GAZETA DE MATEMÁTICA
N.º 50 — Dezembro de 1951

As séries de termos quaisquer (*)

por **José Ribeiro de Albuquerque**

Universidade Técnica de Lisboa

Sejam $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \cdots$, números reais formando um conjunto numerável, bem ordenado de tipo de ordem ω. Supomos que na sucessão há números positivos e negativos, havendo uma infinidade numerável de termos de cada sinal. Percorrendo a sucessão evidentemente que os termos consecutivos de um mesmo sinal são em número finito.

Definição 1. Chamaremos *série de termos quaisquer* a série

$$(1) \qquad \Sigma) \qquad \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n + \cdots .$$

Se na série (1) somarmos os termos consecutivos do mesmo sinal, obtemos a série

$$(2) \qquad S) \qquad a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + (-1)^n a_n + \cdots$$

Em geral, uma série de termos alternadamente positivos e negativos é chamada uma *série alternada*. A série (2) será chamada *série alternada equivalente à série* (1).

Esta designação tem a sua razão de ser no seguinte

Teorema 1. *A série de termos quaisquer e a série alternada equivalente são da mesma natureza.*

Demonstração. Formemos as somas de termos consecutivos das duas séries (1) e (2)

$$(3) \qquad \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n, \cdots$$

$$(4) \qquad s_0, s_1, s_2, \cdots, s_n, \cdots$$

Toda a soma s_p é uma soma σ_q e portanto: se a série de termos quaisquer é convergente a série alternada equivalente também o é, e as somas são iguais.

Dada uma soma σ_{n_α}, ou ela é uma soma s_α, ou ela está compreendida entre duas somas s_α e $s_{\alpha+1}$ consecutivas e, fàcilmente se vê que

(5) $s_\alpha \leqslant \sigma_{n_\alpha} \leqslant s_{\alpha+1}$ se o último termo de σ_{n_α} é positivo,

(6) $s_\alpha \geqslant \sigma_{n_\alpha} \geqslant s_{\alpha+1}$ se o último termo de σ_{n_α} é negativo.

Depois de estabelecido isto, tomemos uma qualquer sub-sucessão de (3),

$$(7) \qquad \sigma_{n_{\alpha_1}}, \sigma_{n_{\alpha_2}}, \sigma_{n_{\alpha_3}}, \cdots, \sigma_{n_{\alpha_p}}, \cdots$$

e sejam

$$(8) \qquad \sigma_{n_{\alpha'_1}}, \sigma_{n_{\alpha'_2}}, \sigma_{n_{\alpha'_3}}, \cdots, \sigma_{n_{\alpha'_p}}, \cdots$$

os termos de (7) que terminam por uma parcela positiva; sejam

$$(9) \qquad \sigma_{n_{\alpha''_1}}, \sigma_{n_{\alpha''_2}}, \sigma_{n''_3}, \cdots, \sigma_{n_{\alpha''_p}}, \cdots$$

os termos de (7) que terminam por uma parcela negativa. Devido às relações (5) e (6), teremos pois:

$$(10) \qquad s_{\alpha'_1} \leqslant \sigma_{n_{\alpha'_1}} \leqslant s_{\alpha'_1+1}, s_{\alpha'_2} \leqslant \sigma_{n_{\alpha'_2}} \leqslant s_{\alpha'_2+1}, \cdots$$

$$(11) \qquad s_{\alpha''_1} \geqslant \sigma_{n_{\alpha''_1}} \geqslant s_{\alpha''_1+1}, s_{\alpha''_2} \geqslant \sigma_{n_{\alpha''_2}} \geqslant s_{\alpha''_2+1}, \cdots$$

e formemos as duas sucessões:

$$(12) \qquad s_{\alpha'_1}, s_{\alpha'_2}, \cdots$$

$$(13) \qquad s_{\alpha''_1+1}, s_{\alpha''_2+1}, \cdots .$$

Se em (12) há apenas um número finito de termos distintos, necessàriamente em (8) há apenas um número finito de termos distintos. Do mesmo modo, se em (13) há apenas um número finito de termos distintos, necessàriamente em (9) há apenas um número finito de termos distintos. Logo, se em (7) há uma infinidade de termos distintos (ou assim considerados) em (8) ou (9), ou em ambas, há uma infinidade de termos distintos, e o mesmo se passa em (12) e (13). Com os infinitos termos distintos de (12) e (13) forma-se uma sub-sucessão de (4) que é *minorante* da sub-sucessão (7). Da mesma maneira se formava uma *majorante*.

A sub-sucessão (7) vem enquadrada por duas sub-sucessões de (4). Podemos pois afirmar que: se a série alternada equivalente é convergente, a série de termos quaisquer também o é, e as somas são iguais.

A série de termos quaisquer e a série alternada equivalente são simultâneamente convergentes ou divergentes.

(*) Recebido em 1951, Agosto.

Se a série de termos quaisquer é indeterminada (Olivier-Cesàro), evidentemente também a série alternada equivalente o é. Neste caso, substituamos as sucessões (3) e (4) pelas seguintes:

$$(14) \qquad \sigma_0\,,\ \ 1/2\,(\sigma_0+\sigma_1)\,,\ \ 1/3\,(\sigma_0+\sigma_1+\sigma_2)\,,\ \ 1/4\,(\sigma_0+\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)\,,\cdots$$

$$(15) \qquad s_0\,,\ \ 1/2\,(s_0+s_1)\,,\ \ 1/3\,(s_0+s_1+s_2)\,,\ \ 1/4\,(s_0+s_1+s_2+s_3)\,,\cdots .$$

Como se sabe, se (14) e (15) tendem para limites finitos, as séries dizem-se simplesmente indeterminadas e os limites finitos, que se supõe existir, são as respectivas somas simplesmente generalizadas das duas séries (Cesàro).

Cada termo de (15) encontra-se em (14) e podemos afirmar que: se a série de termos quaisquer é simplesmente indeterminada, a série alternada equivalente também o é, e as somas simplesmente generalizadas são iguais.

Tendo em atenção as relações (5) e (6), também cada termo de (14) se pode enquadrar com dois termos de (15) e, em última análise, podemos afirmar que: se a série alternada equivalente é simplesmente indeterminada, a série de termos quaisquer também o é, e as somas simplesmente generalizadas são iguais.

Se as sucessões (14) e (15) são indeterminadas, o que sucederá sempre que não tenham limites finitos, podemos substitui-las pelas sucessões das médias aritméticas dos seus termos, e assim sucessivamente até obter alguma com limite finito, e então podemos afirmar que: se a série de termos quaisquer é n vezes indeterminada, a série alternada equivalente também o é, e inversamente, sendo iguais as somas n vezes generalizadas das duas séries.

O teorema fica assim completamente demonstrado.

O valor absoluto do termo geral da série de termos quaisquer pode tender para zero sem que o mesmo suceda na série alternada equivalente. Com efeito, se o número de termos consecutivos do mesmo sinal da série (1), for crescendo quando se avance na série, pode então suceder que $|\alpha_n|\to 0$, sem que $a_n\to 0$. Mas como cada termo da série alternada equivalente é um termo da série (1), ou uma soma de termos consecutivos do mesmo sinal, é evidente que:

Teorema 2. *Se o módulo do termo geral da série alternada equivalente tende para zero, também o módulo do termo geral da série de termos quaisquer tende para zero.*

Se o número de termos da série (1), que se encontram reunidos em cada termo da série (2), não excede um inteiro determinado p, então já se pode afirmar que: se o módulo do termo geral da série (2) tende para zero, também o módulo do termo geral da série (1) tende para zero.

De resto, esta última proposição é verdadeira com qualquer série posta no lugar da série (1).

*
* *

O teorema 1 é um teorema importante pois permite reduzir o estudo de uma série de termos quaisquer ao estudo da série alternada equivalente. Passaremos em seguida ao estudo das séries alternadas nas quais, para simplificar, se pode supor o primeiro termo sempre positivo.

Dadas duas séries de termos positivos,

$$S') \qquad a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{2k}+\cdots$$

$$S'') \qquad a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2k+1}+\cdots$$

se as duas séries são divergentes podemos comparar as velocidades com que divergem. Se S'_k e S''_k são as somas dos k primeiros termos de cada série, a primeira diverge mais ou menos velozmente que a segunda quando existindo $\lim\limits_{n=\infty}\dfrac{S'\,n}{S''\,n}$, este limite é infinito ou zero respectivamente. Se $\dfrac{S'\,n}{S''\,n}$ tende para um limite finito, não nulo, as duas séries são igualmente divergentes.

Se a fracção

$$\frac{S'_{m+p}-S'_m}{S''_{m+p}-S''_m}=\frac{a_{2m}+a_{2m+2}+\cdots+a_{2\,(m+p)-2}}{a_{2m+1}+a_{2m+3}+\cdots+a_{2\,(m+p)+1}}$$

tende para infinito ou zero quando $p\to\infty$, a primeira série diverge mais ou menos velozmente que a segunda. Se a fracção tende para um limite finito, não nulo, as duas séries são igualmente divergentes. Estas definições são equivalentes às anteriores por serem as séries da mesma natureza que os seus restos de ordem m prèviamente fixada. Tais definições são devidas a Cesàro.

Notemos agora que: se dado $\varepsilon>0$ a partir de certa ordem $m(\varepsilon)$ se tem

$$l-\varepsilon<\frac{a_{2k}}{a_{2k+1}}<l+\varepsilon$$

então

$$(l-\varepsilon)\,a_{2m+1}<a_{2m}<(l+\varepsilon)\,a_{2m+1}$$
$$(l-\varepsilon)\,a_{2m+3}<a_{2m+2}<(l+\varepsilon)\,a_{2m+3}$$
$$\cdots \qquad \cdots \qquad \cdots$$
$$(l-\varepsilon)\,a_{2\,(m+p)-1}<a_{2\,(m+p)-2}<(l+\varepsilon)\,a_{2\,(m+p)-1}$$

e somando

$$(l-\varepsilon)\,(a_{2m+1}+a_{2m+3}+\cdots+a_{2(m+p)-1})<$$
$$<(a_{2m}+a_{2m+2}+a_{2m+2}+\cdots+a_{2(m+p)-2})<$$
$$<(l+\varepsilon)\,(a_{2m+1}+a_{2m+}{}^{3}+\cdots+a_{2(m+p)-1})$$

e portanto

$$l-\varepsilon<\frac{a_{2m}+a_{2m+2}+\cdots+a_{2(m+p)-2}}{a_{2m+1}+a_{2m+3}+\cdots+a_{2(m+p)-1}}<l+\varepsilon$$

ou seja

$$l-\varepsilon<\frac{S'_{m+p}-S'_m}{S''_{m+p}-S''_m}<l+\varepsilon$$

qualquer que seja p independente de m. Conclui-se que: se $\lim\limits_{k=\infty}\frac{a_{2k}}{a_{2k+1}}=l$, então $\lim\limits_{p=\infty}\frac{S'_{m+p}-S'_m}{S''_{m+p}-S''_m}=l$.

Esta proposição é válida para l nulo, finito ou infinito.

Inversamente: se fixado m e dado $\varepsilon>0$, a partir de certa ordem $p(\varepsilon)$ se tem

$$l-\varepsilon<\frac{a_{2m}+a_{2m+2}+\cdots+a_{2(m+p)-2}}{a_{2m+1}+a_{2m+3}+\cdots+a_{2(m+p)-1}}<l+\varepsilon$$

$$l-\varepsilon<\frac{a_{2m}+a_{2m+2}+\cdots+a_{2(m+p+1)-2}}{a_{2m+1}+a_{2m+3}+\cdots+a_{2(m+p+1)-1}}<l+\varepsilon$$

$$\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots$$

também se tem

$$\begin{aligned}&(l-\varepsilon)(a_{2m+1}+a_{2m+3}+\cdots+a_{2(m+p)-1})<\\&<(a_{2m}+a_{2m+2}+\ldots+a_{2(m+p)-2})<\\&<(l+\varepsilon)(a_{2m+1}+a_{2m+3}+\ldots+a_{2(m+p)-1})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(l-\varepsilon)(a_{2m+1}+a_{2m+3}+\ldots+a_{2(m+p+1)-1})<\\&<(a_{2m}+a_{2m+2}+\ldots+a_{2(m+p+1)-2})<\\&<(l+\varepsilon)(a_{2m+1}+a_{2m+3}+\ldots+a_{2(m+p+1)-1})\end{aligned}$$

$$\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots$$

e subtraindo a primeira da segunda, a segunda da terceira, e assim sucessivamente, vem:

$$(l-\varepsilon)\,a_{2(m+p+1)-1}<a_{2(m+p+1)-2}<(l+\varepsilon)\,a_{2(m+p+1)-1}$$

$$(l-\varepsilon)\,a_{2(m+p+2)-1}<a_{2(m+p+2)-2}<(l+\varepsilon)\,a_{(2m+p+2)-1}$$

$$\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots$$

ou

$$l-\varepsilon<\frac{a_{2(m+p+1)-2}}{a_{2(m+p+1)-1}}<l+\varepsilon$$

a partir de certa ordem $p(\varepsilon)$. Conclui-se que: se $\lim\limits_{p=\infty}\frac{S'_{m+p}-S'_m}{S''_{m+p}-S''_m}=l$ então, é $\lim\limits_{k=\infty}\frac{a_{2k}}{a_{2k+1}}=l$. Esta proposição é válida para l nulo, finito ou infinito.

Temos assim:

Teorema 3. *Se* $\lim\limits_{p=\infty}\frac{S'_{m+p}-S'_m}{S''_{m+r}-S''_m}=l$ *então,*

$$\lim_{k=\infty}\frac{a_{2k}}{a_{2k+1}}=l\,,$$

e reciprocamente, qualquer que seja o valor de l nulo finito ou infinito.

Consideremos agora a série alternada

$S)\qquad a_0-a_1+a_2-a_3+a_4-a_5+\ldots+(-1)^n a_n+\cdots$

e sejam

$S')\qquad a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{2k}+\cdots$

$S'')\qquad a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2k+1}+\cdots$

as séries *componentes* formadas com os termos de um mesmo sinal. Com estas convenções temos as seguintes relações:

$$(16)\qquad S_{2k-1}=S_{2k}-a_{2k-1}\qquad S_{2k+1}=S_{2k}+a_{2k}$$

e por último

$$(17)\qquad S_{2k+1}=S'_{k+1}-S''_k.$$

Estas relações permitem estabelecer desde já alguns resultados sobre as séries alternadas.

Assim, podemos enunciar imediatamente o seguinte:

Teorema 4. *A série alternada é convergente (absolutamente) quando as séries componentes o fôrem, e a soma de $\Sigma(-1)^n a_n$ é a diferença das somas de Σa_{2K} e Σa_{2K+1}.*

Com efeito, se as séries componentes Σa_{2K} e Σa_{2K+1} forem convergentes, temos:

$$a_{2k}\to 0\qquad a_{2k+1}\to 0$$

e portanto $a_n\to 0$. As relações (16) dizem-nos que se S_{2k-1} e S_{2k} tiverem limites, terão limites iguais. A relação (17) garante-nos a existência desse limite único.

A série alternada é então absolutamente convergente, e a soma é a diferença das somas das séries componentes

c. q. d.

Teorema 5. *A série alternada é divergente quando uma só das séries componentes Σa_{2k} ou Σa_{2k+1} o fôr.*

A relação (17) mostra imediatamente que assim é. Basta supor que uma das séries componentes é divergente mas com o termo geral a tender para zero, e a outra série componente convergente, para havermos exemplos de séries alternadas que são divergentes mas para as quais o módulo do termo geral tende para zero.

Teorema 6. *Se as duas séries componentes Σa_{2k} e Σa_{2k+1} são divergentes, para a série alternada $\Sigma(-1)^n a_n$ ser convergente é necessário que: $a_n\to 0$ e $\frac{a_{n-1}}{a_n}\to 1$.*

Com efeito, da relação (17) vem:

$$S_{2k+1}=S'_{k+1}\left(1-\frac{S''_k}{S'_{k+1}}\right)=S''_k\left(\frac{S'_{k+1}}{S''_k}-1\right).$$

Por consequência, para que S_{2k+1} tenda para limite finito é necessário que

$$\lim \frac{S''_k}{S'_{k+1}} = \lim \frac{S'_{k+1}}{S''_k} = 1$$

e, pelo teorema 3, deverá ser: $\lim \frac{a_{n-1}}{a_n} = 1$. A necessidade de $a_n \to 0$ é sobejamente conhecida.

c. q. d.

Note-se que, com $a_n \to 0$, não pode $\frac{a_{n-1}}{a_n}$ tender para 1 *por valores menores que* 1.

Note-se ainda que, com $a_n \to 0$ e com $\frac{a_{n-1}}{a_n}$ a tender para 1 *por valores maiores* que 1, então, $a_n \to 0$ monòtonamente, e em tal caso a série alternada é convergente (série alternada decrescente).

Mais geralmente ainda, podemos provar que

Teorema 7. *Se numa série alternada* $\Sigma(-1)^n a_n$, *a partir de certa ordem, em valor absoluto, cada termo é igual ou maior que todos os seguintes salvo apenas os* q *primeiros que o seguem, então:* $a_n \to 0$ *é a condição necessária e suficiente de convergência (séries alternadas quase-decrescentes).*

Basta-nos provar a suficiência. Para isso, seja p um inteiro *impar* superior ao número inteiro q. Para facilidade suporemos que a propriedade do enunciado se verifica a partir do primeiro termo da série alternada. É sempre possível destacar da série dada, p séries nas condições seguintes:

$$\begin{aligned} & a_0 + (-1)^p a_p + \cdots + (-1)^{np} a_{np} + \cdots \\ & -a_1 + (-1)^{p+1} a_{p+1} + \cdots + (-1)^{np+1} a_{np+1} + \cdots \\ & a_2 + (-1)^{p+2} a_{p+2} + \cdots + (-1)^{np+2} a_{np+2} + \cdots \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & (-1)^{p-1} a_{p-1} + \cdots + (-1)^{(n+1)p-1} a_{(n+1)p-1} + \cdots \end{aligned}$$

Estas p séries, quando p é impar, são alternadas decrescentes e para elas é suficiente que $a_n \to 0$, para que sejam convergentes. Mas a soma destas p séries, isto é, a série cujo termo geral é a soma dos termos gerais de cada uma

$$u_n = (-1)^{np} a_{np} + (-1)^{np+1} a_{np+1} + \cdots + \\ + (-1)^{(n+1)p-1} a_{(n+1)p-1}$$

é uma série convergente. Porém, esta série é obtida da série alternada agrupando p a p os termos, sem lhes alterar a ordem. Desta observação resulta a convergência da série alternada.

c. q. d.

As séries que verifiquem a propriedade do enunciado do teorema anterior podem chamar-se *quase-decrescentes*; no caso particular de $q = 0$ o teorema anterior é o conhecido teorema clássico sobre as séries alternadas decrescentes.

Uma classificação das séries alternadas

Para simplificação do estudo das series alternadas é muito conveniente a seguinte classificação.

Seja

$$S) \qquad a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + (-1)^n a_n + \cdots$$

a série alternada proposta, e formemos as duas seguintes séries

$$(18) \qquad \Sigma') \quad a_0 - (a_1 - a_2) - (a_3 - a_4) - (a_5 - a_6) - \cdots \\ - (a_{2k+1} - a_{2k+2}) - \cdots$$

$$(19) \qquad \Sigma'') \quad (a_0 - a_1) + (a_2 - a_3) + (a_4 - a_5) + \cdots \\ + (a_{2k} - a_{2k+1}) + \cdots$$

As séries Σ' e Σ'' podem ser séries de termos dum mesmo sinal, isto é, a partir de certa ordem, os parêntesis, tanto numa série como na outra, têm um mesmo sinal em cada série.

Definição 2. A série alternada proposta será chamada *simplesmente alternada* se as correspondentes séries (18) e (19) forem séries de termos do mesmo sinal.

É fácil de ver que há apenas quatro tipos de séries simplesmente alternadas.

1.º tipo:

$$\Sigma') \quad a_0 - (a_1 - a_2) - \cdots - (a_{2k+1} - a_{2k+2}) - \cdots \\ \text{com } a_{2k+1} - a_{2k+2} \leqslant 0$$

$$\Sigma'') \quad (a_0 - a_1) + (a_2 - a_3) + \cdots + (a_{2k}\, a_{2k+1}) + \cdots \\ \text{com } a_{2k} - a_{2k+1} \geqslant 0$$

2.º tipo:

$$\Sigma') \quad -a_0 - (-a_1 + a_2) - (-a_3 + a_4) - \cdots \\ - (-a_{2k+1} + a_{2k+2}) - \cdots \\ \text{com } -a_{2k+1} + a_{2k+2} \geqslant 0$$

$$\Sigma'') \quad (-a_0 + a_1) + (-a_2 + a_3) + \cdots + (-a_{2k} + a_{2k+1}) + \cdots \\ \text{com } -a_{2k} + a_{2k+1} \leqslant 0$$

3.º tipo:

$$\Sigma') \quad a_0 - (a_1 - a_2) - (a_3 - a_4) - \cdots - (a_{2k+1} - a_{2k+2}) - \cdots \\ \text{com } a_{2k+1} - a_{2k+2} \geqslant 0$$

$$\Sigma'') \quad (a_0 - a_1) + (a_2 - a_3) + \cdots + (a_{2k} - a_{2k+1}) + \cdots \\ \text{com } a_{2k} - a_{2k+1} \geqslant 0$$

4.º tipo:

$$\Sigma') \quad -a_0 - (-a_1 + a_2) - (-a_3 + a_4) - \cdots \\ - (-a_{2k+1} + a_{2k+2}) - \cdots \\ \text{com } -a_{2k+1} + a_{2k+2} \leqslant 0$$

$$\Sigma'') \quad (-a_0 + a_1) + (-a_2 + a_3) + \cdots + (-a_{2k} + a_{2k+1}) + \cdots \\ \text{com } -a_{2k} + a_{2k+1} \leqslant 0.$$

O primeiro e segundo tipos são simétricos; o terceiro e quarto tipos são também simétricos. As séries simplesmente alternadas do terceiro e quarto tipos são decrescentes; inversamente, as séries alternadas decrescentes são simplesmente alternadas e do 3.º ou do 4.º tipos.

Supondo que o termo geral da série alternada proposta, tende em valor absoluto para zero, $a_n \to 0$, e supondo que ela é simplesmente alternada, então, se é do 3.º ou 4.º tipo será convergente; se é do 1.º ou 2.º tipo, e se for quase-decrescente, (Teor. 7), será convergente.

Uma série simplesmente alternada, $\Sigma(-1)^n a_n$, que pertence ao 1.º tipo, se as suas séries componentes, Σa_{2k} e Σa_{2k+1}, são convergentes, ela será convergente (absolutamente); se as suas séries componentes não são da mesma natureza, ela será divergente; se a sua série componente de termos menores, Σa_{2k+1}, for divergente, a outra série componente, Σa_{2k}, também é divergente, e, para a série alternada proposta ser convergente é necessário e suficiente que seja quase decrescente.

Com efeito, este último resultado encontra-se enunciado no teorema seguinte que vamos demonstrar:

TEOREMA 8. *Seja* $\Sigma(-1)^n a_n$ *uma série simplesmente alternada cujas séries componentes,* Σa_{2k}, *e* Σa_{2K+1}, ***são divergentes mas de termos gerais em valor absoluto a tender para zero: a condição necessária e suficiente para que a série alternada seja convergente é que ela seja quase-decrescente.***

A condição é suficiente como o prova o teor. 7. Vejamos pois que é também necessária. Para isso, suporemos que a série *não é* quase-decrescente, e portanto: dado um inteiro p por maior que ele seja, existe um k tal que: $a_{2k+1} < a_{2k+2p}$.

Sendo assim, vem: $\dfrac{a_{2k+2p}}{a_{2k+1}} > 1$. Mas, como $a_{2k+1} \to 0$, teremos:

$$\frac{a_{2k+2p}}{a_{2k+2p+1}} \geqslant \frac{a_{2k+2p}}{a_{2k+1}} > 1$$

Fazendo crescer p tanto quanto se queira, virá, se existir: $\lim\limits_{p=\infty} \dfrac{a_{2k+2p}}{a_{2k+2p+1}} = l > 1$. Portanto, se existir, será: $\lim\limits_{n=\infty} \dfrac{a_n}{a_{n+1}} > 1$, e então pelo teorema 6, a série alternada é divergente.

Logo, para $\Sigma(-1)^n a_n$ ser convergente é necessário que a série seja quase-decrescente.

c. q. d.

Com este teorema e com as observações que o precederam fica completamente esclarecida a natureza das séries simplesmente alternadas.

Suponhamos agora que alguma das séries (18) ou (19) é uma série de termos quaisquer. O teorema 1 permite substituí-la pela série alternada equivalente.

Definição 3. A série alternada proposta será chamada *duas-vezes alternada* se a série alternada equivalente for simplesmente alternada; ela será chamada *p-vezes alternada* se a série alternada p-vezes equivalente for simplesmente alternada.

Uma série alternada será chamada *infinitas-vezes alternada* se não é equivalente a nenhuma série simplesmente alternada.

Vejamos em que condições é que o estudo de uma série p-vezes alternada depende do estudo de uma outra série simplesmente alternada.

Seja dada uma série alternada, a série proposta

$$S^0) \qquad a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + (-1)^n a_n + \cdots$$

e formemos as duas séries

$$\Sigma'_0) \qquad a_0 - (a_1 - a_2) - (a_3 - a_4) - \cdots - (a_{2k+1} - a_{2k+2}) - \cdots$$

$$\Sigma''_0) \qquad (a_0 - a_1) + (a_2 - a_3) + \cdots + (a_{2k} - a_{2k+1}) + \cdots$$

e suponhamos que alguma delas é uma série de termos quaisquer; substituamo-la pela série alternada equivalente:

$$S') \qquad a'_0 - a'_1 + a'_2 - a'_3 + \cdots + (-1)^n a'_n + \cdots$$

à qual por sua vez correspondem as duas séries Σ'_1 e Σ''_1, que são séries de termos do mesmo sinal se e só se (definição 3) a proposta $S)$ é duas vezes alternada; caso contrário, passaremos a uma série $S'')$ alternada 2 vezes equivalente, à qual corresponderão as séries Σ'_2 e Σ''_2, etc., assim sucessivamente.

Se a série proposta $S)$ é p-vezes alternada; então, a série $S^{p-1})$ é a sua série alternada $(p-1)$-vezes equivalente, e esta série $S^{p-1})$ é simplesmente alternada.

Pelo teorema 2, se o valor absoluto do termo geral da série $S^{p-1})$, a_n^{p-1}, tende para zero também o termo geral da série Σ_{p-2} donde ela deriva, tende em valor absoluto para zero e, por consequência também $a_n^{p-2} \to 0$. Por último, segue-se que: $a_n \to 0$.

Viu-se, por conseguinte, que se o valor absoluto a_n^{p-1} do termo geral da série

$$S^{p-1}) \qquad a_0^{p-1} - a_1^{p-1} + a_2^{p-1} - a_3^{p-1} + \cdots + (-1)^n a_n^{p-1} + \cdots$$

tende para zero também, em valor absoluto, o termo geral de qualquer das séries

$$\Sigma'_{p-2}) \qquad a_0^{p-2} - (a_1^{p-2} - a_2^{p-2}) - (a_3^{p-2} - a_4^{p-2}) - \cdots - (a_{2k+1}^{p-2} - a_{2k+2}^{p-2}) - \cdots$$

$$\Sigma''_{p-2}) \qquad (a_0^{p-2} - a_1^{p-2}) + (a_2^{p-2} - a_3^{p-2}) + \cdots + \\ + (a_{2k}^{p-2} - a_{2k+1}^{p-2}) + \cdots$$

tenderá para zero e o mesmo se verificará com a série

$$S^{p-2}) \qquad a_0^{p-2} - a_1^{p-2} + a_2^{p-2} - a_3^{p-2} + \cdots + \\ + (-1)^n a_n^{p-2} + \cdots$$

Pelo teorema 1, a série $S^{p-1})$ é da mesma natureza que a série $\Sigma'_{p-2})$. Vamos agora demonstrar o seguinte

Teorema 9. *Com* $a_n^{p-2} \to 0$, *a condição necessária e suficiente de convergência da série* $S^{p-2})$ *é que uma só (qualquer) das séries* Σ'_{p-2} *ou* Σ''_{p-2} *seja também convergente.*

Com efeito, o teorema torna-se evidente observando que: se $a_n^{p-2} \to 0$ as duas séries Σ'_{p-2} e Σ''_{p-2} serão da mesma natureza, e, se convergentes, com a mesma soma. c. q. d.

Então, com $a_n^{p-1} \to 0$, vem (teor. 2) $a_n^{p-2} \to 0$. Em seguida (teor. 9), com $a_n^{p-2} \to 0$ as séries $S^{p-2})$ e $S^{p-1})$ são equivalentes. Mas, com $a_n^{p-2} \to 0$ vem: $a_n^{p-3} \to 0$ e (teors. 9 e 1) as séries $S^{p-3})$ e $S^{p-1})$ são equivalentes. Finalmente, podemos afirmar:

Teorema 10. *Se* $\Sigma(-1)^n a_n$ *é uma série* p-*vezes alternada; se a série* $\Sigma(-1)^n a_n^p$ *é a série alternada* p-*vezes equivalente; se o módulo* p-*vezes generalizado do termo geral da série,* a_n^p, *tender para zero; então, a série proposta é da mesma natureza da série simplesmente alternada* n-*vezes equivalente* $\Sigma(-1)^n a_n^p$.

Fica pois provado que o estudo de uma série alternada se reduz ao estudo de uma série simplesmente alternada.

Para este estudo ficar completo deveríamos ainda resolver os seguintes dois problemas:

P_1. Existem séries infinitas vezes alternadas? Caso afirmativo, construir um exemplo de tais séries. Era conveniente, a construção de uma série p-vezes alternada.

P_2. No caso de existirem, serão divergentes as séries infinitas vezes alternadas?