# *Invariantes afines de ciertas ternas de curvas en el espacio* [*]

por **Rebeca Cherep**

Universidad de La Plata, Argentina

**Introducción.** Para tres elementos curvilíneos de segundo orden ($E_2$) en el espacio ordinario ($S_3$), han sido obtenidos varios invariantes proyectivos por Buzano [1]. Este ha estudiado un caso completamente general que nosotros nos proponemos, en el presente trabajo, considerar desde el punto de vista afín, a la vez que lo ampliaremos con dos casos particulares. Obtendremos, como es inmediato, entre los invariantes afines los seis proyectivos hallados por Buzano; una interpretación métrica y afín de los nuevos invariantes completará en cada caso el estudio de los $3E_2$.

**1. Caso general.** Sean $P_1$, $P_2$ y $P_3$ los centros de $3E_2$ pertenecientes a las curvas alabeadas $C_1$, $C_2$ y $C_3$ respectivamente; supongamos que los planos osculadores a dichas curvas en esos puntos, se intersectan en un punto $O$ que no pertenece al plano $P_1 P_2 P_3$.

Si elegimos el sistema de coordenadas cartesianas de manera que el punto $O$ sea el origen y las rectas $OP_1$, $OP_2$ y $OP_3$ los ejes $x, y, z$ respectivamente, las expresiones de los $E_2$ con centro en los puntos $P_1$, $P_2$ y $P_3$ serán:

$$
(1.1)\qquad
\begin{aligned}
C_1:&\quad \begin{cases} y = a_1(x-h) + a_2(x-h)^2 + \cdots \\ z = b_1(x-h) + b_2(x-h)^2 + \cdots, \end{cases}\\
C_2:&\quad \begin{cases} x = c_1(y-k) + c_2(y-k)^2 + \cdots \\ z = d_1(y-k) + d_2(y-k)^2 + \cdots, \end{cases}\\
C_3:&\quad \begin{cases} x = e_1(z-j) + e_2(z-j)^2 + \cdots \\ y = f_1(z-j) + f_2(z-j)^2 + \cdots, \end{cases}
\end{aligned}
$$

donde $h$, $k$ y $j$ son las distancias $OP_1$, $OP_2$ y $OP_3$ respectivamente.

A fin de obtener los invariantes afines de segundo orden de las curvas $C_1$, $C_2$ y $C_3$ en la vecindad de los puntos $P_1$, $P_2$ y $P_3$, debemos considerar la transformación afín más general que deje invariante los ejes; será:

$$(1.2)\qquad x = \alpha X, \qquad y = \beta Y, \qquad z = \gamma Z,$$

donde $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ son constantes arbitrarias. Por esta transformación, los puntos $P_1\,(h, 0, 0)$, $P_2\,(0, k, 0)$ y $P_3\,(0, 0, j)$ pasan a los puntos de coordenadas: $(h/\alpha, 0, 0)$, $(0, k/\beta, 0)$ y $(0, 0, j/\gamma)$ respectivamente; de ello se obtienen las siguientes relaciones:

$$(1.3)\qquad \alpha = \frac{h}{H} \qquad \beta = \frac{k}{K} \qquad \gamma = \frac{j}{J}$$

siendo $H$, $K$, y $J$ las distancias entre los puntos transformados de $P_1$, $P_2$ y $P_3$ y el punto $O$.

Introduciendo (1.2) en las (1.1) hallamos las ecuaciones de los $E_2'$, transformados de los $E_2$, a saber:

$$
\begin{aligned}
Y &= A_1(X-H) + A_2(X-H)^2 + \cdots\\
Z &= B_1(X-H) + B_2(X-H)_2 + \cdots,\\
X &= C_1(Y-K) + C_2(Y-K)^2 + \cdots\\
Z &= D_1(Y-K) + D_2(Y-K)^2 + \cdots,\\
X &= E_1(Z-J) + E_2(Z-J)^2 + \ldots\\
Y &= F_1(Z-J) + F_2(Z-J)^2 + \cdots,
\end{aligned}
$$

donde los coeficientes $A_1, A_2, B_1, \cdots$, etc. están dados por el siguiente sistema de ecuaciones:

$$
\begin{array}{lll}
\beta A_1 = a_1 \alpha & \alpha E_1 = e_1 \gamma & \alpha C_2 = c_2 \beta^2 \\
\gamma B_1 = b_1 \alpha & \beta F_1 = f_1 \gamma & \gamma D_2 = d_2 \beta^2 \\
\alpha C_1 = c_1 \beta & \beta A_2 = a_2 \alpha^2 & \alpha E_2 = e_2 \gamma^2 \\
\gamma D_1 = d_1 \beta & \gamma B_2 = b_2 \alpha^2 & \beta F_2 = f_2 \gamma^2
\end{array}
$$

Eliminando los parámetros $\alpha, \beta, \gamma$ de estas ecuaciones, se obtienen los siguientes 9 invariantes afines independientes:

$$I_1 = a_1 c_1 \qquad I_2 = b_1 e_1 \qquad I_3 = d_1 f_1$$

(*) Recibido en 29 de Setiembre de 1951.

(1) «*Osservazioni intorno agli invarianti proiettivi di elementi curvilinei*». Atti della Accademia delle Scienze di Torino. Vol. 81-82, pp. 109-113.

$$I_4=\frac{b_1\,c_2}{d_2}\qquad I_5=\frac{a_1\,e_2}{f_2}\qquad I_6=\frac{d_1\,a_2}{b_2}$$

$$I_7=\frac{a_2^2\,c_2}{b_2^2\,e_2}\qquad I_8=\frac{d_2^2\,f_2}{c_2^2\,a_2}\qquad I_9=\frac{e_2^2\,b_2}{f_2^2\,d_2}.$$

Los tres primeros invariantes dependen sólo parcialmente de los $E_2$ considerados ya que dependen únicamente de los tres planos osculadores (elección del origen $O$); los otros seis dependen totalmente de los $E_2$.

Una sencilla combinación de los invariantes hallados conduce a la obtención de los invariantes proyectivos determinados por Buzano.

Para consideraciones posteriores será útil introducir los seguientes invariantes, dependientes de los anteriores:

$$i_1=\frac{a_1 d_1}{b_1}\qquad i_2=\frac{e_1\,d_1}{c_1}\qquad i_3=\frac{a_1\,e_1}{f_1}$$

$$i_4=\frac{c_1\,f_2}{e_2}\qquad i_5=\frac{f_1\,b_2}{a_2}\qquad i_6=\frac{e_1\,d_2}{c_2}$$

$$i_7=a_1\,d_1\,e_1\qquad i_8=b_1\,c_1 f_1\qquad i_9=\frac{a_2\,d_2\,e_2}{b_2\,c_2\,f_2}.$$

*Interpretación métrica y afín:* Para dar una caracterzación afín de los invariantes obtenidos, llamemos $t_1, t_2, t_3$, $\pi_1, \pi_2$ y $\pi_3$ a las rectas tangentes y planos osculadores de las curvas $C_1$, $C_2$ y $C_3$ en los puntos $P_1$, $P_2$ y $P_3$ respectivamente. Las condiciones de paralelismo entre esas rectas y de pertenencia entre rectas y planos se expresa brevemente por el siguiente cuadro:

| | $t_1$ | $t_2$ | $t_3$ | $\pi_1$ | $\pi_2$ | $\pi_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $t_1$ | | $I_1=1$, $i_1=1$ | $I_2=1$, $i_2=1$ | | $I_4=1$ | $I_5=1$ |
| $t_2$ | $I_1=1$, $i_1=1$ | | $I_3=1$, $i_3=1$ | $I_6=1$ | | $i_4=1$ |
| $t_3$ | $I_2=1$, $i_2=1$ | $I_3=1$, $i_3=1$ | | $i_5=1$ | $i_6=1$ | |

Para la interpretación afín del invariante $i_9$ consideremos los siguientes planos que pasam por $OP_1$:

1) Plano $O\,P_1\,P_3$ $(y=0)$,

2) Plano $O\,P_1\,P_2$ $(z=0)$,

3) Pano osculador $\pi_1$ $(b_2\,y-a_2\,z=0)$ y

4) Plano determinado por $OP_1$ y la recta $r$ intersección de los planos osculadores $\pi_2$ y $\pi_3$ $(e_2\,d_2\,y-f_2\,c_2\,z=0)$.

Su relación doble es: $\left(\infty, 0, \frac{b_2}{a_2}, \frac{e_2\,d_2}{f_2\,c_2}\right)=\frac{a_2\,e_2\,d_2}{b_2\,c_2\,f_2}$ que coincide precisamente con el invariante $i_9$. Es interessante hacer notar que esta relación doble hubiese sido la misma si se hubiesen tomado los planos correspondientes que pasen por $OP_2$ u $OP_3$.

Buzano, en el trabajo citado, ha demostrado que considerando las distancias $\Delta_{ij}$ $(i, j=1, 2, 3)$ desde el punto $P_i$ al plano osculador en $P_j$, la razón $-\frac{\Delta_{13}\,\Delta_{32}\,\Delta_{21}}{\Delta_{12}\,\Delta_{23}\,\Delta_{31}}$ es un invariante proyectivo. Por tanto, es también afín y tomando el caso particular en que el triedro $(O: P_1, P_2\,P_3)$ es ortogonal se comprueba de inmediato que este invariante coincide con nuestro $i_9$.

Para dar ahora una caracterización métrica de los invariantes $i_7$ e $i_8$ determinemos los puntos $R$, $S$ y $T$ en qne las rectas tangentes $t_1$, $t_2$ y $t_3$ intersectan a los planos $x=0$, $y=0$, $z=0$ respectivamente. Siendo $\vartheta$ el ángulo $OP_1 . OP_2$ y $\varphi$ el ángulo que forma $OP_3$ con su proyección sobre el plano $OP_1\,P_2$, el volumen del tetraedro de vértices $O, R, S, T$ se pnede expresar en la forma:

$$V=\frac{1}{6}\,h k j\,(i_7+i_8)\ \text{sen}\,\vartheta\ \text{sen}\,\varphi\,.$$

**2. Ternas de curvas que se cortan en un punto ordinario.** Sea $O$ el punto de intersección de tres curvas alabeadas $C_1$, $C_2$ y $C_3$ cuyas rectas tangentes en dicho punto las indicaremos con $t_1$, $t_2$ y $t_3$ respectivamente.

Si elegimos el sistema de coordenadas con centro en $O$ y los ejes $x, y, z$ coincidentes con las tangentes $t_1, t_2$ y $t_3$, las expresiones según series de potencias de las curvas $C_1$, $C_2$ y $C_3$ en el entorno del punto $O$ son:

$$(2.1)\qquad C_1:\ \begin{array}{l} y=a_2\,x^2+\cdots \\ z=b_2\,x^2+\cdots, \end{array}\qquad C_2:\ \begin{array}{l} x=c_2\,y^2+\cdots \\ z=d_2\,y^2+\cdots, \end{array}\qquad C_3:\ \begin{array}{l} x=e_2\,z^2+\cdots \\ y=f_2\,z^2+\cdots, \end{array}$$

Aplicada la transformación afín (1.2) que deja invariante los ejes, las curvas (2.1) se transforman en las siguientes:

$$\begin{array}{ll} Y=A_2\,X^2+\cdots & X=C_2\,Y^2+\cdots \\ Z=B_2\,X^2+\cdots, & Z=D_2\,Y^2+\cdots, \end{array}$$

$$\begin{array}{l} X=E_2\,Z^2+\cdots \\ Y=F_2\,Z^2+\cdots, \end{array}$$

donde los coeficientes $A_2, B_2, \cdots$, etc., están dados por el sistema:

$$\beta A_2=a_2\,\alpha^2\qquad \alpha\,C_2=c_2\,\beta^2\qquad \alpha\,E_2=e_2\,\gamma^2$$

$$\gamma B_2 = b_2\,\alpha^2 \qquad \gamma D_2 = d_2 \beta^2 \qquad \beta F_2 = f_2 \gamma^2$$

La eliminación de los parámetros $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ conduce a los siguientes 3 invariantes afines de segundo orden:

$$J_1 = \frac{a_2^2 c_2}{b_2^2 e_2} \qquad J_2 = \frac{d_2^2 f_2}{c_2^2 a_2} \qquad J_3 = \frac{e_2^2 b_2}{f_2^2 d_2}.$$

Introduciremos en lugar de los invariantes precedentes el siguiente:

$$J = J_1 J_2 J_3 = \frac{a_2 d_2 e_2}{b_2 c_2 f_2}.$$

*Interpretación métrica y afín del invariante $J$:* Analogamente a lo hecho en el § 1, consideremos los siguientes planos que pasan por la recta tangente a la curva $C_1$ en el punto $O$ (eje $x$):

1) Plano que contiene a la tangente a $C_3$ (eje $z$): $y = 0$.

2) Plano que contiene a la tangente a $C_2$ (eje $y$): $z = 0$.

3) Plano osculador a $C_1$ en el punto $O$: $b_2 y - a_2 z = 0$.

4) Plano que contiene a la recta intersección de los planos osculadores a las curvas $C_2$ y $C_3$ en el punto $O$: $e_2 d_2 y - f_2 c_2 z = 0$.

Su relación doble es: $\left(\infty, 0, \frac{b_2}{a_2}, \frac{d_2 e_2}{c_2 f_2}\right) = \frac{a_2 d_2 e_2}{b_2 c_2 f_2}$ valor que coincide con el invariante $J$.

De la relación anterior resulta evidente la siguiente conclusión: *Los planos osculadores a las curvas* $C_1$, $C_2$ y $C_3$ *en el punto* O, *forman un haz cuando el invariante* J *es igual a* 1.

Además, como ya hicimos notar en el parágrafo anterior, la relación doble se mantiene igual si se toman los planos correspondientes que pasan por las otras dos tangentes, es decir: *Dadas tres curvas* $C_i$ $(i=1,2,3)$ *que pasan por un punto* O, *si se indican con* $t_i$ *y* $\pi_i$ *las rectas tangentes y los planos osculadores a dichas curvas en el punto* O *y con* $r_{ij}$ $(i \neq j)$ *las intersecciones de los planos* $\pi_i$ *y* $\pi_j$, *la relación doble del haz de planos* $t_i t_j$, $t_i t_k$, $\pi_i$, $t_i r_{jk}$, *es siempre igual al invariante* J.

A fin de dar una caracterización métrica del invariante J, veamos las expresiones de las rectas $r_{ij}$ introducidas más arriba:

$$r_{12}: \begin{cases} d_2 x = c_2 z \\ b_2 y = a_2 z \end{cases} \qquad r_{13}: \begin{cases} f_2 x = e_2 y \\ a_2 z = b_2 y \end{cases}$$

$$r_{23}: \begin{cases} e_2 y = f_2 x \\ c_2 z = d_2 x \end{cases}.$$

Llamemos $M_1$, $M_2$ y $M_3$ a los puntos en que estas rectas intersectan a los planos $z = \lambda$, $y = \lambda$, $x = \lambda$, respectivamente. Llamando $\vartheta$ al ángulo $t_1 t_2$ y $\varphi$ al ángulo formado por $t_3$ y su proyección sobre el plano $t_1 t_2$, el volumen del tetraedro de vértices $O$, $M_1$, $M_2$, $M_3$, se expresa entonces, en función del invariante $J$ de la siguiente manera:

$$J = \frac{\lambda^3}{6}\frac{(J-1)^2}{J} \operatorname{sen}\vartheta \operatorname{sen}\varphi.$$

3. **Ternas de curvas con una tangente común en un punto ordinario.** Para mayor sencillez consideremos que las tres curvas pasan por un punto $O$ donde tienen la misma recta tangente $t$. Si elegimos el sistema de coordenadas de manera que el origen sea el punto $O$, que el eje $x$ coincida con la tangente $t$ y que los planos $z=0$, $y=0$ coincidan con los planos osculadores a las curvas $C_1$, $C_2$ en el punto $O$, entonces las expresiones en series de potencias de las curvas en el entorno del punto $O$, son las siguientes:

$$(3.1) \qquad C_1: \begin{cases} y = a_2 x^2 + \cdots \\ z = \qquad b_3 x^3 + \cdots \end{cases} \qquad C_2: \begin{cases} y = \qquad c_3 x^3 + \cdots \\ z = d_2 x^2 + \cdots, \end{cases}$$

$$C_3: \begin{cases} y = e_2 x^2 + \cdots \\ z = f_2 x^2 + \cdots, \end{cases}$$

Para determinar los invariantes afines correspondientes a los elementos de segundo orden de las curvas $C_1$, $C_2$ y $C_3$ en el punto $O$, tomemos la transformación afín más general que conserve el origen y los planos $xy$ y $xz$, ésta será la siguiente:

$$(3.2) \qquad x = \alpha X + \beta Y + \gamma Z, \qquad y = \delta Y, \qquad z = \varepsilon Z$$

siendo $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\varepsilon$ constantes arbitrarias.

Aplicada la transformación (3.2) a las curvas (3.1), éstas se transforman en las siguientes:

$$\begin{array}{ll} Y = A_2 X^2 + \cdots & Y = \qquad C_3 X^3 + \cdots \\ Z = \qquad B_3 X^3 + \cdots, & Z = D_2 X^2 + \cdots, \end{array}$$

$$Y = E_2 X^2 + \cdots$$
$$Z = F_2 X^2 + \cdots,$$

donde los coeficientes $A_2$, $D_2$, $E_2$ y $F_2$ están dados por el sistema:

$$\delta A_2 = a_2 \alpha^2 \qquad \delta E_2 = e_2 \alpha^2$$
$$\varepsilon D_2 = d_2 \alpha^2 \qquad \varepsilon F_2 = f_2 \alpha^2.$$

La eliminación de los parámetros $\alpha$, $\delta$ y $\varepsilon$ de estas ecuaciones indica que: el único invariante afín determinado por los elementos de segundo orden de las curvas $C_1$, $C_2$ y $C_3$ en el punto $O$ es el siguiente:

$$I = \frac{a_2 f_2}{d_2 e_2}.$$

*Interpretación métrica y afín del invariante $I$:* Para la caracterización métrica y afín del invariante $I$, se puede considerar a éste como el producto de los dos invariantes que resultan al proyectar las curvas $C_1$ y $C_3$ paralelamente al eje $z$ sobre el plano $z=0$ y las curvas $C_2$ y $C_3$ paralelamente al eje y sobre el plano $y=0$. Los dos pares de curvas planas serán:

$$C_1' : \quad y = a_2 x^2 + \cdots , \qquad C_2'' : \quad z = d_2 x^2 + \cdots ,$$

$$C_3' : \quad y = e_2 x^2 + \cdots , \qquad C_3'' : \quad z = f_2 x^2 + \cdots ,$$

y sus respectivos invariantes:

$$I' = \frac{a_2}{e_2} \qquad I'' = \frac{f_2}{d_2}$$

o sea:

$$I = I' I'' . \quad (1)$$

Los invariantes $I'$ e $I''$ han sido obtenidos y caracterizados por L. A. SANTALÓ en «*Affine Invariants of Certain Pairs of Curves and Surfaces*», Duke Math. Journal; Vol. 14, 3, 1947.

(1) Hacemos notar que los invariantes $I'$ e $I''$ son también invariantes de las curvas dadas, pero se refieren sólo a pares de ellas. Por eso, hemos preferido tomar directamente al invariante $I$.