

## Un critère de continuité<sup>(\*)</sup>

par Renato Pereira Coelho

Nous n'avons pas trouvé dans les traités d'Analyse les plus répandus aucune mention du critère de continuité suivant, qui peut-être n'est pas sans utilité.

Soit  $f(P)$  une fonction réelle définie sur une région du plan et  $P_0$  un point de l'intérieur de cette région. Pour que  $f(P)$  soit continue en  $P_0$  il faut et il suffit que — après l'introduction dans ce plan d'un système de coordonnées polaires  $\rho$  et  $\theta$  dont l'origine est  $P_0$  — les deux conditions suivantes soient vérifiées :

$\alpha$ ) il y a une demi-droite  $\theta = \theta_0$  suivant laquelle  $f(P)$  est continue en  $P_0$

$\beta$ ) l'oscillation  $\omega(r)$  de  $f(P)$  sur les circonférences  $\rho = r$  tend vers zéro en même temps que  $r$ .

Pour démontrer cette proposition sous une forme un peu plus générale il est utile de considérer au lieu de bases de filtre, des familles, partiellement ordonnées et filtrantes à gauche, d'ensembles non vides de l'espace où la fonction est définie. Soit  $\{A_i; i \in I\}$  une telle famille et  $B_i = \bigcup_{j \leq i} A_j$ .  $\{B_i; i \in I\}$  est une base de filtre qui ne change pas si l'on remplace les ensembles  $A_i$  par des ensembles  $A'_i$  tels que  $A_i \subset A'_i \subset B_i$ . Inversement, quel que soit le filtre  $\mathcal{F}$ , une quelconque de ses bases forme, relativement à  $\subset$ , une famille  $\{A_i\}$ .

Le théorème dont il s'agit peut alors s'énoncer de la manière suivante.

**THÉORÈME.** Soit  $R$  un ensemble quelconque et  $\{A_i; i \in I\}$  une famille, partiellement ordonnée par  $\leq$  et filtrante à gauche, de sous-ensembles non vides de  $R$ . Soit  $\mathcal{F}$  le filtre engendré par cette famille de la façon indiquée ci-dessus et  $\mathcal{F}_0$  un filtre plus fin que  $\mathcal{F}$  et tel que

$\gamma$ ) quel que soit  $F_0 \in \mathcal{F}_0$  il y a un index  $i_0 \in I$  tel que  $A_i \cap F_0 \neq \emptyset$  si  $i \leq i_0$ . Soit  $f(x)$  une fonction

définie sur  $R$  et à valeurs dans un espace uniforme  $S$ . Dans ces conditions il faut et il suffit pour que

$$\lim_{\mathcal{F}} f(x) = l$$

que

$$\alpha') \lim_{\mathcal{F}_0} f(x) = l$$

et que

$\beta')$  quel que soit l'entourage  $U_1$  de  $S$  il y ait un index  $i_1$  tel que

$$f(A_i) \times f(A_i) \subset U_1 \text{ si } i \leq i_1.$$

La nécessité de la condition se démontre sans difficulté :  $\alpha')$  est un résultat bien connu [N. BOURBAKI, *Éléments de Mathématique*, II, p. 36] et pour démontrer  $\beta')$  il suffit de considérer un entourage symétrique  $U$  tel que  $\overset{\circ}{U} \subset U_1$  et un index  $i_1$  tel que  $f(B_{i_1}) \subset U$ .

Pour montrer que la condition est suffisante soit  $U$  un entourage quelconque de  $S$  et  $U_1$  un autre entourage tel que  $\overset{\circ}{U_1} \subset U$ . Soit  $F_0 \in \mathcal{F}_0$  tel que  $f(F_0) \subset U_1$  ( $l$ ) et  $i_0$  et  $i_1$  les indices correspondants, d'après  $\gamma$ ) et  $\beta')$  à  $F_0$  et  $U_1$ . Si  $j \leq i \leq i_0$ ,  $i_1$  il y a un point  $a_j \in A_j \cap F_0$ .

$(l, f(a_j)) \in U_1$  et  $\{f(a_j)\} \times f(A_j) \subset U_1$ . Par conséquent  $\{l\} \times f(A_j) \subset U$ ,  $\{l\} \times \bigcup_{j \leq i} f(A_j) \subset U$  et  $f(B_i) \subset U$  c. q. f. d.

On peut remarquer que la relation  $\gamma$ ) entre  $\mathcal{F}_0$  et  $\{A_i\}$  n'a pas été utilisée dans la première partie de la démonstration.

Quels que soient  $\mathcal{F}_0$  et  $\{A_i\}$ , il est toujours possible de considérer une nouvelle famille  $\{A'_i\}$  qui vérifie  $\gamma$ ) et  $A_i \subset A'_i \subset B_i$ , engendrant par suite le même filtre  $\mathcal{F}$ . Une méthode triviale est de poser  $A'_i = B_i$ . Une autre, qui peut conduire dans un plus grand nombre de cas à la vérification de la condition  $\beta')$ , est la suivante.

Soit  $\mathcal{G}$  une base quelconque du filtre  $\mathcal{F}_0$ . Quels que soient  $i \in I$  et  $G \in \mathcal{G}$ ,  $G \cap B_i \neq \emptyset$  parce que

(\*) Reçu le 8 Juin, 1951 — Ce travail a été présenté au « Congresso Luso-Espanhol para o Progresso das Ciências — Lisboa — 1950 », et n'a pas encore été publié.

$\mathcal{G} \subset \mathcal{F}_0$  et  $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_0$ . Alors il y a un  $i' \leq i$  tel que  $G \cap A_{i'} \neq O$ . Donné  $i$ , considérons seulement—s'il y en a—les  $G$  qui ne rencontrent pas  $A_i$  mais qui rencontrent un  $A_{i_0}$  avec  $i_0 < i$ . Pour chacun de ces  $G$  soit  $i'$  un index tel que  $G \cap A_{i'} \neq O$ . Soit  $A'_i$  la réunion de  $A_i$  avec tous ces  $A_{i'}$ .

Evidemment  $A_i \subset A'_i \subset B_i$ . Quel que soit  $F \in \mathcal{F}_0$

il y a un  $G \in \mathcal{G}$  et contenu dans  $F$ . Il y a un  $i_0$  tel que  $A_{i_0}$  rencontre  $G$ .

Alors  $G \cap A'_{i_0} \neq O$  et, si  $i < i_0$  et  $G \cap A_i = O$ , il y a, correspondant à ce  $G$ , un  $A_{i'} \subset A'_i$  tel que  $G \cap A_{i'} \neq O$ . Donc, quel que soit  $i \leq i_0$ ,  $G$  rencontre  $A'_i$  et par conséquent de la même propriété jouiront tous les  $F \in \mathcal{F}_0$ , c. q. f. d.