Sobre la inversión del orden en las elasticidades parciales (*)

por J. Gallego Diaz
Madrid — España

El objeto del presente trabajo es investigar las condiciones generales bajo las cuales, dada una función $z=F(x,y)$, es lícito invertir el orden de las elasticidades parciales. Nos proponemos, pues, averiguar cuales son las funciones que satisfacen a la ecuación:

$$E''_{x,y}(z)=E''_{y,x}(z)\,. \tag{1}$$

Recordamos que, dada una función $y=y(x)$, se llama *elasticidad* de la función y se representa por el simbolo $E(y)$ a la expresión:

$$E(y)=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{x}{y}\,. \tag{2}$$

Análogamente, dada una función z de dos variables independientes x e y, se llama *elasticidad parcial* primera de z respecto de x, a la expresión:

$$E_x(z)=z'_x\cdot\frac{x}{z}\,. \tag{3}$$

y elasticidad parcial primera de z respecto de y, a la expresión:

$$E_y(z)=z'_y\cdot\frac{y}{z}\,. \tag{4}$$

Para el calculo de las elasticidades parciales sucesivas basta observar que la elasticidad de un producto es igual a la suma de las elasticidades de los factores y que la elasticidad de un cociente es igual a la diferencia entre la elasticidad del numerador y del denominador.

Asi:

$$E_x[E_x(z)]=E''^2_x(z)=E_x(z'_x)+1-E_x(z)$$

$$E_y[E_y(z)]=E''^2_y(z)=E_y(z'_y)+1-E_y(z)$$

$$E_y[E_x(z)]=E''_{xy}(z)=E_y(z'_x)-E_y(z) \tag{5}$$

$$E_x[E_y(z)]=E''_{yx}(z)=E_x(z'_y)-E_x(z)\,. \tag{6}$$

La ecuación (1) equivale, pues a

$$E_y\left(\frac{z'_x}{z}\right)=E_x\left(\frac{z'_y}{z}\right), \tag{7}$$

o lo que es lo mismo:

$$z''_{xy}\cdot\frac{y}{z'_x}-z'_y\cdot\frac{y}{z}=z''_{xy}\cdot\frac{x}{z'_y}-z'_x\cdot\frac{x}{z}\,. \tag{8}$$

Y si suponemos cumplidas las conocidas condiciones de existencia y de continuidad de las derivadas de las funciones consideradas, podemos admitir que $z''_{xy}=z''_{yx}$ con lo cual la ecuación (8) pasa a ser

$$z''_{xy}\left[\frac{y}{z'_x}-\frac{x}{z'_y}\right]=\frac{1}{z}(y\,z'_y-x\,z'_x)$$

es decir:

$$\frac{z''_{xy}(y\,z'_y-x\,z'_x)}{z'_x\cdot z'_y}=\frac{1}{z}(y\,z'_y-x\,z'_x)$$

la cual se satisface, bien por ser:

a) $$y\,z'_y=x\,z'_x \tag{9}$$

o por ser

b) $$z\cdot z''_{xy}=z'_x\cdot z'_y\,. \tag{10}$$

La integración de estas dos ecuaciones en derivadas parciales es inmediata. Para la ecuación (9) se tendrá que verificar, como es sabido,

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{-y}=\frac{dz}{0}$$

o sea:

$$L(xy)=\alpha\,;\quad z=\beta\,;\quad xy=K_1\,;\quad z=K_2\,.$$

Y, por tanto: $$\boxed{z=\varphi(xy)} \tag{11}$$

Y para la ecuación (10), puesta en la forma:

$$\frac{z''_{xy}}{z'_x}=\frac{z'_y}{z}$$

integraremos respecto de y, resultando:

$$L\,z'_x=L\,z+L\,\Psi(x)\,;\quad L\,z=L\frac{z'_x}{\Psi(x)}\,;\quad \frac{z'_x}{z}=\Psi(x)$$

e integrando respecto de x:

$$L\,z=\tau_1(x)+\omega_1(y)$$

(*) Recibido en Mayo, 1951.