GAZETA DE MATEMÁTICA
N.º 50 — Dezembro de 1951

Equações de derivadas parciais e funções de variáveis reais (*)

por J. Hadamard
Membro do Instituto

As funções de variáveis reais têm sido tratadas cada vez mais profundamente e, ao que parece, completamente, considerando-se sucessivamente espécies mais gerais, afim de fazer incidir sobre elas hipóteses tão pouco restritivas quanto possível. Neste sentido, as funções contínuas são incluídas nas funções integráveis à LEBESGUE. Vêem então as funções integráveis à DENJOY e as funções integráveis à PERRON, após o que têm atraído a atenção as sucessivas classes de de BAIRE, etc.

Parece que se tem ido tão longe quanto possível na direcção oposta, quero dizer, considerando-se propriedades cada vez mais especiais das funções. Entre as funções contínuas, foi-se levado a distinguir:

A) funções absolutamente contínuas;

B) » de variação limitada;

C) » satisfazendo à condição LIPSCHITZ-HÖLDER; então

D) funções admitindo derivada;

E) » cuja derivada gosa das propriedades A), B) ou C);

F) funções admitindo um certo número p de derivadas, que pode ainda supor-se satisfazerem às condições A), B) ou C).

Se agora tomamos $p=\infty$, isto é,

G) funções admitindo derivadas de todas as ordens, parece à primeira vista que nenhuma outra hipótese oferece interêsse enquanto nos não restringimos às

H) funções analíticas.

Mas por outras considerações, a lacuna entre as condições G) e H) aparece como muito larga; e na realidade, ela foi agora preenchida com o auxílio da teoria das equações de derivadas parciais: mais precisamente, do problema de CAUCHY.

Como se sabe, a questão referente à existência de soluções para as equações de derivadas parciais recebeu uma resposta geral — ou considerada como tal — no célebre teorema de CAUCHY-KOWALEWSKY. Este teorema estabelece que para uma tal equação, digamos de 2.ª ordem (dando o valor duma derivada de 2.ª ordem $\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2}$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} = F\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_k}, \frac{\partial u}{\partial x_i}, u, x_0, x_1, \cdots, x_{m-1}\right),$$

em termos das outras segundas derivadas, das primeiras derivadas, da função desconhecida u e das variáveis independentes), se o segundo membro é holomorfo nas diferentes variáveis, podemos determinar uma solução u escolhendo arbitráriamente os valores de u e de $\frac{\partial u}{\partial x_0}$ para $x=0$, como funções das outras variáveis independentes x_i — seja

$$(1) \qquad u(0, x_1, \cdots x_{m-1}) = \varphi(x_1, \cdots, x_{m-1}),$$
$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_0}\right)_{x_0=0} = \psi(x_1, \cdots, x_{m-1}).$$

Se, além disso, φ e ψ são holomorfas, este problema de CAUCHY, admite uma e só uma solução (1).

Esta resposta ao nosso problema capital foi muitas vezes considerada como completamente geral, devido à tendência, entre os geómetras do último século, para não considerar a hipótese de analiticidade como uma restrição essencial de generalidade.

O estado actual da Ciência tem levado a conclusões muito diferentes. Pode acontecer que o problema de CAUCHY seja possível sem qualquer hipótese de analiticidade; tal é o caso, por exemplo, do problema de propagação do som num meio ilimitado em todos os sentidos (sendo a equação diferencial a das ondas esféricas e as condições «defenidas» relativas a $t=0$); dum modo geral, duma equação do tipo «simplesmente-hiperbólico» (sendo os dados de CAUCHY originados por uma superfície espacial. Mas se se considera agora a equação de LAPLACE (equação

---

(*) Recebido em 1951, Março.

dos potenciais) e tentamos determinar uma solução u pelos dados de CAUCHY [1], pode ver-se fàcilmente que, por exemplo, nenhuma solução existe se uma destas funções é suposta idênticamente nula e a outra não analítica.

Isto não introduz nenhuma nova concepção, visto que somos ainda conduzidos à condição H) de analiticidade. Mas as coisas mudam se partirmos agora da *equação do calor*,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Se tomamos ainda φ, um dos dados de CAUCHY, como idênticamente nulo, o problema em geral não é possível, mesmo se o outro dado ψ satisfaz à condição G).

As condições necessárias e suficientes para a existência duma solução são:

1.º Condição G) (que existam as derivadas $\psi^{(p)}$ de todas as ordens);

2.º) Condição H_2), que os valores absolutos de $\psi^{(p}$ admitam limites superiores:

$$H_2) \qquad |\psi^{(p)}(y)| \leqslant K(2p)!\,R^p,$$

onde K e R são duas constantes positivas (isto é, independentes de p e y, embora geralmente diferentes para os diversos ψ).

A condição H_2) difere da condição de analiticidade: ela é *menos restritiva*, pois que a analiticidade é expressa, além de G), pelas desigualdades

$$H) \qquad |\psi^{(p)}(y)| \leqslant K p!/R^p,$$

onde K e R têm a mesma significação que acima.

Portanto, a «classe de espécie 2» defenida por aquela condição é intermediária entre as classes G) e H). O mesmo se pode dizer, sem dúvida, das «classes de espécie α» definidas por

$$(H\alpha) \qquad |\psi^{(p)}(y)| \leqslant K\,\Gamma(\alpha p)/R^p,$$

para qualquer α maior que a unidade [2].

Por um tal resultado, foi aberto o caminho para uma longa e importante série de pesquizas.

Primeiramente, a propriedade mais clássica — e até agora considerada como característica — das séries de TAYLOR é que uma função ψ é completamente determinada quando são dados os valores numéricos da própria função ψ e das suas derivadas de todas as ordens, para um determinado valor da variável independente no interior do intervalo (a,b), onde ela é suposta holomorfa; tem-se, como consequência, que se ψ é dada num intervalo (a,b) e é suposta holomorfa num intervalo (a,c) mais extenso (com $a<b<c$), um tal problema de *prolongamento analítico* — isto é, determinação de ψ no intervalo complementar (b,c) — se for possível, é determinado.

A questão que surge naturalmente é: pertencerá esta propriedade à classe $H\alpha$)? Se uma função pertence a esta classe, será o seu prolongamento analítico determinado adentro da classe?

A resposta é negativa. Pode mostrar-se fàcilmente que as funções

$$(2) \qquad e^{-\frac{1}{y}}, \qquad (2') \qquad \frac{1}{y^q}\,e^{-\frac{1}{y}}$$

pertencem à classe de espécie 2. As sucessivas derivadas — mais precisamente, «derivadas à direita» — de ambas elas são todas nulas para $y=0$. Assim (2) ou (2') podem «prolongar», para $y \geqslant 0$, uma função idênticamente igual a zero para $y<0$, gerando uma função contínua assim como todas as suas derivadas, para cada y real de $-\infty$ a $+\infty$.

A questão pode ser agora obviamente generalizada. Usando um símbolo análogo ao de LANDAU, suponhamos que

$$f = \odot g,$$

onde f e g são funções do inteiro p, a segunda das quais positiva, significa que existem duas constantes K e R tais que

$$|f| < Kg/R^p$$

para cada p positivo. Sendo dada uma sucessão de números A_p, o sistema de desigualdades

$$(A) \qquad \psi^{(p)}(y) = \odot A_p,$$

a ser satisfeito pelas sucessivas derivadas duma função ψ, define uma classe de funções (a classe das funções analíticas, se $A_p = p!$). Diremos agora que esta classe A_p é *quase-analítica* se o prolongamento, no sentido considerado acima, é determinado adentro desta classe. A questão é: sob que condição a sucessão A_p define, pelas desigualdades (A), uma classe quase-analítica.

Este belo problema foi completamente resolvido pelas pesquizas de BOREL, DENJOY e CARLEMAN. A condição para a quasi-analiticidade é a divergência da série

$$\sum \frac{1}{\sqrt[p]{A_p}},$$

prèviamente regularizada, isto é, quando certos valores de A_p são substituídos por outros menores se,

---

[1] A demonstração de CAUCHY e SOFIA KOWALEWSKY apenas provou que não existe mais do que uma solução holomorfa. Que nenhuma outra *qualquer* solução pode existir resulta, ao menos para muitos casos (equações lineares de coeficicientes analíticos), de trabalhos posteriores (HOLMGREN, HANS LEWY, CARLEMAN).

[2] $\alpha=1$ é a classe das funções analíticas. Para $\alpha<1$, uma função satisfazendo às desigualdades $(H\alpha)$ é não só analítca, mas também uma função inteira de genus maior do que $1/(1-\alpha)$.

para alguns valores de p, eles são anormalmente grandes.

Ainda outra generalização é possível e foi estudada. Imaginemos um sistema de condições — não necessàriamente da forma (A) — imposto a uma função ψ, definindo-se assim uma classe $\mathcal{C}$. Pode acontecer que esta classe seja quasi-analítica, sendo a significação de «prolongamento» ligeiramente modificada pois que as derivadas já não intervêm: uma função ψ é definida em (a,b) e satisfaz às condições $\mathcal{C}$; tentemos defini-la em (b,c) de forma que as mesmas condições sejam satisfeitas em (a,c); diremos que a classe é quasi-analítica se este prolongamento (quando possível) é possível duma só maneira.

Estas espécies de classes quasi-analíticas foram obtidas por Serge Bernstein como uma consequência das suas célebres e profundas investigações sobre aproximação polinomial. Quanto elas podem ser diferentes das consideradas acima, será imediatamente assinalado pelo facto que algumas delas compreendem funções desprovidas de qualquer derivada.

II

Ainda outros caminhos de investigação foram sugeridos pela consideração das classes H_2 ou H_α. Uma propriedade essencial das funções analíticas é a de gerarem outras pelas operações clássicas da Análise, tais como a adição, multiplicação, formação de funções de funções e funções compostas, definição de funções implicitas por meio de equações ordinárias ou também por equações diferenciais. Como se sabe, a demonstração de que estas operações, aplicadas a funções analíticas, produzem ainda funções analíticas, é geralmente levada a cabo com o auxílio de «funções dominantes», baseando-se no facto que as desigualdades com os membros maiores positivos podem combinar-se por adição e multiplicação.

Maurice Gevrey generaliza isto às classes de espécie α, constituindo para estas classes toda uma nova Análise, inteiramente paralela à antiga, mas onde os sucessivos cálculos são não só sujeitos à «dominação» como no método de Cauchy, mas à «sobredominação», isto é, substituindo cada termo pela sua potência de ordem α e fazendo uso da desigualdade

$$(a+b)^\alpha \geqslant a^\alpha + b^\alpha, \quad a>0, b>0, \alpha>1.$$

Assim, o produto de duas funções pertencentes à classe de espécie $\alpha>1$ é ainda uma função da mesma classe; etc.

Sem dúvida, podemos estudar propriedades semelhantes nas classes mais gerais (A). No que diz respeito ao produto, a questão foi completamente resolvida por Gorny (1): a propriedade relativa ao produto subsiste em cada classe do tipo (A) *considerada num intervalo infinito*. Ela é também válida se o intervalo é finito, desde que substituamos A_p por $\max(A_p, p!)$.

III

Outras questões respeitantes ao problema de Cauchy conduzem a propriedades notáveis e inesperadas de funções de variáveis reais.

Partamos da equação das ondas esféricas,

$$(E_3) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Esta equação é hiperbólica e, mais prècisamente, «simplesmente hiperbólica». Contudo o problema de Cauchy que lhe diz respeito pode ser impossível. Tais casos ocorrem se, em vez de $t=0$, os dados são originados pela hipersuperfície $x=0$: uma superfície temporal («time-like») em lugar de uma espacial («space-like»). O problema de determinar a solução de (E_3) por

$$u(0,y,z,t) = \varphi(y,z,t), \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=0} = \psi(y,z,t)$$

onde φ e ψ já não são supostas analíticas (mesmo se indefinidamente diferenciáveis), é em geral impossível. Como deveremos escolher φ e ψ — ou, para simplificar, uma destas funções, tomando-se a outra idênticamente nula — para chegar a um problema de Cauchy possível?

Sem dúvida, um problema análogo existe para cada número de dimensões: por exemplo, para a equação das ondas cilíndricas. Mas, desta vez, aparece uma nova e curiosa circunstância se considerarmos um meio unidimensional, ficando a equação diferencial reduzida à equação das cordas vibrantes

$$(E_1) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Neste caso não há distinção entre direcções espaciais e temporais: a variável t desempenha um papel inteiramente análogo a x, de modo que o problema de que agora falamos não existe para este caso. Consequentemente, encontraremos propriedades de funções de diversas variáveis que não têm análogo no caso duma só variável.

---

(1) Conservo o cruel remorso de não ter conseguido obter, para este jovem tão belamente dotado, uma nomeação numa Universidade Americana. A recusa duma tal nomeação equivaleu para ele a uma condenação à morte: não pôde ser libertado dum campo de concentração em França, que abandonou sòmente para seguir para a câmara de gaz, na Alemanha.

Vê-se fàcilmente que a questão pode ser, e mesmo duma infinidade de maneiras, reconduzida à expressão duma função de duas ou mais variáveis por médias «semi-circulares» ou «hemi-esféricas».

Para a equação das ondas cilíndricas

$$(E_2) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

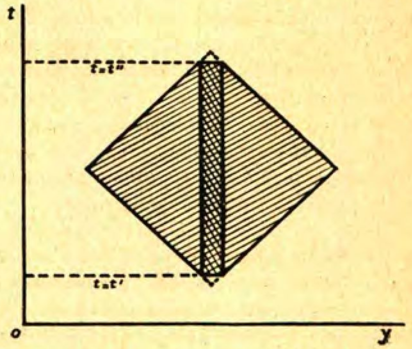
à qual nos referiremos de preferência, por conveniência de figuração, tomemos no semi-plano $x \geqslant 0$, um semi-círculo tendo o seu centro $(0, y_0)$ sobre o eixo dos y, sendo o seu raio designado por t_0. O valor médio duma função arbitrária $\chi(x, y)$ sobre este semi-círculo será uma função de y_0 e de t_0, digamos $\psi(y_0, t_0)$.

Sendo agora dada $\psi(y_0, t_0)$, é possível encontrar uma função $\chi(x, y)$ correspondente?

É certamente possível (duma só maneira) se ψ é analítica nas duas variáveis que contém e, mais geralmente, como resulta duma proposição de Volterra, se é analítica em y_0; mas o problema é, pelo contrário, certamente impossível se ψ é independente de t e não analítica em y_0.

Para um dado ψ, o χ requerido pode ser obtido por aplicação, uma infinidade de vezes, das duas operações que combinam derivação e integração. Para que χ exista, é necessário que cada uma destas sucessivas operações seja possível (o que, no entanto, em virtude da intervenção da integração, pode acontecer mesmo sem a existência de derivadas de ψ). Se assim é, estas operações levam ao valor médio do produto χP, onde P é um polinómio; donde por processos conhecidos de passagem a limite, o valor de χ em cada ponto. Sòmente, é ainda necessária a convergência nestas passagens a limite.

Mas as operações assim sumàriamente descritas oferecem um notável aspecto. Elas podem ser efectuadas quando ψ é dada no interior dum pequeno segmento do eixo dos y e variando t de t' a t'' — por outras palavras, num rectângulo ([1]), embora exíguo, paralelo ao eixo dos t (veja-se o diagrama junto). Se, agora, as condições de validade e convergência destas operações são satisfeitas, elas definirão χ e, consequentemente, ψ, não só no interior do rectângulo, mas em todo o interior dum losango (ver diagrama) circunscrito àquele (de lados inclinados de 45° em relação à vertical), com excepção das partes que correspondem a $t < t'$ ou a $t > t''$. Portanto, vemos que as funções satisfazendo às condições



de possibilidade do nosso problema admitem um certo prolongamento analítico — não, porém, sobre qualquer espécie de domínios, mas sobre domínios de certas formas.

Se recordarmos que a redução do problema de Cauchy a um problema de médias semi-circulares pode ser obtida pelos mais variados caminhos, encontramos que o prolongamento analítico de $\psi(y, t)$, se dado no interior duma certa área S_0 do plano yt, atinge uma área circunscrita a S_0 e limitada por características de ambos os sistemas.

Vemos pois que, para funções de diversas variáveis, existem novas espécies de prolongamentos analíticos, que não têm análogo para funções duma só variável, a saber, prolongamentos sobre áreas ou volumes de certas formas especiais.

([1]) No caso da equação das ondas esféricas — uma equação em quatro variáveis, a última das quais, t, é uma variável do tipo-tempo, — a função $\psi(y, z, t)$ pode ser dada no interior dum círculo, embora pequeno, do plano yz e para $t' \leq t \leq t''$, isto é, no interior dum cilindro circular, embora exíguo, de eixo paralelo ao eixo dos t; e sendo assim, ela será determinada em todo o interior dum duplo cone circunscrito ao cilindro (ou mais exactamente na parte deste duplo cone correspondente a $t' \leq t \leq t''$).