GAZETA DE MATEMÁTICA
N.º 50 — Dezembro de 1951

Sobre aneis de endomorfismos (*)

por A. Almeida Costa
da Universidade do Porto

Introdução. No que vai seguir-se, $\mathfrak{M}$ é um módulo e Ω um domínio operatório do mesmo, formado por endomorfismos de $\mathfrak{M}$. $\bar{\Omega}$ é o anel dos endomorfismos-Ω, de $\mathfrak{M}$, e $\bar{\Omega}' \subseteq \Omega$ um anel contido em Ω. $\mathfrak{N}$ será um sub-módulo-Ω, de $\mathfrak{M}$, podendo $\mathfrak{N}$ afectar-se de um índice, sem perder esse significado. O conjunto dos endomorfismos pertencentes a $\bar{\Omega}'$, que aniquilam $\mathfrak{N}$, constitui um ideal direito, representado por $\mathfrak{s}$ e chamado *ideal aniquilador*. A $\mathfrak{N}_i$ corresponderá $\mathfrak{s}_i$, no mesmo sentido. Por *ideal de contracções* em $\mathfrak{N}$, designaremos o conjunto $\mathfrak{n}$ dos endomorfismos de $\bar{\Omega}'$ que aplicam $\mathfrak{M}$ dentro de $\mathfrak{N}$. A $\mathfrak{N}_i$ corresponderá $\mathfrak{n}_i$, no mesmo sentido.

O § 2 destina-se a completar, em certos pontos, as investigações de que démos larga conta em dois trabalhos anteriores: [10] — «*Sobre os endomorfismos dos módulos*», *Anais da Faculdade de Ciências do Porto*, 1948, vol. XXXIII, págs. 5 a 32; [14] — *Über Kontraktions-und Vernichtungsideale in der allgemeinen Modulntheorie*», *Revista da Faculdade de Ciências de Lisboa*, 2.ª série, A — Ciências Matemáticas, vol. I, 1951, págs. 297 a 344. Em particular, demonstraremos um teorema A' e algumas consequências do mesmo, em correspondência com o teorema A e certas consequências que se encontram em [14]. O teorema 42' encontra-se enunciado a págs. 35 do importante livro de N. Jacobson, «*Theory of rings*», 1943, livro que adiante será indicado por (II). Depois de darmos uma demonstração, completamo-lo com o enunciado do teorema 43'. Quanto aos teoremas 64' e 65', que caracterizam os módulos completamente redutíveis, deverão comparar-se com os teoremas 36 e 37 de [10, págs. 31 e 32], os quais constituem uma outra caracterização dos mesmos módulos. As notações, a terminologia e a numeração dos teoremas farão corpo comum aqui, em [14] e num artigo em publicação nos *Anais da Faculdade de Ciências do Porto*, tomo XXXV, 1950-1951.

(*) Recebido em Maio de 1951.

Esse Capítulo formará o Cap. XV da nossa obra «*Sistemas hiper-complexos*», da qual os doze primeiros Capítulos se encontram em volume, já desde 1948, e os Capítulos XIII e XIV constituem o texto duma conferência realizada no *Congresso Luso-Espanhol*, levado a efeito em Lisboa, em Outubro de 1950. O leitor encontrará nas *Actas* do referido Congresso, vol. I, a reprodução integral dessa conferência. Julgamos ser úteis neste momento, repetindo que os interessados poderão actualizar fàcilmente os seus conhecimentos no domínio da *Teoria dos Aneis e Ideais não comutativos*, se, depois de adquirirem as noções mais elementares da *Teoria dos Grupos* e da *Teoria dos Aneis*, quizerem ler os quatro primeiros Capítulos do citado livro «*Sistemas hiper-complexos*», e, em seguida, precisamente os referidos Capítulos XIII, XIV e XV. O conjunto constitui uma exposição perfeitamente ordenada e acessível. Ele deverá ser seguido, de resto, de três Capítulos mais, cuja publicação fica diferida para mais tarde.

No § 3, tratando especialmente do caso em que Ω é um anel de divisão, limitamo-nos a dar uma demonstração, em parte modificada, de um teorema que se encontra em N. Jacobson, «*Structure theory of simple rings without finiteness assumptions*», *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 57, 1945, págs. 228 a 245. Esse teorema refere-se a *aneis densos*, que aquele algebrista americano define do modo seguinte: dado $\mathfrak{M}$ e suposto Ω um anel de divisão, diz-se que $\bar{\Omega}'$ é denso em $\mathfrak{M}$, sobre Ω, se, considerados $x_1, \cdots, x_n \in \mathfrak{M}$, independentes-$\Omega$, e também $y_1, \cdots, y_n \in \mathfrak{M}$, independentes-$\Omega$ ou não, existir um endomorfismo $A \in \bar{\Omega}'$ tal que $x_i A = y_i$, $(i = 1, 2, \cdots, n)$. As referências a esta memória de Jacobson serão feitas por [4].

No § 4, em face dum artigo de T. Nakayama, *Über einfache distributive Systeme endlicher Ränge*», *Proceedings of the Imperial Academy*, Tokyo, vol. XX, 1944, págs. 61 a 66, veremos como um método de demonstração de C. Chevalley leva a estabelecer um teorema que também se encontra em [4], embora provado aí por forma completamente diferente. Esse teorema refere-se a *anéis irredutíveis,* que podem definir-se como vai ver-se. Imaginemos $\mathfrak{M}$ e o anel de divisão Ω. $\bar{\Omega}'$ diz-se irredutível em $\mathfrak{M}$, sobre Ω, se não existir sub-módulo de $\mathfrak{M}$ que seja admissível-$\bar{\Omega}'$. As referências ao trabalho citado de Nakayama serão feitas por [3]. Os números das diferentes referências jogam também com os que se utilizam nos Capítulos XIII a XVIII, de que atrás falámos.

2. Sobre algumas proposições gerais. Em [14, § 2], demonstrámos um teorema A, que não teve o seu correspondente em [14, § 3]. Todavia, vale para sub-módulos-Ω, o

Teorema A': *Se* $\mathfrak{N}=\mathfrak{N}_1\cap\mathfrak{N}_2$ *e* $(\mathfrak{N}_1,\mathfrak{N}_2)=\mathfrak{M}$, *os respectivos ideais aniquiladores, supondo* $\bar{\Omega}'=\bar{\Omega}$, *verificam a igualdade* $\mathfrak{S}=\mathfrak{S}_1+\mathfrak{S}_2$, *como soma directa.* Sabemos que $\mathfrak{S}\supseteqq(\mathfrak{S}_1,\mathfrak{S}_2)$, [14, teor. 2']. Dado $B\in\mathfrak{S}$, tomemos $m\in\mathfrak{M}$. Decompondo m de duas maneiras distintas, sob as formas $m=n_1+n_2=n_1'+n_2'$, $(n_1, n_2'\in\mathfrak{N}_1;\ n_2, n_2'\in\mathfrak{N}_2)$, vê-se que $n_1-n_1'=n_2'-n_2\in\mathfrak{N}$, de modo que se tem $n_1B=n_1'B$, $n_2B=n_2'B$. Conclui-se, assim, que, dado $m\in\mathfrak{M}$, se obtêm endomorfismos-Ω, de $\mathfrak{M}$, por via das seguintes correspondências: $m\rightarrow n_1B=mA_2'$, $m\rightarrow n_2B=mA_1'$. Supondo $m=n_1=n_1+0\in\mathfrak{N}_1$, vê-se que $n_1\rightarrow n_1A_1'=0\cdot B=0$, pelo que $\mathfrak{N}_1A_1'=(0)$, $A_1'\in\mathfrak{S}_1$. É, anàlogamente, $A_2'\in\mathfrak{S}_2$ E, sendo $m=n_1+n_2$, $mB=n_1B+n_2B=mA_2'+mA_1'=m(A_1'+A_2')$, conclui-se $B=A_1'+A_2'$. Por isso, tem-se $\mathfrak{S}=(\mathfrak{S}_1,\mathfrak{S}_2)$. Ora esta soma é directa, pelo facto de ser $\mathfrak{S}_1\cap\mathfrak{S}_2=(0)$, como resulta de [14, teor. 1'].

Em todo este § admitiremos sempre $\bar{\Omega}'=\bar{\Omega}$ e utilizaremos a noção de *aniquilador modular*, para significar sub-módulo-Ω que é aniquilado por um dado conjunto de endomorfismos. Também fixaremos a regra geral de que um elemento dum conjunto representado por uma letra gótica maiúscula se indicará pela letra latina minúscula correspondente.

Corolário C': *Supondo* $(0)=\mathfrak{N}_1\cap\mathfrak{N}_2$, $(\mathfrak{N}_1,\mathfrak{N}_2)=\mathfrak{M}$, *tem-se* $\bar{\Omega}=\mathfrak{S}_1+\mathfrak{S}_2$.

Corolário D': *Nos termos do corolário anterior, fazendo a decomposição* $1=E_1'+E_2'$, $(E_i'\in\mathfrak{S}_i)$, *em idempotentes ortogonais, vê-se que* $\mathfrak{N}_1$ *e* $\mathfrak{S}_1$ *são aniquiladores recíprocos, de sorte que* $\mathfrak{N}_1$ *é aniquilador modular de* E_1'.

Representando por $\mathfrak{P}_i\supseteqq\mathfrak{N}_i$ o aniquilador modular de $\mathfrak{S}_i$, $(i=1,2)$, sabemos que $(0)=\mathfrak{P}_1\cap\mathfrak{P}_2$, [14, teor. 2']. Suponhamos $x\in\mathfrak{P}_1$, $x\notin\mathfrak{N}_1$ e escrevamos $x=n_1+n_2$. Será $xE_1'=n_1E_1'+n_2E_1'=0=n_2E_1'$, de sorte que $n_2\neq0$ e $n_2\in\mathfrak{P}_1$. Assim, não será nula a intersecção dos $\mathfrak{P}_i$, o que é absurdo. Conclui-se $\mathfrak{P}_1\subseteqq\mathfrak{N}_1$, e, portanto, $\mathfrak{P}_1=\mathfrak{N}_1$. Como $\mathfrak{S}_1$ e E_1' têm o mesmo aniquilador, modular segue-se o resto do corolário.

O teorema A' arrasta a possibilidade de se enunciar o teorema B', em correspondência com o teorema B, de [14, § 5]. Tem-se:

Teorema B': *Se* $\mathfrak{N}=\mathfrak{N}_1\cap\mathfrak{N}_2$, $(\mathfrak{N}_1,\mathfrak{N}_2)=\mathfrak{M}$, *e se se admite que* $\mathfrak{S}_1$ *é nilideal e que* $\mathfrak{S}_2$ *é nilideal bilateral,* $\mathfrak{S}$ *é nilideal; se* $\mathfrak{S}_1$ *e* $\mathfrak{S}_2$ *são nilpotentes,* $\mathfrak{S}$ *é nilpotente; e, se* $\mathfrak{S}_1$ *e* $\mathfrak{S}_2$ *são semi-nilpotentes,* $\mathfrak{S}$ *é semi-nilpotente.*

Ainda sobre o conteúdo de [14, § 5] daremos o

Corolário A': *Supondo* $(0)=\mathfrak{N}_1\cap\mathfrak{N}_2$, $(\mathfrak{N}_1,\mathfrak{N}_2)=\mathfrak{M}$, *então, admitindo que* $\mathfrak{S}_1$ *é nilideal, tem-se* $\mathfrak{N}_2=(0)$, $\mathfrak{N}_1=\mathfrak{M}$, *consequentemente,* $\mathfrak{S}_1=(0)$. Este corolário só merece enunciado pela unidade que dá aos nossos raciocínios. Ele resulta, é certo, do teorema 17' de [14, § 5] mas traduz também propriedades imediatas da soma directa.

Passando a [14, § 6], podemos enunciar o

Teorema C': *Se* $\mathfrak{N}_1$ *e* $\mathfrak{N}_2$ *tiverem nilideais aniquiladores* $\mathfrak{S}_1$ *e* $\mathfrak{S}_2$, *então, supondo* $\mathfrak{N}=\mathfrak{N}_1\cap\mathfrak{N}_2$, $\mathfrak{M}=(\mathfrak{N}_1,\mathfrak{N}_2)$, *não existe sub-módulo* $\mathfrak{P}\supseteqq\mathfrak{N}$ *que possa ser aniquilador modular dum idempotente.* De facto, supondo $\mathfrak{P}\supseteqq\mathfrak{N}$, o ideal aniquilador de $\mathfrak{P}$ será $\mathfrak{C}\subseteqq\mathfrak{S}=\mathfrak{S}_1+\mathfrak{S}_2$. Sabemos que não há em $\mathfrak{S}$ elemento idempotente, pelo que o não haverá em $\mathfrak{C}$.

Em [(II), pgs. 35], encontra-se o enunciado que vai seguir-se:

Teorema 42': *Seja* $\mathfrak{M}$ *um módulo—*Ω *e suponhamos* $(0)=\mathfrak{N}_1\cap\cdots\cap\mathfrak{N}_h$, *com* $(\mathfrak{N}_i,(\mathfrak{N}_1\cap\cdots\cap\mathfrak{N}_{i-1}\cap\mathfrak{N}_{i+1},\cdots,\mathfrak{N}_h))=\mathfrak{M}$, $(i=1,2,\cdots,h)$. *Então, pondo* $\mathfrak{M}_i=\mathfrak{N}_1\cap\cdots\cap\mathfrak{N}_{i-1}\cap\mathfrak{N}_{i+1}\cap\cdots\cap\mathfrak{N}_h$, *conclui-se*: 1') $(\mathfrak{M}_i,\mathfrak{N}_i)=\mathfrak{M}$; 2') $\mathfrak{M}_i\cap\mathfrak{N}_i=(0)$; 3') $(\mathfrak{M}_1,\cdots,\mathfrak{M}_{i-1},\mathfrak{M}_{i+1},\cdots,\mathfrak{M}_h)=\mathfrak{N}_i$; 4') $(\mathfrak{M}_1,\cdots,\mathfrak{M}_h)=\mathfrak{M}$. Da demonstração, que é simples, vamos dar apenas a parte que prova 3'). Sem dúvida que $\mathfrak{M}_j\subseteqq\mathfrak{N}_i$, se $j\neq i$. Resta mostrar que cada $n_i\in\mathfrak{N}_i$ pode sempre ser escrito sob a forma $n_i=m_1+\cdots+m_{i-1}+m_{i+1}+\cdots+m_h$, $(m_j\in\mathfrak{M}_j)$. Dado n_i, se este elemento pertence a todos os $\mathfrak{N}_j$, então $n_i=0$ tem a forma indicada. Supondo, de contrário, que, por ex., é $\mathfrak{N}_k$, o primeiro

$\mathfrak{N}_j$ que não contém n_i, podemos escrever $n_i = n_{k_1} + m_{k_1}$, $(i \neq k_1)$. Vê-se que $n_{k_1} \in \mathfrak{N}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{N}_{k_1}$. Em seguida, seja $\mathfrak{N}_{k_2}$, $(i \neq k_2 > k_1)$, o primeiro $\mathfrak{N}_j$ que não contém n_{k_1}. Podemos escrever $n_{k_1} = n_{k_2} + m_{k_2}$, com $n_{k_2} \in \mathfrak{N}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{N}_{k_2}$, e também $n_i = n_{k_2} + m_{k_2} + m_{k_1}$. O raciocínio prossegue até se chegar a um n_{k_l}, com $i \neq k_l$, pertencente a todos os $\mathfrak{N}_j$. Nesse momento é $n_{k_l} = 0$ e $n_i = m_{k_1} + \cdots + m_{k_l}$, como se afirmou.

Em complemento, podemos dizer:

Teorema 43′: *Nas condições do teorema* 42′, *existem idempotentes* $E'_1, \cdots, E'_h$, *tais que:* 5′) $\mathfrak{N}_i$ *é o aniquilador modular de* E'_i *e o ideal direito aniquilador de* $\mathfrak{N}_i$ *é* $\mathfrak{s}'_i = E'_i \bar{\Omega}$; 6′) $1 = E'_1 + \cdots + E'_h$ *e* $E'_i E'_j = 0$, *se* $i \neq j$; 7′) $\bar{\Omega} = E'_1 \bar{\Omega} + \cdots + E'_h \bar{\Omega}$; 8′) *o ideal de contracções em* $\mathfrak{N}_i$ *é* $\mathfrak{n}_i = \bar{\Omega} E'_1 + \cdots + \bar{\Omega} E'_{i-1} + \bar{\Omega} E'_{i+1} + \cdots + \bar{\Omega} E'_h$; 9′) *o ideal direito aniquilador de* $\mathfrak{M}_i$ *é* $E'_1 \bar{\Omega} + \cdots + E'_{i-1} \bar{\Omega} + E'_{i+1} \bar{\Omega} + \cdots + E'_h \bar{\Omega}$; 10′) *o ideal de contracções em* $\mathfrak{M}_i$ *é* $\mathfrak{m}_i = \bar{\Omega} E'_i$. A afirmação 5′) resulta imediatamente do corolário D'. Em seguida, escrevamos, para $x \in \mathfrak{M}$, $x = m_1 + m_2 + \cdots m_h$, com $m_i \in \mathfrak{M}_i$. O corolário D' garante-nos também ser $\mathfrak{M}_i$ o aniquilador modular de $1 - E'_i$. Por isso, sendo $m_i = m_i E'_i + m_i (1 - E'_i)$, tem-se $m_i = m_i E'_i$. Nessas condições, é $x E'_i = m_i E'_i = m_i$, de sorte que $x (E'_1 + \cdots + E'_h) = x E'_1 + \cdots + x E'_h = m_1 + \cdots + m_h = x$. Por outro lado, $x E'_i E'_j = m_i E'_j = 0$, se $j \neq i$, pelo que 6′) fica provado. 7′) traduz uma propriedade elementar da teoria dos anéis; 8′), 9′) e 10′) encontram-se provados em [14, teor. 19 e 19′].

Nos dois teoremas, que ainda vamos estabelecer neste §, é introduzida a condição de máximo para os sub-módulos-Ω, de $\mathfrak{M}$.

Teorema 64′: *Se* $\mathfrak{M}$ *é um módulo-*Ω *com condição de cadeia ascendente e se* $\bar{\Omega}$ *não tem radical; então, admitindo que, para cada sub-módulo máximo* $\mathfrak{P} \neq \mathfrak{M}$, *é diferente de zero o ideal aniquilador* $\mathfrak{s}$, *podemos afirmar que* (0) *é intersecção dum certo número de sub-módulos máximos e que* $\mathfrak{M}$ *é completamente redutível.* Neste enunciado só oferece interesse o caso em que $\mathfrak{M}$ não é irredutível-Ω. Tomemos, em $\mathfrak{M}$, um sub-módulo máximo $\mathfrak{N}_1 \neq \mathfrak{M}$. O ideal $\mathfrak{s}_1$ não pode ser nilideal, pois que, se o fosse, seria nilpotente e de expoente 2, [14, teor. 16′], e $\bar{\Omega}$ teria radical não nulo. Por esse facto, $\mathfrak{N}_1$ é precisamente aniquilador modular dum idempotente $E_1 \in \mathfrak{s}_1$, [14, teor. 23′], tendo-se $\mathfrak{N}_1 E_1 = (0)$, $(0) = \mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{M} E_1 = \mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{N}'$, se $\mathfrak{N}' = \mathfrak{M} E_1$. E vê-se que $n_1 E_1 = 0$, $n' E_1 = n'$, $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}' + \mathfrak{N}_1$, sem esquecermos a relação $\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{M}(1 - E_1)$. Se $\mathfrak{N}'$ for máximo, o teorema está demonstrado, pois que ambas as parcelas de $\mathfrak{M}$ serão também sub-módulos simples. Se $\mathfrak{N}'$ não é máximo, tomemos $\mathfrak{N}_2 \supset \mathfrak{N}'$ e máximo. É, então, $\mathfrak{N}_2 E_2 = (0)$, $(0) = \mathfrak{N}_2 \cap \mathfrak{M} E_2 = \mathfrak{N}_2 \cap \mathfrak{N}''$, $\mathfrak{N}'' = \mathfrak{M} E_2$, $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}'' + \mathfrak{N}_2$, como anteriormente. E vê-se que o aniquilador modular de $E_1 E_2$ é $= \mathfrak{M}$, pois $\mathfrak{M} E_1 E_2 = \mathfrak{N}' E_2 \subseteqq \mathfrak{N}_2 E_2 = (0)$. É válida a igualdade $\mathfrak{N}' = \mathfrak{N}_2 \cap (\mathfrak{N}', \mathfrak{N}'') = \mathfrak{N}_2 \cap \mathfrak{Q}_1$, com $\mathfrak{Q}_1 = (\mathfrak{N}', \mathfrak{N}'')$, como vamos provar. Sem dúvida que $\mathfrak{N}'$ está contido no 2.º membro. Se, agora, $n_2 = n' + n''$ for um elemento do 2.º membro, do facto de ser $n_2 E_2 = 0 = 0 + n''$, concluímos $n_2 = n' \in \mathfrak{N}'$ como se deseja. E tem-se $(0) = \mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{N}_2 \cap \mathfrak{Q}_1$, ao mesmo tempo que, sendo $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}' + \mathfrak{N}_1$, é $\mathfrak{N}_2 = \mathfrak{N}' + \mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{N}_2$, $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}'' + \mathfrak{N}' + \mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{N}_2 = \mathfrak{Q}_1 + \mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{N}_2$, $\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{M} E_1 + \mathfrak{M} E_2$. Se $\mathfrak{Q}_1 \neq \mathfrak{M}$ é máximo, o teorema fica demonstrado, pois que, então, $\mathfrak{N}''$, $\mathfrak{N}'$ e $\mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{N}_2$ são simples. Se $\mathfrak{Q}_1$ não é máximo, o processo continua. Obtém-se $(0) = \mathfrak{N}_3 \cap \mathfrak{M} E_3 = \mathfrak{N}_3 \cap \mathfrak{N}'''$, $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}_3 + \mathfrak{N}'''$, $\mathfrak{M} E_1 E_3 = \mathfrak{M} E_2 E_3 = (0)$, pois que $\mathfrak{N}_3 \supset \mathfrak{Q}_1 = \mathfrak{M} E_1 + \mathfrak{M} E_2$. São válidas as igualdades $\mathfrak{N}_3 = \mathfrak{N}'' + \mathfrak{N}' + \mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{N}_2 \cap \mathfrak{N}_3$, $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}''' + \mathfrak{N}'' + \mathfrak{N}' + \mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{N}_2 \cap \mathfrak{N}_3 = \mathfrak{D}_2 + \mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{N}_2 \cap \mathfrak{N}_3$, $\mathfrak{Q}_2 = \mathfrak{M} E_1 + \mathfrak{M} E_2 + \mathfrak{M} E_3$. Se $\mathfrak{D}_2 \neq \mathfrak{M}$ é máximo, o teorema fica demonstrado, com $(0) = \mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{N}_2 \cap \mathfrak{N}_3 \cap \mathfrak{Q}_2$ e com a decomposição anterior para $\mathfrak{M}$. A cadeia $(0) \subset \mathfrak{N}' \subset \mathfrak{Q}_1 \subset \mathfrak{Q}_2 \subset \cdots$ é finita, de sorte que se chega a encontrar $\mathfrak{Q}_{n-2}$ máximo e tal que $(0) = \mathfrak{N}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{N}_{n-1} \cap \mathfrak{Q}_{n-2}$, $\mathfrak{M} = \mathfrak{Q}_{n-2} + \mathfrak{N}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{N}_{n-1}$, $\mathfrak{Q}_{n-2} = \mathfrak{M} E_1 + \cdots + \mathfrak{M} E_{n-1}$. Nesse momento, o sub-módulo simples $\mathfrak{N}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{N}_{n-1}$ tem a forma $\mathfrak{M} E_n$, vindo $\mathfrak{M} = \mathfrak{M} E_1 + \cdots + \mathfrak{M} E_n$. Os idempotentes E_i verificam as relações $E_i E_j = 0$, $(i < j; i = 1, \cdots, n-1; j = 1, \cdots, n)$.

Inversamente, se $\mathfrak{M}$ é um módulo completamente redutível, a condição de cadeia ascendente é válida, o radical do seu anel de endomorfismos é nulo, [10, pgs. 30; (II), pgs. 58 e seguintes], e, para cada sub-módulo máximo, o ideal aniquilador é $\neq (0)$. Portanto:

Teorema 65′: *As condições enunciadas no teorema* 64′ *são necessárias e suficientes, para que* $\mathfrak{M}$ *seja completamente redutível.*

Da comparação com os teoremas 36 e 37, de [10], resulta ainda que as mesmas condições são necessárias e suficientes para que valha em $\mathfrak{M}$ a condição de cadeia descendente, $\bar{\Omega}$ não tenha radical e seja diferente de zero o ideal de contracções num sub-módulo mínimo.

3. **Sobre anéis densos.** Trata-se de provar neste § o seguinte

Teorema: *Se* $\bar{\Omega}'$ *é um anel denso de endomorfismos-*Ω, *de* $\mathfrak{M}$, *e se* $\bar{\mathfrak{A}}$ *é um ideal bilateral de* $\bar{\Omega}'$ *que contém transformações lineares finitas, então, dado o sub-módulo-*$\bar{\Omega}$ *finito* $\mathfrak{N} \subseteqq \mathfrak{M}$, *há uma projecção* $E \in \bar{\mathfrak{A}}$, *de* $\mathfrak{M}$ *sobre* $\mathfrak{N}$. Convém observar que nenhuma hipótese se faz quanto à dimensionalidade de $\mathfrak{M}$, sobre $\bar{\Omega}$. No caso de $\mathfrak{N}=[x]$ ser um sub-módulo-Ω com uma única dimensão, Jacobson, [4], faz a demonstração como segue. Imaginemos $0 \neq B \in \bar{\mathfrak{A}}$ e $\mathfrak{M}B=$ $=[y_1,\cdots,y_n]$ um espaço finito com a base formada pelos elementos y_i, supostos independentes-Ω. Admitamos que $z_1 \in \mathfrak{M}$, $z_1 B = y_1$, $A_1 \in \bar{\Omega}'$, $y_1 A_1 = z_1$, $y_i A_1 = 0$, se $i \neq 1$. Vê-se que $\mathfrak{M}BA_1 = [y_1,\cdots,y_n]A_1 \subseteqq$ $\subseteqq [z_1]$, $z_1 B A_1 = z_1$, de sorte que $E_1 = B A_1 \in \bar{\mathfrak{A}}$ é idempotente e tal que $\mathfrak{M}E_1 = [z_1]$. Para se construir o idempotente E tal que $\mathfrak{M}E=[x]$, suponhamos $A_2, A_3 \in \bar{\Omega}'$, $z_1 A_2 = x$, $x A_3 = z_1$. Então, verifica-se que $\mathfrak{M}A_3 E_1 A_2 \subseteqq [z_1] A_2 = [x]$, $x A_3 E_1 A_2 = x$, de modo que $A_3 E_1 A_2 = E$ é precisamente o idempotente procurado, Passando ao caso em que $\mathfrak{N}=$ $=[x_1,\cdots,x_n]$, onde os x_i são independentes-Ω, imaginemos construídos idempotentes E'_i, $(i=1,2,\cdots,n)$, tais que $[x_1,\cdots,x_n] = \mathfrak{M}E'_1 + \cdots + \mathfrak{M}E'_n$, $\mathfrak{M}E'_i =$ $[x_i]$, $E'_i \in \bar{\mathfrak{A}}$. É fácil de construir um idempotente $F \in \bar{\mathfrak{A}}$ nas condições seguintes: $\mathfrak{M}E'_1 + \mathfrak{M}E'_2 =$ $\mathfrak{M}E'_1 + \mathfrak{M}F$, $E'_1 F = F E'_1 = 0$. Vejamos primeiramente que se tem $\mathfrak{M}E'_1 + \mathfrak{M}E'_2 = \mathfrak{M}E'_1 +$ $+\mathfrak{M}E'_2(1-E'_1)$ onde, 1 significa o endomorfismo idêntico. Um elemento do 2.º membro é da forma $mE'_1 +$ $+m'E'_2(1-E'_1) = (m - m'E'_2)E'_1 + m'E'_2$, $(m, m' \in \mathfrak{M})$, o que mostra pertencer ao primeiro. Inversamente, um elemento do 1.º membro é da forma $mE'_1 +$ $+m'E'_2 = mE'_1 + m'E'_2 + m'E'_2E'_1 - m'E'_2E'_1 =$ $=(m + m'E'_2)E'_1 + m'E'_2(1-E'_1)$, pelo que pertence ao segundo. O referido 2.º membro é uma soma directa. Como a sua 2.ª parcela não é nula e é de 1.ª ordem, designemos por $E''_1 \in \bar{\mathfrak{A}}$ um idempotente tal que $\mathfrak{M}E'_2(1-E'_1) = \mathfrak{M}E''_1$. Vê-se que $E''_1 E'_1 = 0$. Pondo, então, $F = E''_1 - E'_1 E''_1$, vem imediatamente $FE'_1 = E'_1 F = 0$, $FF = F$, $E''_1 F = E''_1$, $FE''_1 = F$, $\mathfrak{M}E''_1 = \mathfrak{M}E''_1 F \subseteqq \mathfrak{M}F$, $\mathfrak{M}F = \mathfrak{M}FE''_1 \subseteqq \mathfrak{M}E''_1$, e, portanto, $\mathfrak{M}E''_1 = \mathfrak{M}F$. Em seguida, o idempotente $E_1 = E'_1 + F$ é tal que $[x_1, x_2] = \mathfrak{M}E_1$. O processo continua, pondo $\mathfrak{M}E'_1 + \mathfrak{M}E'_2 + \mathfrak{M}E'_3 =$ $=\mathfrak{M}E_1 + \mathfrak{M}E'_3$. Chegamos a encontrar o idempotente G nas seguintes condições: $G \in \bar{\mathfrak{A}}$, $GE_1 =$ $=E_1 G = 0$, $\mathfrak{M}E_1 + \mathfrak{M}E'_3 = \mathfrak{M}E_1 + \mathfrak{M}G$, $\mathfrak{M}E'_1 +$ $+\mathfrak{M}E'_2 + \mathfrak{M}E'_3 = \mathfrak{M}E'_1 + \mathfrak{M}F + \mathfrak{M}G$. Vamos ver que os três idempotentes E'_1, F, G são ortogonais.

De facto,

$$E_1 E'_1 = E'_1,\quad E'_1 E_1 = E'_1,\quad G E_1 E'_1 = 0 = G E'_1,$$
$$E'_1 E_1 G = 0 = E'_1 G,\ E_1 F = F,\quad F E_1 = F,$$
$$G E_1 F = G F = 0,\quad F E_1 G = F G = 0.$$

Teremos, deste modo, $[x_1, x_2, x_3] = \mathfrak{M}E_1 + \mathfrak{M}G =$ $=\mathfrak{M}E_2$, $E_2 = E_1 + G = E'_1 + F + G$. O raciocínio prossegue, até à demonstração do teorema. Tem lugar este

Aditamento. *A projecção* $E \in \bar{\mathfrak{A}}$ *decompõe-se em projecções ortogonais* e_i *todas pertencentes a* $\bar{\mathfrak{A}}$, *de tal modo que*

$$\left.\begin{aligned}[x_1,\cdots,x_n] &= \mathfrak{M}E = \mathfrak{M}e_1 + \cdots + \mathfrak{M}e_n,\\ [x_1,\cdots,x_k] &= \mathfrak{M}e_1 + \cdots + \mathfrak{M}e_k,\end{aligned}\right.\quad \left\{\begin{aligned}& e_i e_k = 0,\ \text{se } i \neq k;\\ & k \lesseqgtr n.\end{aligned}\right.$$

4. Sobre a densidade dos anéis irredutíveis. Do teorema em causa neste §, que vai ser enunciado, a parte directa é provada como em [4]. O que tem principal interesse é a demonstração da parte inversa, à qual se é levado, rigorosamente falando, com um raciocínio devido a Chevalley, que se encontra em [3].

Teorema de Chevalley-Jacobson. *Seja* $\bar{\Omega}'$ *um anel denso arbitrário em* $\mathfrak{M}$, *sobre* Ω, *este suposto anel de divisão.* $\bar{\Omega}'$ *é anel irredutível e* Ω *é o seu comutador. Inversamente, se* $\bar{\Omega}'$ *é irredutível e o anel de divisão* Ω *é o seu comutador, então* $\bar{\Omega}'$ *é denso em* $\mathfrak{M}$, *sobre* Ω.

Partamos do anel denso $\bar{\Omega}'$ e suponhamos $(\mathfrak{M}/\Omega)=1$, isto é, $\mathfrak{M}$ de 1.ª ordem sobre Ω. Então, pois que $\mathfrak{M}$ é finito, o anel denso $\bar{\Omega}'$ é a totalidade dos endomorfismos-Ω, pelo que é o comutador de Ω. Podemos afirmar que $\bar{\Omega}'$ é anti-isomorfo de Ω. Escrevendo $\mathfrak{M} = x\bar{\Omega}'$, $(0 \neq x \in \mathfrak{M})$, pois que $\bar{\Omega}'$, por ser denso, é irredutível, procuremos também o comutador de $\bar{\Omega}'$. Como $\bar{\Omega}'$ é anel de divisão, o seu comutador é anel de divisão Θ, que contém Ω, e é anti-isomorfo de $\bar{\Omega}'$. Seja $d' \in \Theta$. Por se ter $xd' = xd$, para um certo $d \in \Omega$, vem, se $d' \neq d$, $x(d'-d)=0$, $x(d'-d)(d'-d)^{-1} =$ $=x=0$, o que é absurdo. Assim, $d'=d$, $d' \in \Omega$ e $\Theta = \Omega$. $\bar{\Omega}'$ e Ω são, portanto, comutadores recíprocos, no caso de $\mathfrak{M}$ ter uma só dimensão. Inversamente, se $\bar{\Omega}'$ é irredutível e Ω o seu comutador, na hipótese $(\mathfrak{M}/\Omega)=1$, $\bar{\Omega}'$ é denso em $\mathfrak{M}$ sobre Ω, sendo $\bar{\Omega}'$ e Ω comutadores recíprocos. O teorema encontra-se completamente demonstrado, no caso de $\mathfrak{M}$ ter uma só dimensão.

Suponhamos agora que isso não tem lugar e voltemos ao anel $\bar{\Omega}'$. Admitindo que B pertence ao comutador de $\bar{\Omega}'$, trata-se de provar que $B = b \in \Omega$. Seja $0 \neq x \in \mathfrak{M}$. Em primeiro lugar, x e xB são dependentes-Ω, visto que, de contrário, poderiamos encontrar $C \in \bar{\Omega}'$, nas condições seguintes: $xC=0$, $xBC \neq 0$, $xBC = xCB = 0$, o que é absurdo. Pondo $xB = xb_x$, onde $b_x \in \Omega$, vamos provar que, para $y \in \mathfrak{M}$ e qualquer, é também $yB = yb_x$. De facto, escolhamos $A \in \bar{\Omega}'$ de modo que seja $xA = y$. Então, $xAB = xBA = yB = xb_x A = xAb_x = yb_x$, como se quer. Demonstrado que b_x é independente de x, poremos $xB = xb$, o que prova a afirmação, pois, se $x=0$, $0 \cdot B = 0 \cdot b = 0$. A parte directa do teorema encontra-se, assim, com JACOBSON, completamente demonstrada. A parte inversa será provada deste modo: pois que $\mathfrak{M}$ não é de 1.ª ordem relativamente a Ω, começaremos por mostrar que, dados $x_1, \cdots, x_n, x_{n+1} \in \mathfrak{M}$ e independentes-Ω, é possível encontrar endomorfismos $B_1, \cdots, B_n, B_{n+1} \in \bar{\Omega}'$, para os quais $x_i B_i = x_i$, $x_j B_i = 0$, $(i \neq j; \ , j = 1, 2, \cdots, n+1)$, contanto que se admita existirem n endomorfismos A_i para os quais $x_1 A_1 = x_1, \cdots, x_n A_n = x_n$, $x_i A_j = 0$, se $i \neq j$, $(i, j = 1, 2, \cdots, n)$; depois, tendo em conta a irredutibilidade de $\bar{\Omega}'$ e a existência dos A_i, procuram-se $C_1, \cdots, C_n \in \bar{\Omega}'$ realizando as igualdades $x_1 C_1 = y_1, \cdots, x_n C_n = y_n$, onde os y_i são quaisquer elementos de $\mathfrak{M}$. O endomorfismo $C = \Sigma A_i C_i \in \bar{\Omega}'$ será tal que $x_1 C = y_1, \cdots, x_n C = y_n$, e a densidade de $\bar{\Omega}'$ ficará estabelecida.

DEMONSTRAÇÃO. Encontrados os A_i, $(i = 1, 2, \cdots, n)$, designaremos por $\mathfrak{S}$ o ideal direito aniquilador do sub-espaço $[x_1, \cdots, x_n]$. Para cada $x_0 \notin [x_1, \cdots, x_n]$, vamos ver que é $x_0 \mathfrak{S} \neq (0)$. Se for $x_0 \mathfrak{S} = (0)$, comecemos por fixar i e consideremos B tal que $x_i B = 0$. Então, sendo $x_i A_i B = x_i B = 0$ e $x_j A_i B = 0$, concluímos $A_i B \in \mathfrak{S}$ e $x_0 A_i B = 0$. A correspondência $x_i A \to x_0 A_i A$, $(A \in \bar{\Omega}'$ é qualquer), por ser $x_i \bar{\Omega}' = \mathfrak{M}$, é um endomorfismo de $\mathfrak{M}$, visto que, se se admitir $x_i A = x_i C$, é $x_i (A - C) = 0$, e, pela observação acabada de fazer quanto a B, é $x_0 A_i (A - C) = 0$, o que dá $x_0 A_i A = x_0 A_i C$. O referido endomorfismo é um endomorfismo-$\bar{\Omega}'$, que representaremos por $a_i \in \Omega$. Ele dá $x_i A \to x_i A a_i = x_0 A_i A$; $x_i = x_i A_i \to x_i A_i a_i = x_0 A_i A_i$; e, como $x_i (A_i^2 - A_i) = 0$, é $A_i^2 - A_i \in \mathfrak{S}$, $x_0 (A_i^2 - A_i) = 0$, $x_0 A_i A_i = x_0 A_i$. Posto isto, tomemos $D = \Sigma A_i$. Vale $x_j (A - DA) = x_j A - x_j A = 0$, $x_0 (A - DA) = (x_0 - x_0 D) A = 0$. E, como A é qualquer, tem-se $x_0 - x_0 D = 0$, $x_0 = x_0 D = x_0 \Sigma A_i$. Os endomorfismos-$\bar{\Omega}'$, representados por $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \Omega$, dão, assim, $x_0 = x_0 \Sigma A_i = x_0 \Sigma A_i A_i = \Sigma x_i A_i a_i = \Sigma x_i a_i \in [x_1, \cdots, x_n]$, contra a hipótese feita sobre x_0. Estabelecido que $x_0 \mathfrak{S} \neq (0)$, tem-se $x_0 \mathfrak{S} \bar{\Omega}' = \mathfrak{M}$, e, portanto, $x_0 \mathfrak{S} = \mathfrak{M}$. Existe $A_0 \in \mathfrak{S}$ para o qual $x_0 A_0 = x_0$. Também existem $A_i' \in \mathfrak{S}$, $(i = 1, 2, \cdots, n)$, para os quais $x_0 A_i = x_0 A_i'$. Pondo, então, $x_0 = x_{n+1}$, $A_0 = B_{n+1}$, $B_i = A_i - A_i'$, $(i = 1, 2, \cdots, n)$, vê-se que $x_{n+1} B_{n+1} = x_{n+1}$, $x_i B_{n+1} = x_i A_0 = 0$, $x_i B_i = x_i A_i - x_i A_i' = x_i$, $x_j B_i = x_j A_i - x_j A_i' = 0$, $(j \neq i)$. A demonstração está feita.