$ *e com derivada* $f'_y(a,b) \neq 0, \infty$ *a função* $y(x)$ *é diferenciável no ponto* $x=a$; *admite pois aí uma derivada finita dada por* $y'(a)=-\dfrac{f'_x(a,b)}{f'_y(a,b)}$. *Geomètricamente, o arco de curva contínua que representa* $y(x)$ *admite uma tangente ordinária não paralela a* $0y$, *no ponto* $P(a,b)$.

Se a derivada $f'_y(a,b)$ *é contínua no ponto* P, *além de finita não nula, o arco de curva que representa* $y(x)$, *é um arco de curva regular e sem tangente alguma paralela a* $0y$, *em alguma vizinhança de* P.

Fortalecendo as hipóteses do teorema de existência, atrás enunciado, obtem-se: «se a função $f(x,y)$ *é nula no ponto* $P(a,b)$; *se* $f'_x(x,y)$ *é finita em cada ponto de uma vizinhança de* P; *se* $f'_y(x,y)$ *é finita, nunca nula e sempre do mesmo sinal em cada ponto de outra viziuhança de* P: *então* $f(x,y)=0$ *define uma e só uma funçõo* $y(x)$ *na vizinhança de* $x=a$».

Fortalecendo ainda mais as hipóteses obtem-se finalmente um teorema de existência de uso corrente: «se $f(x,y)$ *é nula no ponto* $P(a,b)$; *se* $f'_x(x,y)$ *é contínua em* P; *se* $f'_y(x,y)$ *é contínua e não nula em* P; *então,* $f(x,y)=0$ *define uma e só uma função* $y(x)$ *em certa vizinhança de* $x=a$».

Para $x=1$ *a função* $f(x,y)=2x^2+(2-3y)x+y^2-2$ *é nula com* $y=1$ *e* $y=2$. *No ponto* $P(1,1)$ *é:* $f'_x=4x+2-3y$ *e* $f'_y=-3x+2y$ *manifestamente contínuas e com* $f'_y(1,1)=-1$. *Há pois uma função* $y_1(x)$ *definida implìcitamente na vizinhança de* $x=1$, *e que vai assumir valores vizinhos de* 1.

No ponto $P(1,2)$ *as derivadas parciais são contínuas e* $f'_y(1,2)=+1$; *há pois uma função* $y_2(x)$ *definida implìcitamente na vizinhança de* $x=1$, *e que vai assumir valores vizinhos de* 2.

O desenvolvimento da primeira função é:

$$y_1(x)=y_1(1)+(x-1)y'_1(1)+\frac{(x-1)^2}{2!}y''_1(1)+\cdots$$

com $y_1(1)=1$; $y'_1(x)=-\dfrac{4x+2-3y}{-x+2y}$

donde $y'_1(1)=3$; $y''_1(x)=$

$$=\frac{(3x-2y)(4-3y')-(4x-2-3y)(3-2y')}{(3x-2y)^2}$$

donde $y''_1(1)=4$.

Portanto: $y(x)=1+3(x-1)+2(x-1)^2+\cdots$

Soluções dos n.ºs 3373 a 3376 do J. Ribeiro de Albuquerque

I. S. T. — Matemáticas Gerais — 1.º exame de frequência ordinário — 23-2-1952.

I

3377 — Determinar a relação que deve existir entre os coeficientes a e b para que sejam reais todas as raízes da equação $\left(\dfrac{i-x}{i+x}\right)^n=a+bi$.

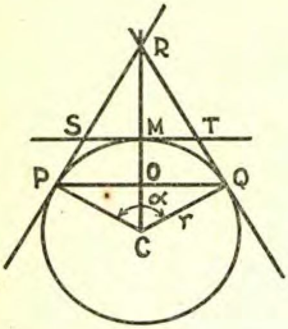
Resolver a equação, nessa hipótese, supondo conhecido o argumento α do complexo $a+bi$. R: *Supondo* x *real, tem-se que o módulo do complexo* $\dfrac{i-x}{i+x}$ *é igual à unidade. A relação entre* a *e* b *é, portanto,* $a^2+b^2=1$. *De* $a+bi=\cos\alpha+i\cdot\operatorname{sen}\alpha$, *vem*

$$\frac{i-x}{i+x}=\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n}+i\cdot\operatorname{sen}\frac{\alpha+2k\pi}{n}=$$
$$=\cos\beta+i\cdot\operatorname{sen}\beta$$

Daqui tira-se:

$$x=\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\operatorname{tg}\frac{\beta+2k\pi}{2n}\quad(k=0,1,2,\cdots,n-1).$$

3378 — Considere um arco de circunferência. Tire tangentes pelo seu ponto médio e pelas extremidades. Seja A a área do triângulo formado pela corda do arco e pelas tangentes nas extremidadades, e B a área do triângulo formado pelas três tangentes. Mostre que $\lim A/B=4$ quando o comprimento do arco tende para zero. R: *A figura mostra-nos que*



$$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}=\frac{\overline{\mathrm{OR}}^2}{\overline{\mathrm{MR}}_1^2}$$

Mas

$$\overline{\mathrm{OR}}=\overline{\mathrm{PO}}\cdot \mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}=$$

$$=\mathrm{r}\cdot \mathrm{sen}^2\,\frac{\alpha}{2}\cdot \sec\frac{\alpha}{2}$$

e

$$\overline{\mathrm{MR}}=\overline{\mathrm{CR}}-\mathrm{r}=$$

$$=2\mathrm{r}\cdot \mathrm{sen}^2\,\frac{\alpha}{4}\cdot \sec\frac{\alpha}{2}\,.$$

Vê-se imediatamente que

$$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}=\frac{\mathrm{sen}^4\,(\alpha/2)}{4\cdot \mathrm{sen}^4\,(\alpha/4)}$$

e daqui resulta

$$\lim_{\alpha=0}\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}=4\,.$$

3379 — Calcular a derivada da função

$$y=(\cos x)^{\frac{1}{\log\cos x}}\cdot(\mathrm{sen}\,x)^{\frac{1}{\log \mathrm{sen}\,x}}+$$
$$+\,\mathrm{ch}\log x+\mathrm{sh}\log x-x\,.$$

Poder-se-ia prever o resultado obtido sem efectuar a derivação? R: *Repare-se que*

$$\mathrm{f}(\mathrm{x})^{\frac{1}{\log \mathrm{f}(\mathrm{x})}}=\mathrm{e}$$

e que $\mathrm{ch}\log \mathrm{x}+\mathrm{sh}\log \mathrm{x}=\mathrm{x}$. *Logo* $\mathrm{y}=\mathrm{e}^2$ *e a sua derivada é nula.*

II

3380 — Mostre que o recíproco dum complexo é igual ao cociente do seu conjugado pela norma comum. Deduza daqui que as potências do mesmo expoente, inteiro, de complexos conjugados são também complexos conjugados.

3381 — Diga se o teorema de Cauchy significará que uma função derivada, contínua num intervalo, toma sempre sinais contrários nos extremos, onde se supõe que a função primitiva tem valores iguais.

Verifique que o teorema de Rolle se pode considerar um caso particular do de Lagrange e que este, por sua vez, está incluido no desenvolvimento duma função pela fórmula de Taylor.

3382 — Estabeleça as propriedades mais importantes da função tangente hiperbólica e represente-a gràficamente. Escreva a sua função inversa sob a forma duma função logarítmica.

I. S. T. — Matemáticas Gerais — 1.º Exame de frequência extraordinário — 29-2-1952.

I

3383 — Dado no plano de Cauchy o afixo dum complexo z, determinar o afixo dum complexo z', tal que $|z'-z|=a\cdot|z|$ e o cociente z'/z seja um imaginário puro (a — número real positivo). Discutir o problema para os diferentes valores de a e interpretá-lo geomètricamente. R: *A segunda condição obriga a ser* $\cos(\alpha'-\alpha)=0$, *ou seja,* $\alpha'=\pi/2+\alpha$ ou $\alpha'=3\pi/2+\alpha$.

Quanto à primeira condição, temos

$$\mathrm{a}\cdot\rho=\sqrt{\rho'^2+\rho^2-2\rho\cdot\rho'\cdot\cos(\alpha'-\alpha)}\ \text{ e }\ \rho'=\rho\cdot\sqrt{\mathrm{a}^2-1}\,.$$

Haverá 2 *soluções para* $\mathrm{a}>1$, *uma solução para* $\mathrm{a}=1$ *e nenhuma para* $\mathrm{a}<1$.

3384 — Dada a função $y=f(x)$, admitindo derivada de 3.ª ordem contínua, calcular

$$\lim_{h=0}\frac{f(x+3h)-3\cdot f(x+2h)+3\cdot f(x+h)-f(x)}{h^3}\,.$$

R: *Desenvolver* $\mathrm{f}(\mathrm{x}+3\mathrm{h})$, $\mathrm{f}(\mathrm{x}+2\mathrm{h})$ *e* $\mathrm{f}(\mathrm{x}+\mathrm{h})$ *pela fórmula de* Taylor, *para* $\mathrm{n}=3$ *e com resto de* Lagrange.

Verifica-se imediatamente que o limite procurado é igual a $\mathrm{f}'''(\mathrm{x})$.

3385 — Mostrar que a função

$$y=x^2\cdot\left(a\cdot\cos\frac{m}{x}+b\cdot \mathrm{sen}\,\frac{m}{x}\right)$$

satisfaz à equação

$$x^4\cdot y''-2x^3\cdot y'+(2x^2+m^2)\cdot y=0\,.$$

R: *Calcule-se*

$$\mathrm{y}'=2\mathrm{x}\cdot(\mathrm{a}\cdot\cos \mathrm{m}/\mathrm{x}+\mathrm{b}\cdot \mathrm{sen}\,\mathrm{m}/\mathrm{x})+$$
$$+\,\mathrm{m}\cdot(\mathrm{a}\cdot \mathrm{sen}\,\mathrm{m}/\mathrm{x}-\mathrm{b}\cdot\cos \mathrm{m}/\mathrm{x})$$

e

$$\mathrm{y}''=2\cdot(\mathrm{a}\cdot\cos \mathrm{m}/\mathrm{x}+\mathrm{b}\cdot \mathrm{sen}\,\mathrm{m}/\mathrm{x})+$$
$$+\,2\,\mathrm{m}/\mathrm{x}\cdot(\mathrm{a}\cdot \mathrm{sen}\,\mathrm{m}/\mathrm{x}-\mathrm{b}\cdot\cos \mathrm{m}/\mathrm{x})-$$
$$-\,\mathrm{m}^2/\mathrm{x}^2\cdot(\mathrm{a}\cdot\cos \mathrm{m}/\mathrm{x}+\mathrm{b}\cdot \mathrm{sen}\,\mathrm{m}/\mathrm{x})\,.$$

Substituindo na equação dada obtém-se uma identidade.

II

3386 — Demonstre que a soma das potências de expoente m das n raízes de índice n da unidade é igual a n se m é múltiplo de n e é nula se m não é múltiplo de n.

Qual será o valor daquela soma para as n raízes de índice n dum complexo?

3387 — Defina ordem dum infinitésimo. Que valores pode ela tomar? Prove que a ordem de $\beta=e^{-x}$ em relação a $\alpha=1/x$, infinitésimos quando x tende para infinito, é um infinitamente grande. Para isso, verifique primeiro que

$$\lim_{x=+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty .$$

3388 — Enuncie as propriedades mais importantes das funções inversas. A função potência transcendente, de expoente maior que a unidade, pode inverter-se? Caso afirmativo, faça um estudo sumário dessa função inversa e represente-a gràficamente.

Enunciados e soluções dos n.os 3377 a 3388 de J. H. Arandes

ERRATA — Exercício 3310, *Gazeta de Matemática*, 49, Outubro de 1951.

O Sr. Eng. Arandes assinala-nos uma incorrecção no exerc. 3310. A abscissa ξ do ponto variável P é dada pela conhecida relação:

$$\xi = \frac{x_B - r x_A}{1-r} = \frac{-2a-(-2)\cdot a}{1-(-2)} = 0 .$$

Anàlogamente, para a ordenada, η, teríamos $\eta = -2a^3$. O lugar geométrico dos pontos P é pois o eixo 0η das ordenadas $(\xi=0)$ e não uma circunferência.

M. Z.

CÁLCULO INFINITESIMAL

F. C. C. — Cálculo Infinitesimal — **2.º Exame de frequência — 1949-50.**

3389 — Extremar a função

$$\varphi(x,y,z) = (p-x)(p-y)(p-z)$$

com $x+y+z=2p$.

3390 — Determinar as trajectórias ortogonais da família de rectas $y-ax+3a=2$.

3391 — Calcular o integral da função $\sqrt{a^2-x^2}$ no intervalo $(a, a\sqrt{3}/2)$.

F. C. C. — Cálculo Infinitesimal — **Exame final de 1949-50.**

3392 — Extremar a função $xy\cdot(x+2y-3)$.

3393 — Resolver a equação diferencial:

$$y^{IV} - y''' - 3y'' + 5y' - 2y = 1620\,(1+x^2)\,e^x.$$

3394 — Considerar a circunferência $x^2+y^2-8y+9=0$ e o sector circular limitado pelo eixo $0y$ e pelo segmento de recta de união do centro da circunferência com o ponto A em que esta curva intersecta a parte positiva do eixo $0x$.

Calcular a área deste sector.

F. C. P. — Cálculo Infinitesimal — **4.º Exercício de revisão — 1950-1951.**

3395 — Dada a linha $y=\log x$ determinar: a) Assíntotas e gráfico da linha; b) A equação da evoluta; c) A circunferência osculadora no ponto $x=\pi/4$; d) O comprimento do arco compreendido entre os pontos $x=0$ e $x=\pi/6$. R:

Assíntotas: $x = \pi/2 + k\pi$, k *inteiro.*

$$\textit{Evoluta:}\ \begin{cases} X = x - \operatorname{tg} x \\ Y = \log\cos x - 1 . \end{cases}$$

Circunferência osculadora:

centro $(x_0 = \pi/4 - 1,\ \ y_0 = -\log 2/2 - 1)$
raio $R = \sqrt{2}$,

$$\textit{equação:}\ \left(X_1 - \frac{\pi}{4} + 1\right)^2 + \left(Y_1 + \frac{1}{2}\log 2 + 1\right)^2 = 2 .$$

Comprimento do arco:

$$s = \int_0^{\pi/6} \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}\,dx =$$

$$= \left[\log\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right]_0^{\pi/6} = \frac{1}{2}\log 3 .$$

3396 — Sendo $\rho = 1 + \operatorname{tg}\theta$ determinar: a) As equações das assíntotas; b) O gráfico; c) A área da região do 4.º quadrante limitada pela linha dada e pela linha $\rho = \cos\theta$. R: *A linha é simétrica com respeito à origem* $\rho(\theta) = \rho(\theta+\pi)$.

Assíntotas: $\rho = \infty$ *para* $\theta_0 = \pi/2$

$$(S_t)_{\theta_0} = \left(\frac{1+\operatorname{tg}^2\theta + 2\operatorname{tg}\theta}{1+\operatorname{tg}^2\theta}\right)_{\pi/2} = 1 .$$

Uma assíntota: $\rho = \dfrac{1}{\cos\theta}$

Outra assíntota (pela simetria referida) $\rho = -\dfrac{1}{\cos\theta}$.

Área:

$$A=\frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{0}\cos^2\theta\,d\theta-\frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{0}(1+tg^2\theta+2\,tg\,\theta)\,d\theta=$$

$$=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}\left[\log 2-1\right].$$

3397 — Determinar as linhas para as quais o comprimento de arco entre um ponto fixo e um ponto corrente seja igual ao quadrado da ordenada desse ponto

$$\int_a^X\sqrt{1+y'^2}\,dx=y^2(X).$$

R:

Derivando em ordem a X *e elevando ao quadrado ambos os membros vem* $1+y'^2=4y^2y'^2$, *ou*

$$(1-\sqrt{4y^2-1}\;y')\,(1+\sqrt{4y^2-1}\;y')=0 \qquad (1)$$

que se desdobra em duas equações diferenciais das quais só integraremos uma

$$1-\sqrt{4y^2-1}\;y'=0. \qquad (2)$$

Separando variáveis e integrando vem

$$\int\sqrt{4y^2-1}\,dy=X+k.$$

Fazendo $2y=\text{ch}\,t$ *vem*

$$\int sh^2t\,dt=\frac{1}{2}(sh\,t\,ch\,t-t)=$$

$$=\frac{1}{2}[2y\sqrt{4y^2-1}-\log(2y+\sqrt{4y^2-1})].$$

O integral geral de (2) *é então*

$$2y\sqrt{4y^2-1}-\log(2y+\sqrt{4y^2-1})- \qquad (3)$$
$$-2x+C=0.$$

O integral geral da outra equação referida e

$$-2y\sqrt{4y^2-1}+\log(2y+\sqrt{4y^2-1})- \qquad (4)$$
$$-2x+C=0.$$

Multiplicando membro a membro (3) *e* (4) *obtem-se a equação das linhas pedidas.*

F. C. P. — Cálculo Infinitesimal — 5.º Exercício de revisão — 1950-1951.

3398 — Calcular $I=\iint_D \rho\,d\rho\,d\theta$ sendo o domínio D limitado pelas linhas $\rho=1+\cos\theta$ e $\rho=2\cos\theta$. R:

$$I=\iint_{D_1}+\iint_{D_2}=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}d\theta\int_{2\cos\theta}^{1+\cos\theta}\rho\,d\rho+$$

$$+\int_{\pi/2}^{3\pi/2}d\theta\int_0^{1+\cos\theta}\rho\,d\rho$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}[(1+\cos\theta)^2-4\cos^2\theta]\,d\theta+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{3\pi/2}(1+\cos\theta)^2\,d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{3\pi/2}(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)\,d\theta-2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2\theta\,d\theta$$

$$=\frac{1}{2}[2\pi+\pi]-\pi=\frac{\pi}{2}.$$

3399 — Considerando a superfície S gerada pela rotação em torno do eixo dos xx do ramo onde $x>0$ da linha $x^2-y^2=1$, determinar: a) a área da zona desta superfície limitada pelo paralelo $x=\sqrt{2}$; b) o volume do sólido limitado pela superfície S e pelo plano do paralelo $x=2$. R:

a) $\quad dA=2\pi\,y\,ds,\quad ds=\sqrt{1+y'^2}\,dx,\quad y'=x/y,$

$A=2\pi\int_1^{\sqrt{2}}\sqrt{2x^2-1}\,dx$. *Fazendo* $\sqrt{2}\,x=\text{ch}\,t$ *vem*

$$A=\frac{2\pi}{\sqrt{2}}\int_{\arg ch\sqrt{2}}^{\arg ch\,2}sh^2t\,dt=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\Big[sh\,t\,ch\,t-t\Big]_{\arg ch\sqrt{2}}^{\arg ch\,2}=$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\left[2\sqrt{3}-\arg ch\,2-\sqrt{2}+\arg ch\sqrt{2}\right]$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\left[2\sqrt{3}-\sqrt{2}+\log\frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{3}}\right].$$

b) $$dV=\pi\,y^2\,dx$$

$$V=\pi\int_1^2(x^2-1)\,dx=\frac{4}{3}\pi.$$

F. C. P. — Cálculo Infinitesimal — 1.º exercício de revisão — 1951-52.

I

3400 — Calcular, a partir da definição, a derivada de $y=x^2\,tg\,x$ para $x=\pi$. R:

$$y'=\lim_{h\to 0}\frac{(\pi+h)^2\,tg(\pi+h)-\pi\,tg\,\pi}{h}=$$

$$=\lim(\pi+h)^2\frac{tg\,h}{h}=\pi^2.$$

3401 — Derivar $y=\sqrt[x]{ch\log_{th\,x}\cos x}$. R:

$$y'=\sqrt[x]{ch\log_{th\,x}\cos x}\left[-\frac{1}{x^2}\log ch\log_{th\,x}\cos x-\right.$$

$$-\frac{1}{x}\,th\log_{th\,x}\cos x\cdot$$

$$\left.\cdot\frac{tg\,x\cdot\log th\,x-coth\,x\cdot(1-th^2x)\log\cos x}{\log^2 th\,x}\right].$$

II

3402 — Determinar a ordem e a parte principal de $\beta = x - \operatorname{sen} x$ com respeito a $\alpha = 1 - \cos x$ para $x \to 0$. R:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\beta}{\alpha^n} = \lim \frac{\frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \cdots}{\left(\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \cdots\right)^n} = \lim \frac{\frac{x^3}{3!}}{\left(\frac{x^2}{2!}\right)^n} = A .$$

Para $n = 3/2$ (*ordem de* β *com respeito a* α) *vem*

$$A = \lim \frac{x^3}{3!}\,\frac{2^{3/2}}{x^3} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\beta = \frac{\sqrt{2}}{3}\,\alpha^{3/2} + \varepsilon$$

ε — *infinitamente pequeno de ordem superior a* $3/2$ *com respeito a* α.

III

3403 — Determinar os máximos e mínimos de $y = \dfrac{(x-1)(x+2)}{x(x+1)}$ e fazer a representação gráfica. R:

$$y' = \frac{4x+2}{x^2(1+x)^2} \quad \left\{ \begin{array}{l} \textit{zeros } x = -1/2 \\ \textit{Pontos de descontinuidade:} \\ \quad x = 0\,,\ x = -1 \end{array} \right.$$

$$y''_{\left(-\frac{1}{2}\right)} = \left[\frac{4}{x^2(1+x)^2}\right]_{-\frac{1}{2}} > 0 \quad \to x = -\frac{1}{2} \quad \textit{mínimo}.$$

Para valores suficientemente pequenos de $h > 0$ *vem*

$$\left.\begin{array}{l} y'_{(-h)} = \dfrac{2-4h}{+\cdots} > 0 \quad \textit{Crescente} \\ y'_{(h)} = \dfrac{2+4h}{+\cdots} > 0 \quad \textit{Crescente} \end{array}\right\} \textit{Crescente}$$

$$\left.\begin{array}{l} y'_{(-1-h)} < 0 \quad \textit{Decrescente} \\ y'_{(-1+h)} < 0 \quad \textit{Decrescente} \end{array}\right\} \textit{Decrescente}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = \pm 0 \ \to y = \mp \infty \\ x = -1 \pm 0 \to y = \pm\infty \\ x = \pm\infty \to y = 1 \end{array}\right\} \textit{Assímptotas} \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -1 \\ y = 1 \end{array}\right.$$

Para $-1 < x < 0 \to y \geqslant f\left(-\frac{1}{2}\right) = 9$

Para $x < -1$ ou $x > 0 \to y < 1$

Para $x = -2$ e e $x = 1 \to y = 0$.

IV

3404 — Calcular $\int \sqrt{2x^2+1}\, dx = I$. R: *Fazendo* $x = \dfrac{\operatorname{sh} t}{\sqrt{2}}$ *vem*

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \operatorname{ch}^2 t \, dt \,. \quad \textit{Integrando por partes}$$

$$I = \frac{1}{2\sqrt{2}} (\operatorname{sh} t \operatorname{ch} t + t) + C$$

$$= \frac{1}{2}\left[x\sqrt{1+2x^2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \arg\operatorname{sh} \sqrt{2}\,x\right] + C$$

$$= \frac{1}{2}\left[x\sqrt{1+2x^2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \log\left(\sqrt{2}x + \sqrt{1+2x^2}\right)\right] + C .$$

3405 — Calcular $\int \sqrt{x^2-4}\, dx = J$. R: *Fazendo* $x = 2 \operatorname{ch} t$ *vem*

$$J = 4\int \operatorname{sh}^2 t\, dt = 2\,[\operatorname{sh} t \operatorname{ch} t - t] + C$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{x^2-4} - 2 \arg\operatorname{ch} \frac{x}{2} + C$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{x^2-4} - 2\log\left(x + \sqrt{x^2-4}\right) + K .$$

Outros problemas saídos:

3406 — Derivar $(\log_{\log x} x)^{\log x}$.

3407 — Calcular a derivada de $\operatorname{sh} x^2$ a partir da definição.

3408 — Desenvolver em série de Mac-Laurin $y = \operatorname{sen}^2 x$ e analisar o resto de Lagrange.

3409 — Determinar os máximos e mínimos de $y = x^2 e^{-x^2}$ e de $y = \dfrac{\cos x}{1 - \cos x}$ e desenhar os respectivos gráficos.

3410 — Calcular: $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{-x^2+2x+4}}\, dx$; $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x+x^2)^2}$; $\displaystyle\int \operatorname{arc\,tg} \sqrt{1+x}\, dx$.

Soluções dos n.os a 3395 a 3410 de Rogério Nunes

I. S. A. — Cálculo Infinitesimal e das Probabilidades — **1.º exame de frequência — Março 1952.**

3411 — Seja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ uma série de potências de variável complexa tal que $\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|} = \dfrac{1}{2}$. Sabe se esta série é convergente para $z = e^{i+\log 2}$? Justifique a resposta.

3412 — Calcule duas das raízes da equação

$$z^6 - 5z^4 - 3z^3 - 5z^2 + 1 = 0 .$$

3413 — Primitive as seguintes funções:

a) $\sqrt[4]{4x-4}\log(x-1)$. b) $\dfrac{\operatorname{arcsen}(7x)}{\sqrt{1-49x^2}}$.

3414 — Calcule uma primitiva da função

$$\frac{(\cos x+1)^3\left(\frac{5}{2}-\operatorname{sen} x+\frac{11}{2}\cos x-14\operatorname{cotg} x+14\operatorname{cosec} x\right)}{(\cos x-1)\,(2+\operatorname{sen} x+2\cos x)^3}$$

Nota: dispensa-se o cálculo dos coeficientes relativos a uma das raízes e pede-se o resultado sob forma real.

I. S. A. — Cálculo Infinitesimal e das Probabilidades — **2.º exame de frequência — Maio 1952.**

3415 — Seja $f(x)=1-2x^2+x^3+\cdots$ e $F(x)$ a primitiva de $f(x)$ que, para $x=0$, toma o valor 1. Escrever os quatro primeiros termos do desenvolvimento de $F(x)$ e os três primeiros termos do de $[F(x)]^2$ em série de potências de x.

3416 — Seja z a função de t e v definida pelas condições $z=x^2+y$, $x=t+u+v$, $y=f(t)$, $u=g(t)$. Calcular $\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2}$ e $\dfrac{\partial^2 z}{\partial t\,\partial v}$ sem efectuar substituição alguma.

3417 — Sendo V o vector $(x-y,x)$ e C o arco da parábola $y=x^2$ desde o ponto $(0,0)$ até ao ponto $(1,1)$, calcular $\int_C VdP$.

3418 — Calcular o volume limitado pelas superfícies $z=x^2+y^2$, $y=x^2$ e $z=1$.

MECÂNICA RACIONAL

F. C. L. — Mecânica Racional — **1.º exame de frequência 1950-51. 1.ª chamada 20-1-951.**

3419 — Produto mixto de três vectores: definição e propriedades.

3420 — Sistemas de vectores equivalentes.

3421 — Centro de um sistema de vectores paralelos: definição e propriedades.

3422 — Movimento central: definição e propriedades. Importância da fórmula de Binet

$$\overline{a}=-\frac{c^2}{r^2}\left(\frac{d^2\,1/r}{dx^2}+\frac{1}{r}\right)\overline{m}.$$

3423 — Dado o plano $\pi\equiv P=O+\overline{e}_1-3\overline{e}_2+5\overline{e}_3+\lambda(2\overline{e}_1-\overline{e}_2+\overline{e}_3)+\mu(4\overline{e}_1+5\overline{e}_2+2\overline{e}_3)$ e a recta $r\equiv Q=O+3\overline{e}_1+2\overline{e}_2+\overline{e}_3+\nu(\overline{e}_1-5\overline{e}_2+\overline{e}_3)$ escrever a equação vectorial do plano normal a π que passa pelas intersecções da recta r com os planos OXY e OYZ. R: *Se o plano* α —•— $\begin{cases} Q_{OXY} \\ Q_{OYZ}\end{cases}$, *sendo* Q_{OXY} e Q_{OYZ} *pontos da recta, o plano pedido* α —•— r.

Sendo $n\perp\pi$ *teremos* $\therefore$ *a equação do plano* $\alpha\equiv M=O+\overline{d}+\zeta\overline{e}+\eta\overline{n}$ $\quad M=O+3\overline{e}_1+2\overline{e}_2+\overline{e}_3+\zeta(\overline{e}_1-5\overline{e}_2+\overline{e}_3)+\eta(-\overline{e}_1+2\overline{e}_3)$.

3424 — É dado no plano OXY o segmento $\overline{AB}$ tendo as duas extremidades sobre os eixos coordenados e fazendo com o sentido negativo de OX o ângulo α. Considere-se um sistema de 4 vectores $\overline{v}_1=-a\overline{e}_1$, $\overline{v}_2=-b\overline{e}_2$, $\overline{v}_3=h\overline{e}_2$, $\overline{v}_4=k\overline{e}_1$ aplicados: $\overline{v}_1$ e $\overline{v}_3$ em A; $\overline{v}_2$ em C (ponto médio de $\overline{AB}$), $\overline{v}_4$ em $\overline{B}$.

Supondo dados os valores de a e b determinar os valores de h, k, e α para que este sistema seja equivalente a zero. R: *Para que o sistema seja equivalente a zero terá de ser* $\begin{cases}\overline{R}=0\\ \overline{G}=0\end{cases}$ *em relação a qualquer ponto do espaço.*

Como $\overline{R}=\overline{v}_1+\overline{v}_2+\overline{v}_3+\overline{v}_4=(-a+k)\overline{e}_1+(h-b)\overline{e}_2$, *em relação ao ponto* A *teremos* $\begin{cases}\overline{R}=0\\ \overline{G}_A=0\end{cases}$

$$\overline{G}_A=(C-A)\wedge\overline{v}_2+(B-A)\wedge\overline{v}_4$$

$$\overline{G}_A=\frac{B-A}{2}\wedge-b\overline{e}_2+(B-A)\wedge k\overline{e}_1.$$

Será então:

$$\begin{cases}(-a+k)\overline{e}_1+(h-b)\overline{e}_2=0 & k=a\\ \dfrac{B-A}{2}\wedge-b\overline{e}_2+(B-A)\wedge k\overline{e}_1=0 & h=b\end{cases}$$

$$\frac{B-A}{2}\wedge b\overline{e}_2=(B-A)\wedge k\overline{e}_1$$

$$\frac{b}{2}\cos\alpha=k\operatorname{sen}\alpha \qquad \alpha=\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{2k}.$$

Resposta: $h=b \quad k=a \quad \alpha=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{b}{2k}$.

3425 — O ponto P descreve a elipse $\frac{p}{1+e\cos\varphi}$ com um movimento central em relação a um dos focos e sendo o módulo da sua velocidade quando passa no vértice mais próximo do foco igual a $1+e$. a) Determinar os módulos da velocidade e aceleração do ponto e a constante das áreas. b) A partir das componentes radial e transversa da velocidade, decompor este vector segundo as perpendiculares ao eixo maior da elipse e ao raio vector. c) Determinar o valor de todas as grandezas indicadas nas duas alíneas anteriores quando o ponto passa na perpendicular ao eixo maior tirada pelo foco. R: a) *Nas condições do enunciado, podemos utilizar as seguintes expressões:*

$$\bar{c}=(P-O)\wedge\bar{v} \quad \textit{como} \ (P-O)=\frac{p}{1+e} \quad e \quad v=1+e$$

obtém-se $c=\frac{p}{1+e}(1+e)\,\text{sen}\,90^\circ=p$

$$v^2=c^2\left[\left(\frac{d\,1/r}{d\varphi}\right)^2+\frac{1}{r^2}\right]$$

$$v^2=1+e^2+2e\cos\varphi \qquad v=\sqrt{1+2e\cos\varphi}$$

$$a=-\frac{c^2}{r^2}\left[\frac{d^2\,1/r}{d\varphi^2}+\frac{1}{r}\right]$$

$$a=\frac{(1+e\cos\varphi)^2}{p}.$$

b) *Designemos por* v_1 *e* v_2 *respectivamente as componentes da velocidade segundo as perpendiculares ao eixo maior e ao raio vector.*

Como $v_t=r\frac{d\varphi}{dt}$ *e* $v_r=\frac{dr}{dt}$ *teremos as seguintes relações*

$$v_1\,\text{sen}\,\varphi=v_r \qquad v_1\cos\varphi+v_2=v_t\,.$$

Mas como $\frac{dr}{dt}=\frac{ce}{p}\,\text{sen}\,\varphi\,,\quad v_1=\frac{ce}{p}$

obtém-se

$$r\frac{d\varphi}{dt}=\frac{c}{p}(1+e\cos\varphi) \quad e \quad v_2=\frac{c}{p}.$$

c) *Neste caso* $p=90^\circ$ *e* $v=\sqrt{1+e^2}\,,\ a=\frac{1}{p}\,,$ $c=p\,,\ v_1=e\,,\ v_2=1\,.$

Soluções dos n.os 3419 a 3425 de J. d'Oliveira Vicente

I. S. T. — Mecânica Racional — 1.º exame de frequência — 16-2-51.

3426 — É dado o campo de vectores

$$\dot{X}=5+z-2y$$
$$Y=2+2x+3z$$
$$Z=7-3y-x\,.$$

Será ele um campo de momentos? Anular-se-á nalgum ponto?

3427 — Conceitos e propriedades das funções harmónicas — Definição do problema de Dirichlet.

3428 — Legitimidade de utilização da série trigonométrica do seno e da série trigonométrica do coseno.

I. S. T. — Mecânica Racional — 1.º exame de frequência extraordinário — 1951.

3429 — Determinar uma curva plana tal que o centro de gravidade da área limitada pelos eixos coordenados, pela curva e pela recta $X=x$, tenha por abcissa $x_1=\frac{ax}{a+x}$. R:

$$\frac{ax}{a+x}=\frac{\int_0^x xy\,dx}{\int_0^x y\,dx}=\frac{x\int_0^x y\,dx-\int_0^x dx\int_0^x y\,dx}{\int_0^x y\,dx}$$

ou

$$(a+x)\int_0^x dx\int_0^x f(x)\,dx=x^2\int_0^x f(x)\,dx$$

derivando duas vezes vem

$$(a-3x)\,y=x^2y'$$
$$\frac{dy}{y}=\frac{dx}{x^2}(a-3x)$$
$$\log y+3\log x=-\frac{a}{x}$$
$$y=\frac{c}{x^3}\,e^{-\frac{a}{x}}\,.$$

3430 — Função de Green. Sua utilização na resolução do problema de Dirichlet.

3431 — Componentes da velocidade e da aceleração dum ponto em coordenadas gerais. — Comparar as componentes da aceleração com os primeiros membros das equações das geodésicas, em cálculo absoluto. E concluir dessa comparação que a grandeza da aceleração, sobre uma geodésica, é $\frac{d^2s}{dt^2}$.

I. S. T. — Mecânica Racional — 2.º exame de frequência — Julho de 1951.

3432 — Integrar as equações do movimento dum sólido com um ponto fixo, no caso em que o ponto fixo é o centro de gravidade do sólido e o elipsoide central de inércia é de revolução. R: *As equações de* Euler *reduzem-se a equações diferenciais de coeficientes constantes cujos integrais são imediatos.*

3433 — a) Princípio de HAMILTON da mecânica einsteineana; b) Verifique que as transformações especiais de LORENTZ formam um grupo.

3434 — a) Classifique os movimentos dum fluido perfeito; b) Num movimento irrotacional, que propriedade deve ter o potencial das velocidades para que a velocicade seja um rotor?

Quais as consequências? R: *Se for* $v = \text{grad}\,\varphi = \text{rot}\,\alpha$ *será* $\text{div grad}\,\varphi = \text{lap}\,\varphi = \text{div rot}\,\alpha = 0$. φ *e função harmónica.*

3435 — Seja $L\,(q_1, q_2, \cdots q_n, z_1, z_2, \cdots z_n, t)$ uma função qualquer dos seus argumentos, admitindo derivadas. E seja $\varphi = L + \sum_1^n \frac{\partial L}{\partial z_h}(q'_h - z_h)$.

Verifique que as equações de estacionaridade do integral 1) $\int_{t_0}^{t_1} \varphi\, dt$ se reduzem às equações de LAGRANGE da função L, com $z_h = q'_h$. R: *As equações de estacionaridade de* 1) *são*

$$\text{a)} \qquad \frac{\partial L}{\partial q_i} + \sum \frac{\partial^2 L}{\partial z_h \partial q_i}(q'_h - z_h) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial z_i} = 0$$

$$\text{b)} \qquad \frac{\partial L}{\partial z_i} + \sum \frac{\partial^2 L}{\partial z_h \partial z_i}(q'_h - z_h) - \frac{\partial L}{\partial z_i} = 0\,;$$

para $z_h = q'_h$ a) *reduz-se ao sistema de* LAGRANGE *e* b) *verifica-se identicamente.*

Soluções dos n.os 3429 a 3435 de J. Gaspar Teixeira

PROBLEMAS

No n.º 49, a Redacção da G. M. anunciou abrir, a partir do presente n.º, duas secções permanentes:

1 — Inquérito aos Leitores.

2 — Concurso de Problemas.

E, desde então, se pedia a todos os Leitores o auxílio de comunicarem à Redacção as suas impressões sobre a orientação actual e futuros melhoramentos a introduzir na nossa Revista—que essas impressões venham sob todas as formas, oral ou escrita, de todos os lados, Continente, Ilhas, Ultramar ou Estrangeiro, e de todos os sectores matemáticos, principiantes, alunos de cursos médios e superiores e professores de Matemática.

Particularmente se dizia: «Mais do que nunca se torna necessário que esses professores apontem qual o caminho a seguir, quais as modificações a fazer na nossa Revista».

Em resposta a este esboço de inquérito, a Redacção recebeu até a data da composição do presente n.º a opinião de dois leitores: JMF de Lisboa e LM dos Açores.

Este facto levanta um novo problema à orientação da *Gazeta*: o do esclarecimento perante os Leitores dos objectivos da Revista:

1 — A G. M. não tem quaisquer intuitos lucrativos; os anúncios não são pagos, os autores dos artigos publicados não recebem um «centavo», quase todos os colaboradores pagam as respectivas assinaturas.

2 — A G. M. «pretende ser um instrumento de trabalho e um guia» para todos os estudiosos de Matemática. Este facto exige uma perfeita e íntima colaboração entre os seus Leitores e Redactores, por forma que estes possam, efectivamente, imprimir a mais útil orientação. Em resumo: A G. M. vive exclusivamente dos seus Leitores e para os seus Leitores; *é necessário pois que sejam estes,* através da Redacção, *os verdadeiros orientadores da Revista.*

E este, na realidade, o problema fundamental da G. M.: resolvido, estarão implicitamente solucionados os restantes, incluindo o da grave situação financeira.

A Redacção agradece reconhecida as duas cartas recebidas em resposta ao inquérito iniciado e *pede insistentemente* a atenção dos Leitores para a necessidade do desenvolvimento do mesmo inquérito.

Serão apresentados à apreciação dos leitores resumos das sugestões recebidas.

Inicia-se no presente n.º o Concurso de Problemas anunciado no n.º 49, cujo regulamento é o seguinte:

Regulamento do Concurso de Problemas

1 — É aberto um concurso, entre os leitores da G. M., de problemas propostos pela Redacção, dividido em 3 secções: *a)* Elementar, *b)* Média e *c)* Superior.

2 — Cada solucionista poderá concorrer a uma ou a todas as secções.

3 — O Concurso, em cada secção, consistirá na resolução de seis problemas publicados em números sucessivos da G. M., dois em cada número.

4 — As soluções devem ser apresentadas até ao fim do trimestre a que respeita o número da G. M. em que saíram os problemas, afim de serem publicadas as melhores no mais próximo número em que for possível (em geral no segundo número posterior à publicação do problema).

5 — As soluções deverão ser apresentadas em folhas