Un critère de continuité (*)

par Renato Pereira Coelho

Nous n'avons pas trouvé dans les traités d'Analyse les plus répandus aucune mention du critère de continuité suivant, qui peut-être n'est pas sans utilité.

Soit $f(P)$ une fonction réelle définie sur une région du plan et P_0 un point de l'intérieur de cette région. Pour que $f(P)$ soit continue en P_0 il faut et il suffit que — après l'introduction dans ce plan d'un système de coordonnées polaires ρ et θ dont l'origine est P_0 — les deux conditions suivantes soient vérifiées :

α) il y a une demi-droite $\theta=\theta_0$ suivant laquelle $f(P)$ est continue en P_0

β) l'oscillation $\omega(r)$ de $f(P)$ sur les circonférences $\rho=r$ tend vers zéro en même temps que r.

Pour démontrer cette proposition sous une forme un peu plus générale il est utile de considérer au lieu de bases de filtre, des familles, partiellement ordonnées et filtrantes à gauche, d'ensembles non vides de l'espace où la fonction est définie. Soit $\{A_i\,;\,i\in I\}$ une telle famille et $B_i=\bigcup_{j\leq} A_j$. $\{B_i\,;\,i\in I\}$ est une base de filtre qui ne change pas si l'on remplace les ensembles A_i par des ensembles A'_i tels que $A_i\subset A'_i\subset B_i$. Inversement, quel que soit le filtre $\mathcal{F}$, une quelconque de ses bases forme, relativement à $\subset$, une famille $\{A_i\}$.

Le théorème dont il s'agit peut alors s'ennoncer de la manière suivante.

Théorème. *Soit* R *un ensemble quelconque et* $\{A_i\,;\,i\in I\}$ *une famille, partiellement ordonnée par* $\leqslant$ *et filtrante à gauche, de sous-ensembles non vides de* R. *Soit* $\mathcal{F}$ *le filtre engendré par cette famille de la façon indiquée ci-dessus et* $\mathcal{F}_0$ *un filtre plus fin que* $\mathcal{F}$ *et tel que*

γ) *quel que soit* $F_0\in\mathcal{F}_0$ *il y a un index* $i_0\in I$ *tel que* $A_i\cap F_0\neq O$ *si* $i\leqslant i_0$. *Soit* f (x) *une fonction définie sur* R *et à valeurs dans un espace uniforme* S. *Dans ces conditions il faut et il suffit pour que*

$$\lim_{\mathcal{F}} f(x)=l$$

que

α′) $\lim_{\mathcal{F}_0} f(x)=l$

et que

β′) *quel que soit l'entourage* U_1 *de* S *il y ait un index* i_1 *tel que*

$$f(A_i)\times f(A_i)\subset U_1 \quad si \quad i\leqslant i_1 .$$

La nécessité de la condition se démontre sans dificulté : α′) est un résultat bien connu [N. Bourbaki, *Éléments de Mathématique*, II, p. 36] et pour démontrer β′) il suffit de considérer un entourage simétrique U tel que $\overset{2}{U}\subset U_1$ et un index i_1 tel que $f(B_{i_1})\subset U(l)$.

Pour montrer que la condition est suffisante soit U un entourage quelconque de S et U_1 un autre entourage tel que $\overset{2}{U_1}\subset U$. Soit $F_0\in\mathcal{F}_0$ tel que $f(F_0)\subset U_1(l)$ et i_0 et i_1 les indices correspondants, d'après γ) et β′) à F_0 et U_1. Si $j\leqslant i\leqslant i_0, i_1$ il y a un point $a_j\in A_j\cap F_0$.

$(l, f(a_j))\in U_1$ et $\{f(a_j)\}\times f(A_j)\subset U_1$. Par conséquent $\{l\}\times f(A_j)\subset U$, $\{l\}\times\bigcup_{j\leq i} f(A_j)\subset U$ et $f(B_i)\subset U(l)$ *c. q. f. d.*

On peut remarquer que la relation γ) entre $\mathcal{F}_0$ et $\{A_i\}$ n'a pas été utilisée dans la première partie de la démonstration.

Quels que soient $\mathcal{F}_0$ et $\{A_i\}$, il est toujours possible de considérer une nouvelle famille $\{A'_i\}$ qui vérifie γ) et $A_i\subset A'_i\subset B_i$, engendrant par suite le même filtre $\mathcal{F}$. Une méthode triviale est de poser $A'=B_i$. Une autre, qui peut conduire dans un plus grand nombre de cas à la vérification de la condition β′), est la suivante.

Soit $\mathcal{G}$ une base quelconque du filtre $\mathcal{F}_0$. Quels que soient $i\in I$ et $G\in\mathcal{G}$, $G\cap B_i\neq O$ parce que

(*) Reçu le 8 Juin, 1951 — Ce travail a été présenté au «Congresso Luso-Espanhol para o Progresso das Ciências — Lisboa — 1950», et n'a pas encore été publié.