Sobre la inversión del orden en las elasticidades parciales (*)

por **J. Gallego Diaz**
Madrid — España

El objeto del presente trabajo es investigar las condiciones generales bajo las cuales, dada una función $z=F(x,y)$, es lícito invertir el orden de las elasticidades parciales. Nos proponemos, pues, averiguar cuales son las funciones que satisfacen a la ecuación:

$$E''_{x,y}(z)=E''_{y,x}(z). \tag{1}$$

Recordamos que, dada una función $y=y(x)$, se llama *elasticidad* de la función y se representa por el símbolo $E(y)$ a la expresión:

$$E(y)=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{x}{y}. \tag{2}$$

Análogamente, dada una función z de dos variables independientes x e y, se llama *elasticidad parcial* primera de z respecto de x, a la expresión:

$$E_x(z)=z'_x\cdot\frac{x}{z}. \tag{3}$$

y elasticidad parcial primera de z respecto de y, a la expresión:

$$E_y(z)=z'_y\cdot\frac{y}{z}. \tag{4}$$

Para el calculo de las elasticidades parciales sucesivas basta observar que la elasticidad de un producto es igual a la suma de las elasticidades de los factores y que la elasticidad de un cociente es igual a la diferencia entre la elasticidad del numerador y del denominador.

Asi:

$$E_x[E_x(z)]=E''^2_x(z)=E_x(z'_x)+1-E_x(z)$$

$$E_y[E_y(z)]=E''^2_y(z)=E_y(z'_y)+1-E_y(z)$$

$$E_y[E_x(z)]=E''_{xy}(z)=E_y(z'_x)-E_y(z) \tag{5}$$

$$E_x[E_y(z)]=E''_{yx}(z)=E_x(z'_y)-E_x(z). \tag{6}$$

La ecuación (1) equivale, pues a

$$E_y\left(\frac{z'_x}{z}\right)=E_x\left(\frac{z'_y}{z}\right), \tag{7}$$

o lo que es lo mismo:

$$z''_{xy}\cdot\frac{y}{z'_x}-z'_y\cdot\frac{y}{z}=z''_{xy}\cdot\frac{x}{z'_y}-z'_x\cdot\frac{x}{z}. \tag{8}$$

Y si suponemos cumplidas las conocidas condiciones de existencia y de continuidad de las derivadas de las funciones consideradas, podemos admitir que $z''_{xy}=z''_{yx}$ con lo cual la ecuación (8) pasa a ser

$$z''_{xy}\left[\frac{y}{z'_x}-\frac{x}{z'_y}\right]=\frac{1}{z}(y\,z'_y-x\,z'_x)$$

es decir:

$$\frac{z''_{xy}(y\,z'_y-x\,z'_x)}{z'_x\cdot z'_y}=\frac{1}{z}(y\,z'_y-x\,z'_x)$$

la cual se satisface, bien por ser:

a) $$y\,z'_y=x\,z'_x \tag{9}$$

o por ser

b) $$z\cdot z''_{xy}=z'_x\cdot z'_y. \tag{10}$$

La integración de estas dos ecuaciones en derivadas parciales es inmediata. Para la ecuación (9) se tendrá que verificar, como es sabido,

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{-y}=\frac{dz}{0}$$

o sea:

$$L(xy)=\alpha\,;\quad z=\beta\,;\quad xy=K_1\,;\qquad z=K_2.$$

Y, por tanto: $$\boxed{z=\varphi(xy)} \tag{11}$$

Y para la ecuación (10), puesta en la forma:

$$\frac{z''_{xy}}{z'_x}=\frac{z'_y}{z}$$

integraremos respecto de y, resultando:

$$L\,z'_x=L\,z+L\,\Psi(x)\,;\quad L\,z=L\frac{z'_x}{\Psi(x)}\,;\ \frac{z'_x}{z}=\Psi(x)$$

e integrando respecto de x:

$$L\,z=\tau_1(x)+\omega_1(y)$$

(*) Recibido en Mayo, 1951.

y, por tanto: $$\boxed{z = \alpha(x) \cdot \beta(y)} \qquad (12)$$

Podemos comprobar el resultado (12) mediante el cambio de función: $z_1 = Lz$ o lo que es lo mismo: $z = e^{z_1}$.

Las derivadas parciales de z respecto de x e y son:

$$z'_x = e^{z_1}(z_1)'_x\,, \quad z'_y = e^{z_1}(z_1)'_y$$

$$z''_{xy} = e^{z_1}\left[(z_1)'_x(z_1)'_y + (z_1)''_{xy}\right]$$

y la ecuación (10) se convierte en:

$$e^{2z_1}\left[(z_1)'_x(z_1)'_y + (z_1)''_{xy} - (z_1)'_x(z_1)'_y\right]$$

y puesto que

$$e^{2z_1} \neq 0$$

resulta:

$$(z_1)''_{xy} = 0\,. \qquad (13)$$

Las soluciones de (13) seran, pues,

$$z_1 = \gamma(x) + \delta(y)$$

y, por tanto:

$$Z = e^{z_1} = e^{\gamma(x)+\delta(y)} = \alpha(x) \cdot \beta(y)\,. \qquad (14)$$

ecuación idéntica a la (12).

La generalización al caso de una función de n variables independientes es obvia.

Dada la importancia que, a nuestro juicio, presenta el cálculo de elasticidades para el estudio de los fenómenos naturales (fisicos, biológicos, económicos, psicológicos, etc.) [1] estimamos que los resultados obtenidos en el presente trabajo ofrecen un doble interés ya que, por un lado, sirven de corroboración a algunos de los conseguidos en el trabajo a que antes aludimos y, por outro lado, si admitimos, como parece lógico, que las funciones utilizadas en las ciencias experimentales satisfacen a la ecuación (1), estas han de ser del tipo de las (11) o de las (12).

Por último, es inmediato advertir que, si ademas de (11) suponemos que ha de cumplirse:

$$z''_{x^2} + z''_{y^2} = 0$$

resulta: $z = kxy$.

Y, si ademas de (12) suponemos que ha de cumplirse, igualmente, $z''_{x^2} + z''_{y^2} = 0$, resulta:

$$z = \cosh y\,(a_1 e^{hx} + b_1 e^{-hx})$$

o bien: $z = \operatorname{senh} y\,(a e^{hx} - b e^{-hx})$.

---

[1] Véase nuestro trabajo: «Una métrica universal para las ciencias experimentales», en esta misma revista, n.º 41-42, 1949, (Recensión de L. M. BLUMENTHAL en *Mathematical Reviews*, Enero 1951, pg. 3).