Lição de Indução Matemática*

João Luís Soares
Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Introduzimos o princípio de indução matemática e ilustramos a sua utilidade na demonstração de proposições matemáticas recorrendo a diversos exemplos. Terminamos com uma história que bem podia ter acontecido na Escola de Feitiçaria de Hogwarts, local do imaginário de um recente *best-seller* juvenil.

A técnica de demonstração de resultados em matemática denominada *princípio de indução matemática* tem vindo a ser utilizada nos últimos 350 anos. Já era algo familiar a Fermat (1601-1665) mas só surgiu de forma explícita com Pascal (1623-1662) na demonstração de resultados matemáticos relacionados com o conhecido Triângulo de Pascal. Neste artigo explicamos o que é o princípio de indução matemática e ilustramos a sua utilidade.

A formulação geral do princípio é a seguinte. Sejam p_1, p_2, p_3,... proposições matemáticas, cada uma delas podendo ser verdadeira ou falsa. Suponhamos que

(i) p_1 é verdadeira

e que, para todo $n \geq 1$,

(ii) p_n verdadeira implica p_{n+1} verdadeira;

então p_1, p_2, p_3,... são todas verdadeiras.

Vejamos a demonstração de um facto surpreendente usando este princípio. Se somarmos os primeiros n números inteiros ímpares qual é o resultado? Se tentarmos obter a resposta por experimentação obtemos

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 1+3 &= 4 \\ 1+3+5 &= 9 \\ 1+3+5+7 &= 16 \\ 1+3+5+7+9 &= 25 \end{aligned}$$

É fácil observar que obtemos quadrados; de facto, parece que *a soma dos primeiros n números ímpares é igual a* n^2. Isto é o que se observa para os primeiros cinco valores de n. Poderemos ter a certeza que isso é verdade para todo n? Portanto façamos

$$p_n: \quad 1+3+\ldots+(2n-3)+(2n-1)=n^2.$$

A proposição p_1 é verdadeira pois reduz-se à igualdade trivial 1=1. Agora, suponhamos que p_n é verdadeira para algum $n \geq 1$ e vejamos se p_{n+1} é verdadeira. Ora,

$$1+3+\ldots+(2n-3)+(2n-1)+\left[2(n+1)-1\right]=$$
$$=n^2+(2n+1)=(n+1)^2.$$

Mas isto significa que p_{n+1} é verdadeira! Pelo princípio de indução matemática podemos então afirmar que p_n é verdadeira para todo $n \geq 1$.

O próximo exemplo é menos intuitivo e por isso demonstra ainda melhor o poder da técnica que enunciámos:

$$p_n: \; 1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Por exemplo $1+4+9+16+25=5\times 6\times 11/6=55$. A proposição p_1 é verdadeira pois reduz-se à igualdade trivial 1=1.

* Este texto está disponível on-line em http://www.mat.uc.pt/~jsoares

Agora, suponhamos que p_n é verdadeira para algum $n \geq 1$ e vejamos se p_{n+1} é verdadeira. Ora,

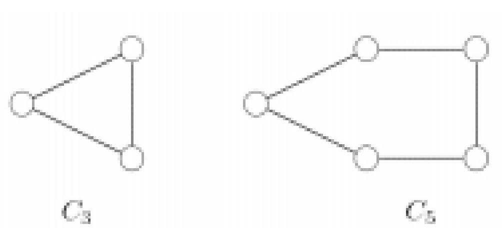
$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

$$= \frac{(n+1)\left[n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)\right]}{6}$$

$$= \frac{(n+1)\left[(n+1)+1\right]\left[2(n+1)+1\right]}{6}$$

Mas, mais uma vez, isto significa que p_{n+1} é verdadeira! Pelo princípio de indução matemática podemos então afirmar que p_n é verdadeira para todo $n \geq 1$.

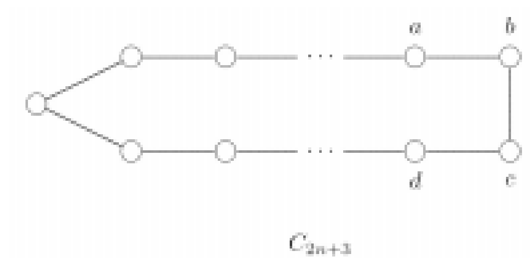
Ilustramos agora o princípio de indução matemática com a demonstração de um facto elementar sobre grafos. Grafos são estruturas geométricas constituídas por vértices (imaginem-se pontos do plano) e por arestas (imaginem-se linhas ligando pares de vértices). Dois vértices ligados por uma aresta dizem-se adjacentes. Um circuito de grau ímpar é um grafo muito particular constituído por um número ímpar de vértices e idêntico número de arestas definindo uma linha contínua fechada. Se esse número ímpar for $2n+1$ o circuito denota-se por C_{2n+1}. A próxima figura ilustra circuitos de grau ímpar com três e cinco vértices, respectivamente.



Só falta mais um conceito sobre grafos para expor a proposição que pretenderemos demonstrar. O número cromático de um grafo G, denotado por $\chi(G)$, é o menor número de cores a usar na coloração de todos os vértices, cada um com a sua cor, de modo que vértices adjacentes não sejam coloridos com a mesma cor. Como é simples verificar por inspecção, os grafos C_3 e C_5 possuem o mesmo número cromático, três. A nossa proposição é a de que essa observação é a mesma para qualquer circuito de grau ímpar, nomeadamente,

p_n: $\chi(C_{2n+1})=3$.

Que a afirmação é verdadeira para $n = 1$ já tínhamos observado no parágrafo anterior. Agora, suponhamos que p_n é verdadeira para algum $n \geq 1$ e vejamos se p_{n+1} é verdadeira. Consideremos o grafo C_{2n+3} esboçado na figura seguinte:



Nela estão destacados quatro vértices: *a, b, c* e *d*. Que este grafo pode ser colorido com três cores resulta do seguinte facto. O circuito de grau ímpar que resulta da exclusão dos vértices *b* e *c* e inserção de uma aresta ligando os vértices *a* e *d* tem $2n+1$ vértices. Denotemos o grafo assim construído por C'_{2n+1} que, pela hipótese de indução, pode ser colorido com três cores. Mas então podemos colorir C_{2n+3} com três cores também colorindo os vértices em comum com C'_{2n+1} com a mesma cor, e os vértices *b* e *c* com a mesma cor dos vértices *d* e *a*, respectivamente. Para mostrar que $\chi(C_{2n+1})=3$ falta agora mostrar que não é possível colorir C_{2n+3} com apenas duas cores. Um raciocínio por absurdo permite-nos chegar, de facto, a essa conclusão. Se isso fosse possível, como as cores usadas na coloração dos vértices *a* e *d* teriam que ser diferentes, também seria possível colorir C'_{2n+1} com duas cores apenas. Mas, pela hipótese de indução, isso é um absurdo! Concluímos então que não é possível colorir C_{2n+3} com duas cores e, por isso, $\chi(C_{2n+1})=3$, significando que p_{n+1} é verdadeira. Pelo princípio de indução matemática podemos então afirmar que p_n é verdadeira para todo $n \geq 1$.

O teorema das quatro cores é um conhecido resultado sobre a possibilidade de colorir um qualquer mapa geo-político usando no máximo quatro cores de modo a que países que partilhem uma mesma fronteira não sejam coloridos com a mesma cor (um número finito de pontos em comum não é considerado fronteira). Demonstramos aqui um resultado aparentado - veja-se a figura seguinte:

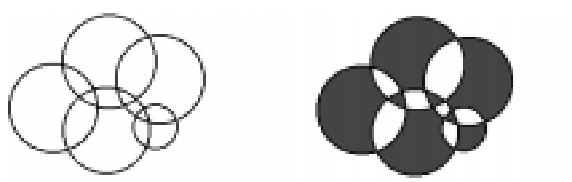


Fig. 1- Um conjunto de círculos coloridos com duas cores

Nomeadamente, se sobrepusermos no plano um número finito de círculos então é possível colorir o mapa resultante usando no máximo duas cores. Vamos demonstrar pelo princípio de indução matemática que a proposição seguinte é verdadeira para todo n ≥1:

$$p_n: \begin{cases} \textit{Qualquer mapa definido pela sobreposição} \\ \textit{de } n \textit{ círculos pode ser colorido com duas cores.} \end{cases}$$

Se $n = 1$, o mapa é constituído por um círculo apenas que é simples de colorir com uma cor. Suponhamos que p_n é verdadeira, para algum n≥1, e provemos a veracidade de p_{n+1}. Consideremos um qualquer mapa definido pela sobreposição de $n + 1$ círculos. Deste mapa destaque-se e exclua-se um qualquer círculo escolhido ao acaso. O mapa resultante é definido pela sobreposição de n círculos que, pela hipótese de indução, pode ser colorido com duas cores. Voltemos a colocar o círculo excluído e efectuem-se as seguintes correcções à coloração do mapa:

1. Cada região exterior ao círculo recolocado mantém a sua cor;
2. Cada região interior ao círculo recolocado troca de cor.

Veja-se a figura seguinte como ilustração:

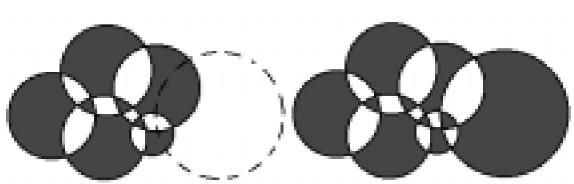


Fig. 2- Ilustração da redefinição de cores

Suponhamos, por absurdo, que após esta redistribuição das cores, existem duas regiões partilhando uma mesma fronteira e coloridas com a mesma cor. Se essa fronteira já existia antes da inserção do círculo excluído então as duas regiões em causa são ambas interiores ou ambas exteriores ao círculo. Em qualquer dos casos, e atendendo à hipótese de indução e às regras de redistribuição das cores é absurdo supor que as duas regiões possuam a mesma cor. Se a fronteira resultou da inserção do círculo excluído com a consequente partição de uma região em duas então o facto de uma região ser interior e a outra exterior juntamente com as regras de redistribuição das cores obriga a que as duas regiões fiquem coloridas com cores diferentes. Também neste caso é absurdo supôr que as duas regiões possuam a mesma cor. Fica assim provado que p_{n+1} também é verdadeira. Pelo princípio de indução matemática podemos então afirmar que p_n é verdadeira para todo n ≥1.

Finalizamos este artigo com uma história, em jeito de desafio, ilustrando alguma precaução necessária na utilização dos argumentos matemáticos que acabámos de descrever. Numa festa de aniversário de Hogwarts, Draco Malfoy conta que consegue demonstrar pela via matemática que todos naquela festa têm os olhos da mesma cor. Draco estava convencido ser capaz de colocar um problema que nenhum feitiço ajudaria a resolver – em Hogwarts esses eram os maiores desafios! Todos quiseram saber como era possível demonstrar algo que eles sabiam bem não ser verdade.

Os argumentos de Draco baseavam-se no princípio de indução matemática que todos eles tinham aprendido nessa semana nas aulas da professora Maria Glasserman, a professora de matemática. "Vejamos", começou, "se nessa festa existisse apenas uma pessoa, a afirmação seria certamente verdadeira." Todos acenaram que sim e pediram que se despachasse. "Suponhamos agora que, para algum n ≥1, a afirmação é verdadeira em qualquer festa com n pessoas e vejamos se se pode dizer o mesmo para qualquer festa com n + 1 pessoas". Aqui fez uma pausa para saber se estavam todos a acompanhar. Como aqueles acenaram que sim, continuou: "A estes n + 1 indivíduos atribuímos n convites para uma festa A_1 que se vai realizar no dia seguinte e outros n convites para uma festa A_2, que se vai realizar dois dias depois. A distribuição é feita de modo que todos recebam pelo menos um convite. Assim, pelo menos uma dessas pessoas, chamemos-lhe Zé, receberá convites para as duas festas A_1 e A_2. Pela hipótese de indução, todas as pessoas na festa A_1 têm os olhos da mesma cor de Zé e também todas as pessoas na festa A_2 têm os olhos da mesma cor de Zé. Por isso, na festa com $n + 1$ pessoas todos têm os olhos da mesma cor, a cor dos olhos de Zé. Pelo princípio de indução matemática aprendido nas aulas, em qualquer festa todos têm os olhos da mesma cor".

Dito isto, o Malfoy fez um sorriso maléfico e preparava-se para se afastar quando a Hermione Granger lhe tocou no ombro e disse: "Não vás tão depressa Malfoy, há um argumento na tua dedução que está incorrecto e é melhor saberes já."

Algumas proposições matemáticas que se descrevem em poucas palavras e que se demonstram através do princípio de indução matemática são as seguintes:

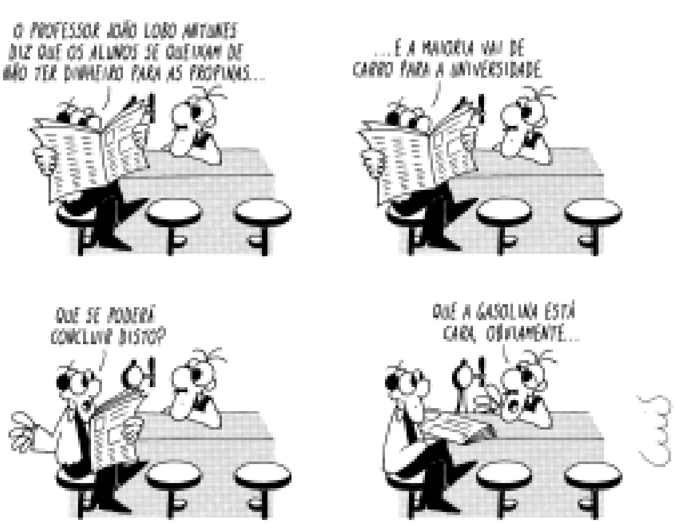
1. Para todo o inteiro $n \geq 1$, $1^3 + 2^3 + ... + n^3 = (1 + 2 + ... + n)^2$.
2. Para todo o inteiro $n \geq 0$, o resultado de $4^{2n+1} + 3^{n+2}$ é um múltiplo de 13.
3. Para todo o inteiro $n \geq 1$, existe um e um só par de números inteiros não negativos (a, b) tal que $n = 2^a(2b + 1)$.
4. O termo de ordem n da sucessão de Fibonacci ($a_0=0$, $a_1=1$, $a_n=a_{n-2}+a_{n-1}$) é igual a

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

Teste a sua compreensão do princípio de indução matemática.

Os grafos foram desenhados com auxílio do pacote *dcpic*, da autoria de Pedro Quaresma, que pode ser obtido em `http://www.tex.ac.uk/tex-archive/help/Catalogue/catalogue.html` nos arquivos CTAN.

Bartoon



Luís Afonso, *Público, 12-10*-2003
(Publicação gentilmente autorizada pelo autor)