Über eine Kennzeichnung von Bogen minimalen Ordnungswertes(*)

von Otto Haupt
Universität Erlangen Deutschland

In dem Gesamtwerk von F. Gomes Teixeira finden sich zahlreiche Arbeiten, die sich mit ebenen Kurven und deren Differentialgeometrie beschäftigen. Es erscheint daher nicht unangemessen, dem Gedenken an den einhundertsten Geburtstag Teixeiras die Erörterung einer Fragestellung zu widmen, welche ihren Ausgangspunkt in Sätzen der ebenen Differentialgeometrie hat.

1. Unser Problem lässt sich an zwei bekannten Beispielen bequem erläutern.

1. 1. Es sei E_2 die euklidische Ebene. Ferner sei B ein offener (1) Konvexbogen in E_2, der *streckenfrei* ist (d. h. der keine Strecke enthält). Lassen wir irgend zwei Punkte p' und p'' von B gegen einen Punkt p von B konvergieren und konvergiert gleichzeitig die Verbindungsgerade von p' und p'' gegen eine Gerade P (durch p), so bezeichnen wir P als eine (Geraden—) $\mathfrak{g}$-*Paratingente* an B in p und p selbst als *Schmiegpunkt* von P auf B. Zwei Paratingenten Q', Q'' mit den *Schmiegpunkten* q', q'' (wobei $q'=q''$ zugelassen ist) liegen nun *gleichartig* in q' bzw. q'' zu B im folgenden Sinne: In einer (hinreichend kleinen) Umgebung von q' bzw. q'' (in E_2) liegen Q' bzw. Q'' ganz auf einer Seite von B und zwar beide auf der gleichen Seite; dabei können zwei verschiedene Seiten von B erklärt werden wie folgt: Man ergänze B zu einer einfachen geschlossenen beschränkten Kurve C (was für jeden einfachen Bogen (nicht nur für Konvexbogen) möglich ist) (1) und führe als die eine (etwa positive) bzw. als die andere (etwa negative) S e i t e von B das Innere bzw. das Äussere von C ein. Wir erinnern noch daran, dass B streckenfrei und konvex ist genau dann, wenn B bezüglich des Systems $\mathfrak{g}$ der Geraden in E_2 den ($\mathfrak{g}$—) Ordnungswert Zwei bezitzt, d. h. wenn B mit jeder Geraden höchstens zwei Punkte gemeinsam hat. Bezeichnet man allgemeiner als ($\mathfrak{g}$—) *Ordnungswert* eines Bogens das Maximum (falls es existiert) der Mächtigkeit des Durchschnittes des Bogens mit den Geraden, so ist der Ordnungswert Zwei das Minimum aller (überhaupt möglichen) Ordnungswerte. Unsere bisherigen Feststellungen besagen also

Satz: V o r. *Es sei* $\mathfrak{g}$ *das System aller Geraden des* E_2. *Ferner sei* B *ein offener Bogen* (*in* E_2) *vom* $\mathfrak{g}$—*Ordnungswert Zwei, d. h. vom minimalen* $\mathfrak{g}$—*Ordnungswert.* B e h. *Alle* $\mathfrak{g}$-*Paratingenten von* B *liegen gleichartig zu* B.

A n m e r k u n g (1) Es ist B notwendig streckenfrei, wenn B vom minimalen $\mathfrak{g}$-Ordnungswert Zwei ist. — (2) Man beachte folgendes: Jede $\mathfrak{g}$–Paratingente ist «freie» Tangente im Gegensatz zur Tangente im üblichen Sinne, der «gebundenen» Tangente, bei der einer der Punkte, etwa p'', stets gleich dem Grenzpunkt p ist. In einem Punkt q von B können unendlich viele Paratingenten (mit q als Schmiegpunkt) existieren. (Für Konvexbogen kann dies allerdings nur in abzähbar vielen Punkten eintreten; und genau in diesen Punkten gibt es dann mehrere gebundene Tangenten an den Konvexbogen und zwar genau zwei) (2).

---

* Eingegangen am 4/6/1951.

(1) Unter einem (einfachen, abgeschlossenen) *Bogen* A verstehen wir ein (beschränktes) topologisches Bild einer abgeschlossenen Strecke oder ev. der Kreisperipherie in den E_2; speziell bezeichnen wir ein topologisches Bild der Kreisperipherie auch als Kurve. Unter einem *offenen Bogen* verstehen wir ein topologisches Bild einer offenen Strecke.

(1) Vgl. z. B. B. v. Kerékjártó, *Vorl. über Topologie I*, (Berlin 1923) S. 69.

(2) Vgl. z. B. Haupt-Aumann-Pauc, *Diff. — und Integr. Rechn.* II. Bd. 2. Aufl. (Berlin 1950), Nr. 2. 2. 5.

Wir fragen nun, ob und in welcher Weise dieser Satz sich *umkehren* lässt. Dass, bei einer etwaigen Umkehrung des Satzes, an den Bogen B ausser der Forderung der gleichartigen Lage der g-Paratingenten noch weitere Forderungen zu stellen sind, zeigt das Beispiel etwa des durch $0<\varphi<2\pi$ bestimmten Teilbogens B der Archimedischen Spirale $r=\varphi, \varphi>0$; denn einerseits besitzt jeder Punkt p von B eine konvexe Umgebung auf B, andererseits gibt es etwa zur Geraden $\varphi=\pi/4$ beliebig benachbarte Geraden, welche mit B drei Punkte gemeinsam haben. Eine Forderung, durch welche derartige Vorkommnisse ausgeschlossen werden, lässt sich so formulieren: Es sei B irgendein offener streckenfreier Bogen in E_2; und es sei B in einem festen Sinne orientiert, d. h. mit einem festen Durchlaufungssinn versehen. Dann soll jede *Sekante* von B, d. h. jede Gerade G, die mit B mindestens zwei Punkte gemeinsam hat, normal orientierbar sein (zu B), d. h. für (mindestens, also für genau) eine (der beiden) Orientierung(en) von G soll diejenige lineare «Anordnung» der Punkte des Durchschnittes BG von B mit G, welche durch die feste Orientierung von B bestimmt ist, die gleiche sein wie diejenige, welche durch die in Rede stehende Orientierung von G bestimmt ist; eine «Anordnung» wird dadurch bestimmt, dass von je zwei Punkten feststeht, welcher «vor» bzw. «hinter» dem anderen liegt (und wenn die Relation «vor» bzw. «hinter» transitiv ist). Bei beliebigem Bogen B ist jede Sekante normal orientierbar, welche mit B genau zwei Punkte gemeinsam hat, dagegen nicht notwendig jede Sekante, welche mit B mindestens drei Punkte gemeinsam hat (vgl. den obigen Spiralbogen B).

Ausser der normalen Orientierbakeit der Sekanten benötigen wir noch die normale Orientierbarkeit der Paratingenten.

Diese erklären wir allgemein so: Es sei B wieder ein offener, streckenfreier Bogen in E_2, bezüglich dessen die Geraden normal orientierbar sind. Ferner sei P eine g-Paratingente an B im Schmiegpunkt p, d. h. es sei P Limes (etwa im metrischen Raum der Geraden) einer Folge von Sekanten G_ν. Wir betrachten auf P neben p noch einen (von p verschiedenen) nicht zu B gehörigen Punkt t (da B streckenfrei ist, existieren solche Punkte t auf P); es seien U_p und U_t Umgebungen von p bzw. t in E_2, von denen U_t sowohl zu U_p als zu B fremd ist. Für schliesslich alle ν ist dann sowohl $U_p BG_\nu$ als $U G_\nu$ nicht leer; es sei etwa $t_\nu \in U_t G_\nu$. Liegt nun t_ν für unendlich viele G_ν hinter (oder für unendlich viele) G_ν vor jedem Punkt von $U_p BG_\nu$, so werde P derart orientiert, dass t hinter bzw. vor p liegt auf P; und P heisst *normal orientierbar* bezüglich B, wenn diese Orientierung die gleiche ist für alle Geradenfolgen, die P zum Limes haben. Ist die Forderung der normalen Orientierbarkeit sowohl der Sekanten als der Paratingenten bezüglich B erfüllt, so sagen wir, es liege B n o r m a l zum S y s t e m g der Geraden; die Sekanten (bzw. die Paratingenten) bezeichnen wir genauer als g-S e k a n t e n (bzw. g-P a r a t i n g e n t e n).

Zwecks Formulierung der ins Auge gefassten Umkehrung des obigen Satzes müssen schliesslich in den Begriff «gleichartig gelegen zu B» noch weitere Fälle einbezogen werden. Auf jeder zu B normal orientierten g-Sekante oder g-Paratingente G unterscheiden wir die einseitigen Umgebungen eines Punktes q von BG in hintere und vordere Umgebungen je nachdem sämtliche Punkte dieser Umgebungen (abgesehen von q) hinter oder vor q liegen. Zwei Fälle sind möglich: *Erstens* es ist q *nicht* hinterer (oder nicht vorderer) Häufungspunkt von BG auf B (und G); es gibt dann auf G eine hintere (vordere) Umgebung von q, die, abgesehen von q, ganz auf der positiven oder ganz auf der negativen Seite von B liegt; je nachdem sprechen wir von q als von einem *hinteren* (*vorderen*) positiven oder negativen *Stützpunkt* von G auf B. *Zweitens* es ist q hinterer (vorderer) Häufungspunkt von BG auf B (und G), d. h. jede hintere (vordere) Umgebung U von q auf G enthält (unendlich viele) von q verschiedene Punkte aus BG. Dabei besteht folgende Alternative: *Entweder* gibt es ein U, das fremd ist zur negativen oder zur positiven Seite von B, dann bezeichnen wir q als *hinteren* (*vorderen*) positiven bzw. negativen *H-Stützpunkt* von G auf B; *oder* der Durchschnitt eines jeden U mit der positiven sowohl als mit der negativen Seite von B ist nicht leer, dann heisse q ein *hinterer* (*vorderer*) *H-Schnittpunkt*. Sind nun Q', Q'' zwei normal orientierte g-Sekanten oder g-Paratingenten, sind ferner q', q'' Punkte aus BQ', bzw. aus BQ'', so heissen Q' und P'' hinten gleichartig gelegen in q' bzw. q'' zu B, wenn folgendes stattfindet: Ist q' hinterer positiver oder negativer Stütz-oder H-Stützpunkt oder ist q' hinterer H-Schnittpunkt so auch q'' hinterer positiver bzw. negativer Stütz-bzw. H-Stützpunkt bzw. H-Schnittpunkt. Entsprechend wird die vorn gleichartige Lage definiert. Liegen q' und q'' hinten gleichartig *und* ebenso vorn gleichartig, so sagt man, es seien Q' bzw. Q'' g l e i c h a r t i g zu B g e l e g e n i n q' und q''.

Die fragliche Umkehrung des obigen Satzes lautet

Umkehrung. V o r. Es sei B ein streckenfreier offener Bogen, der normal liegt zum System g der Geraden. Ferner sollen alle (d. h. irgend zwei) g-Paratingenten in ihren Schmiegpunkten gleichartig liegen zu B. — Beh. *Es bezitzt* B *den minimalen* $\mathfrak{g}$-*Ordnungswert Zwei, ist also ein Konvexbogen.*

Anmerkung. In der Vor. wird nicht gefordert, dass jede Gerade nur endlich viele Punkte mit B gemeinsam haben oder dass B in jedem Punkt nur eine Paratingente besitzen soll.

1. 2. Als zweites, etwas weniger triviales Beispiel sei das folgende gewählt. Es bezeichne B einen offenen Teilbogen eines Ellipsenquadranten. Bekanntlich liegt B normal zum System $\mathfrak{c}$ der Kreise [1] (im Sinne der Definition in Nr. 1. 1.); dabei sind die $\mathfrak{c}$-Paratingenten an B identisch mit den Schmiegkreisen (Krümmungskreisen) im üblichen Sinne [2]. Und alle (d. h. irgend zwei) $\mathfrak{c}$-Paratingenten von B liegen gleichartig zu B in ihren Schmiegpunkten. Ferner bezitzt B den $\mathfrak{c}$-Ordnungswert Drei, d. h. jeder Kreis hat mit B höchstens drei Punkte gemeinsam. Daraus folgt aber schon die gleichartige Lage der $\mathfrak{c}$-Paratingenten. Es gilt nämlich allgemein der

Satz. Vor. Es sei B ein zum System $\mathfrak{c}$ der Kreise normaler Bogen vom (minimalen) $\mathfrak{c}$-Ordnungswert Drei. Keine $\mathfrak{c}$-Paratingente von B sei ein Nullkreis. — Beh. Alle $\mathfrak{c}$-Paratingenten liegen gleichartig zu B.

Anmerkung. Bis auf abzählblbar viele Ausnahmen existiert in jedem Punkt genau eine $\mathfrak{c}$-Paratingente.

Auch hier gilt die [3]

Umkehrung. Vor. Es sei B ein offener kreisbogenfreier, zum System $\mathfrak{c}$ der Kreise normaler Bogen. Alle $\mathfrak{c}$-Paratingenten von B sollen von Nullkreisen verschieden sein und in ihren Schmiegpunkten gleichartig zu B liegen. — Beh. *Es besitzt* B *den* $\mathfrak{c}$-*Ordnungswert Drei.*

2. Die in Nr. 1. 1. und Nr. 1. 2. angegebenen Sätze, einschliesslich ihrer Umkehrung, sind bereits so allgemein, dass — abgesehen von den Begriffen «System der Geraden» bzw. «Kreise» — sämtliche in ihnen auftretenden Begriffe topologischer Natur [4] sind. Die Beweise zeigen nun, dass an Eigenschaften des Systems der Geraden bzw. Kreise ebenfalls nur topologische benötigt werden. Man wird dadurch auf folgende Verallgemeinerung dieser Systeme geführt: Unter einem System $\mathfrak{k}$ von «Ordnungscharakteristiken» (kurz: OCh) C verstehe man eine gewisse Gesamtheit von Bogen (Kurven) etwa auf einer Kreisscheibe K, die je durch k Punkte eindeutig bestimmt sind ($k \geqslant 2$ feste, durch $\mathfrak{k}$ bestimmte natürliche Zahl) und sich stetig mit ihren Bestimmungspunkten ändern [1]. Für einen (innerhalb K gelegenen) offenen Bogen B erklärt man genau wie früher (Nr. 1. 1.: Fall $\mathfrak{k} = \mathfrak{g}$, $k = 2$, bzw. Nr. 1. 2.: Fall $\mathfrak{k} = \mathfrak{c}$, $k = 3$) die Begriffe: $\mathfrak{k}$-Paratingente, normal zu $\mathfrak{k}$ und gleichartig gelegen zu B; dabei möge hier der Kürze wegen *gefordert werden,* dass *jede* $\mathfrak{k}$-*Paratingente selbst OCh ist.* Definiert man schliesslich als $\mathfrak{k}$-Ordnungswert das Maximum (falls es existiert) der Mächtigkeiten des Durchschnitts von B mit den OCh, so ist k der minimale $\mathfrak{k}$-Ordnungswert. Es gilt dann in Verallgemeinerung von Nr. 1. 1. und 1. 2. der [2] rein topologische

Satz. Vor. *Es sei* B *ein offener Bogen, der keine Teilbogen einer OCh enthält. Ferner liege* B *normal zum System* $\mathfrak{k}$ *der OCh.* — Beh. *Folgende Aussagen sind gleichwertig* (1) *Es besitzt* B *den* $\mathfrak{k}$-Ord*nungswert* k; (2) *Alle* $\mathfrak{k}$-*Paratingenten von* B *liegen gleichartig zu* B *in ihren Schmiegpunkten.*

Anmerkung. (I) In den Vor. des Satzes wird weder die Eindeutigkeit der $\mathfrak{k}$-Paratingente in jedem Punkt von B gefordert noch die Endlichkeit der Durchschnitte von B mit den OCh. — (II) Der Satz lässt sich ferner verallgemeinern zu einem Theorem über Korrespondenzen auf B [3].

Bezüglich des an anderer Stelle zu führenden Beweises sei nur folgendes angedeutet: Es ist (2) aus (1) im wesentlichen mittels bekannter Methoden zu erschliessen. In ähnlicher Weise ergibt sich (1) aus (2) *falls* BC endlich ist für alle $C \in \mathfrak{k}$. Die Hauptlast des Beweises beruht also auf dem Nachweis, dass aus (2) die Endlichkeit aller BC folgt oder vielmehr, dass die Existenz eines unendlichen BC Anlass zum Auftreten zweier nicht gleichartig gelegener $\mathfrak{k}$-Paratingenten gibt.

(1) Zum System $\mathfrak{C}$ werden die Geraden gerechnet, nicht aber die Nullkreise.

(2) Hierzu sowie zum Folgenden vgl. z. B. Haupt-Aumann-Pauc, a. a. O., Nr. 2. 2. 6. 1.

(3) Für den etwas spezielleren Fall, dass B konvex ist sowie mit jedem Kreis höchstens endlich viele Punkte gemeinsam hat und in jedem Punkt genau eine $\mathfrak{C}$-Paratingente besitzt, ist der Satz des Textes und seine Umkehrung enthalten in einem früher angegebenen Resultat. Vgl. Haupt, Archiv d. Math. I (1948), S. 102 ff.; in Fussnote 5 dieser Arbeit ist das Zitat unter b) zu streichen.

(4) d. h. erklärbar mit Hilfe lediglich von Begriffen der Topologie des E_2.

(1) Genaueres bei Haupt, Monatsh. f. Math. u. Phys. **40** (1933) S. 1 ff..

(2) Dass in der Beh. des nachstehenden Satzes (2) aus (1) folgt, liesse sich vermutlich aus noch nicht veröffentlichten Sätzen von Herrn H. Haller entnehmen, welcher auch zeigt, das die Normalität von B schon aus (1) folgt. Vgl. auch H. Haller, Sitz. — Ber. d. Physik. — med. Sozietät zu Erlangen **69** (1937) S. 215 ff..

(3) Vgl. Haupt, Math. Nachr. **4** (1950), S 81 f., sowie M. Linsman, *Introduction à une Théorie abstraite usw.*, Mémoires Acad. Belgique Sci. XVII (1938).

3. Der in Nr. 2 formulierte Satz gestattet seiner Allgemeinheit wegen zahlreiche Anwendungen. Unter diesen sei nur noch die folgende genannt (1):

Vor. Es sei $y = f(x)$ eine eindeutige reelle endliche stetige Funktion der reellen Variablen x im (offenen) Intervall (a, b); das kartesische Bild von $y = f(x)$ sei B. Das System k der OCh sei das System der Parabeln (d. h. der kartesischen Bilder von) $y = a_{k-1} x^{k-1} + a_{k-2} x^{k-2} + \cdots$ höchstens $(k-1)$—ten Grades $(k > 2)$. Es enthalte B keinen Teilbogen einer OCh.

Beh. *Folgende Aussagen sind gleichwertig:* (1) *Der* k*—te Differenzenquotient von* f(x) *ist nirgends positiv oder nirgends negativ.* — (2) *Es bezitzt* B *den* 𝔨*-Ordnungswert* k. — (3) *Die* 𝔨*-Paratingenten an* B *(also die Schmiegparabeln höchstens* (k—1)*—ten Grades von* B) *liegen sämtlich gleichartig zu ihren Schmiegpunkten.*

(1) Zu nachstehender Beh., (1) und (2), vgl. Haupt-Aumann-Pauc, a. a. O., Nr. 2. 2. 2. 5. und 2. 2. 6. 2.