GAZETA DE MATEMÁTICA
N.º 50 — Dezembro de 1951

A noção de «*filtro*» e as suas relações com a teoria dos limites e a definição dos números reais(*)

por **Luís Neves Real**
Porto

Alguns dos participantes na actividade desenvolvida no Pôrto pela **Junta de Investigação Matemática** elaboraram um *Curso de Análise da variável real*, cuja realização, em sessões públicas, ficaria como homenagem a Gomes Teixeira, na passagem do primeiro centenário do seu nascimento.

A orientação do curso visando a contribuir para uma actualização da obra de Gomes Teixeira de mais funda influência na formação matemática da juventude universitária portuguesa — o seu **Curso de Anályse Infinitesimal** — inspirava-se nos trabalhos do grupo Bourbaki, desde as obras já hoje clássicas até às suas mais recentes concepções nos domínios da integração. Era porém indispensável um trabalho preparatório para abordar certas noções correntes nos livros e publicações dessa escola. As notas seguintes correspondem a essa preocupação e dizem respeito às noções de «*convergência segundo um filtro*», «*filtro de* Cauchy» e «*espaços uniformes*» — noções introduzidas na ciência por André Weil em 1937, e pouco correntes ainda no nosso ensino. Têm estas notas um propositado carácter de *divulgação* e referem-se a N. Bourbaki, *Les Structures fondamentales de l'Analyse*, Livre III — *Topologie Générale*, Ch. I, II, Paris, 1940. A propósito é dever referir Gomes Teixeira, *Cálculo Diferencial*, em **Curso de Anályse Infinitesimal**, 4.ª edição: *Theoria dos numeros irracionais*.

Consideremos as duas rectas r e r' e nelas os seus pontos referidos a duas origens o e o' Suponhamos que existe uma aplicação de r sobre r': uma função f que, a cada ponto x de r faz corresponder um ponto $f(x)$ de r'

$$x \rightarrow f(x) .$$

Seja a um ponto de r, ponto de abscissa a; e A um ponto de abscissa A de r'.

Como é sabido diz-se que $\lim\limits_{x \| a} f(x) = A$ se, para todo número $\delta > 0$ se puder determinar um número $\varepsilon > 0$ de modo que a imagem de todo ponto x do intervalo

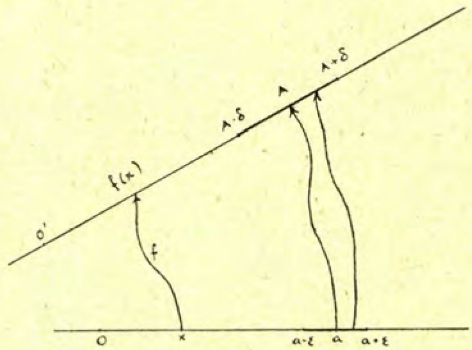

Fig. 1

$(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ caia no intervalo $(A-\delta, A+\delta)$ o que simbòlicamente representaremos por

$$(1) \qquad \lim_{x=a} f(x) = A \rightleftarrows \forall \delta \,|\, \delta > 0 \rightarrow \exists_{\varepsilon} [\varepsilon > 0 \text{ e } \forall x (a-\varepsilon < x < a+\varepsilon \rightarrow A-\delta < f(x) < A+\delta)] ;$$

Uma primeira etapa na passagem da análise da variável real para a análise geral foi atingida ao traduzir-se em termos gerais a idea intuitiva de que a definição (1) é uma formulação rigorosa: pontos tão vizinhos de A quanto se queira hão-de ser imagens de pontos suficientemente vizinhos de a. Esta primeira etapa consistiu na axiomatização da idea

(*) Recebido em Setembro de 1951.

de *vizinhança dum ponto.* Para o caso particular das rectas r e r' considerar-se-iam (por exemplo) em cada ponto x a classe $\mathcal{B}_x$ de todos os intervalos abertos de centro nesse ponto $(x-\varepsilon\,,\,x+\varepsilon)$, sendo ε um número real qualquer positivo. Satisfaz esta classse de conjuntos a duas propriedades essenciais:

$\mathcal{B}.1$ — A intersecção de dois conjuntos da classe contém sempre um conjunto da mesma classe.

$\mathcal{B}.2$ — O ponto x pertence a todos os conjuntos da classe $\mathcal{B}_x$.

São estas propriedades que se tomam como características do que se chama uma *base de vizinhanças* num espaço (F) — de Sierpinski (cf. Pereira Gomes, «Cadernos de Análise Geral», N.º 5, secção *Topologia*). Se num conjunto E se puder associar a cada um dos seus elementos, x, uma classe $\mathcal{B}_x$ de subconjuntos de E com essas propriedades, diz-se que se organizou esse conjunto como um *espaço topológico* e à classe $\mathcal{B}_x$ chama-se *base das vizinhanças do ponto* x do espaço E. Dada a base de vizinhanças define-se seguidamente como *vizinhança de* x, qualquer subconjunto de E que contenha um conjunto da base $\mathcal{B}_x$. Atentando agora na definição (1) e notando que, a cada δ e a cada ε, correspondem um conjunto B_A da base $\mathcal{B}_A$ das vizinhanças de a, vê-se a equivalência de (1) a:

$$\text{(2)}\qquad \lim_{x=a} f(x)=A \rightleftarrows \forall\, B_A\, \exists\, B_a \,\{f(B_a)\subset B_A\}$$

afirmativa de que «$\lim\limits_{x=a} f(x)=A$ se para todo conjunto B_A da base $\mathcal{B}_A$, existir um conjunto B_a da base $\mathcal{B}_a$ cuja imagem $f(B_a)$, pela função f, esteja *incluída* em B_A».

Observemos que, para definir limite duma função, (2) relaciona a classe $\mathcal{B}_A$, das visinhanças de A com a imagem $f(\mathcal{B}_a)$, da classe $\mathcal{B}_a$, base das vizinhanças de a: a condição necessária e suficiente para que A seja $\lim\limits_{x=a} f(x)$ é: «em qualquer conjunto da classe $\mathcal{B}_A$, incluirem-se sempre conjuntos (um pelo menos) da classe $f(\mathcal{B}_a)$».

Para podermos formular de modo mais geral esta noção de $\lim\limits_{x=a} f(x)$ estudemos a classe $f(\mathcal{B}_a)$, classe das imagens, por f, de todas as vizinhanças de a.

Nada garante que se comporte em r' como uma base de vizinhanças dos pontos desta recta. Mas possui tal classe $f(\mathcal{B}_a)$ as propriedades seguintes:

$B_f.1$ — As intersecções de dois conjuntos da classe contém um conjunto da mesma classe; e

$B_f.2$ — O conjunto vazio $\emptyset$ não pertence à classe.

$B_f.1$ é idêntica a $\mathcal{B}.1$, mas $\mathcal{B}.2$ é um caso particular de $B_f.2$; de modo que a classe $\mathcal{B}_A$ base das vizinhanças de A igualmente satisfaz a estas propriedades.

São de resto elas, juntamente com a definição dada de *vizinhança* que garantem à classe $\mathcal{V}_A$ (mais rica, isto é com *mais* elementos, que $\mathcal{B}_A$), de *todas as vizinhanças de* A (isto é constituída por todos os conjuntos de r' que contêm um conjunto de $\mathcal{B}_A$) as propriedades:

$F.1$ $V_A \in \mathcal{V}_A$ e $V_A \subset V'_A$ implicam que $V'_A \in \mathcal{V}_A$: qualquer conjunto que contenha um conjunto da classe pertence ainda à classe;

$F.2$ O espaço inteiro pertence a $\mathcal{V}_A$.

$F.3$ $V_A \in \mathcal{V}_A$ e $V'_A \in \mathcal{V}_A$ implicam que $V_A \cap V'_A \in \mathcal{V}_A$: a intersecção de dois conjuntos da classe é um conjunto da mesma classe.

$F.4$ $\emptyset \notin \mathcal{V}_A$: o conjunto vazio não é elemento da classe.

Como $f(\mathcal{B}_a)$ satisfaz igualmente a $B_f.1$ e $B_f.2$ é possível, por meio dum procedimento paralelo ao que nos conduziu de B_A a $\mathcal{V}_A$, gerar a partir de $f(\mathcal{B}_a)$ uma nova classe $\mathcal{F}$ constituida por todos os conjuntos de pontos de r' que contêm um conjunto da família $f(\mathcal{B}_a)$. $\mathcal{F}$, que satisfaz igualmente às condições $F.1$, $F.2$, $F.3$ e $F.4$, vai permitir enunciar de modo simples a condição de convergência de $f(x)$. Efectivamente, (2) pode escrever-se em termos já dos elementos V_A e V_a dasclasses $\mathcal{V}_A$ e $\mathcal{V}_a$ das vizinhanças de A e a:

$$\text{(3)}\qquad \lim_{x=a} f(x)=A \rightleftarrows \forall\, V_A\, \exists\, V_a \,\{f(V_a)\subset V_A\}$$

e, como $f(\mathcal{V}_a)$, com o mesmo processo de geração utilizado sobre $f(\mathcal{B}_a)$, conduz à mesma classe $\mathcal{F}$, posso afirmar simplesmente que

$$\text{(4)}\qquad \lim_{x=a} f(x)=A \rightleftarrows \mathcal{V}_A \subset \mathcal{F}$$

isto é: a condição necessária e suficiente para que A seja $\lim\limits_{x=a} f(x)$, é que «*a classe das vizinhanças de* A *esteja incluida na classe* $\mathcal{F}$ *gerada pela imagem, por* f, *da classe* $\mathcal{V}_a$ *das vizinhanças de* a».

Note-se que na classe das vizinhanças dum ponto — por exemplo A — (como também na classe $\mathcal{F}$) qualquer conjunto da classe intersecta noutro da mesma classe (sempre com resultado diferente de $\emptyset$) um conjunto ainda da mesma classe. Assim com conjuntos de $\mathcal{V}_A$ pode organizar-se um encadeamento sem fim de conjuntos que, em linguagem figurada, se diz que uns aos outros se *filtram*, deixando sempre *passar* outros conjuntos da classe. O ponto A, por exemplo, *passa* constantemente através de todos os elementos deste *filtro*. No caso particular de $\mathcal{V}_A$ a intersecção consta do conjunto $\{A\}$ cujo único elemento é o próprio ponto A. Mas podem imaginar-se classes de conjuntos satisfazendo às condições $F.1$, $F.2$, $F.3$ e $F.4$ e de intersecção vazia; por exemplo a classe gerada pelos conjuntos da forma $\{(A-\delta, A+\delta)-A\}$ (os intervalos abertos de centro em A, com exclusão do próprio A).

Estas considerações foram feitas com o objectivo de tornar natural a sugestiva designação de *filtro sobre o conjunto* E dada a qualquer classe de sub-conjuntos de E que satisfaça às quatro propriedades acima enunciadas; e a designação de *filtro das vizinhanças dum ponto*, dada à classe das vizinhanças desse ponto. Por analogia com base de vizinhanças, chamar-se-á a qualquer classe de sub-conjuntos de E com as propriedades $B_f.1$ e $B_f.2$ *base de filtro sobre* E: dada uma base de filtro $\mathcal{B}_f$, é um filtro $\mathcal{F}$ a classe de todos os conjuntos F de E assim definida

$$F \in \mathcal{F} \rightleftarrows \exists B [B \in \mathcal{B}_f \text{ e } B \subset F]$$

Diz-se de dois filtros $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ que satisfaçam à relação de inclusão $\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_1$ (isto é: os conjuntos de $\mathcal{F}_2$ são igualmente elementos de $\mathcal{F}_1$) *que* $\mathcal{F}_1$ *é mais fino que* $\mathcal{F}_2$ ou $\mathcal{F}_2$ *é menos fino que* $\mathcal{F}_1$.

Convenções que permitem dizer: Para que $\lim\limits_{x=a} f(x) = A$ é preciso e basta que seja o filtro gerado pela imagem $f(\mathcal{B}_a)$ do filtro das vizinhanças de a mais fino que $\mathcal{V}^A$, filtro das vizinhanças de A.

Esta condição esclarece que a definição clássica de $\lim\limits_{x=a} f(x)$ se apoia em dois filtros de vizinhanças — os de a e A — comparando o filtro ligado a A — o das vizinhanças deste ponto na topologia adoptada no contradomínio da função $f(x)$ — com o filtro gerado pelas imagens, segundo f, dum filtro dado no domínio de $f(x)$ — precisamente o das vizinhanças desse ponto. Mas sendo o essencial na operação da passagem ao limite duma função o critério de *finura* aplicado para comparar os dois filtros e, por outro lado, gerando as imagens dum filtro um outro filtro — conclui-se que a definição clássica nos dá uma definição de limite apoiada num filtro particular: o filtro das vizinhanças de a.

Assim se chega a uma primeira generalização da noção de *limite duma função: o limite de* f(x), *segundo um filtro* $\mathcal{F}$: Direi que $A = \lim\limits_{\mathcal{F}} f(x)$ se o filtro gerado pela imagem de $\mathcal{F}$ for mais fino que $\mathcal{V}_A$, filtro das vizinhanças de A.

Acentue-se que este filtro $\mathcal{F}$ pode nada ter com a topologia definida no domínio da função, domínio este que pode até não ser um espaço topológico. Por exemplo entre o eixo Ox e o eixo Oy estabeleçamos uma correspondência pela função

$$f(x) = x\ , \quad \text{se} \quad x \leqslant 1$$
$$f(x) = x - 1\ , \quad \text{se} \quad x > 1\ .$$

Suponhamos o eixo Oy munido da topologia da recta real. E sobre Ox limitemo-nos a considerar o filtro $\mathcal{F}_1$, gerado pela base constituida pelos intervalos fechados $[x, 1]$, com $x < 1$. Vê-se que a definição acima adoptada nos conduz a escrever $\lim\limits_{\mathcal{F}_1} f(x) = 1$.

Pode entretanto verificar-se que, munindo $0x$ da topologia da recta real, não existe

$$\lim_{x=1} f(x)$$

visto que o filtro obtido pela imagem $f(\mathcal{V}_1)$ das vizinhanças do ponto 1 de $0x$ dá, por intersecção dos conjuntos que o constituem, um conjunto com os dois pontos 0 e 1 do eixo $0y$.

Tudo isto nos prepara para as seguintes generalizações:

Ponto limite x *dum filtro* $\mathcal{F}$ sobre um espaço topológico E é um ponto cujo filtro $\mathcal{V}_x$ das respectivas vizinhanças em E é menos fino que $\mathcal{F}$, filtro dado.

Filtro $\mathcal{F}$ *convergente para um ponto* x *dum espaço topológico* é todo filtro mais fino que $\mathcal{V}_x$, filtro das vizinhanças desse ponto.

Nesta concepção cabem perfeitamente as noções de *limite duma sucessão numérica* e de *sucessão numérica convergente.*

De facto a definição clássica

$$\lim_{n=\infty} x_n = a \rightleftarrows \forall \delta \{\delta > 0 \rightarrow \exists N [\forall n (n > N \rightarrow a - \delta < x_n < a + \delta)]\}$$

compara as visinhanças $V_a = (a-\delta, a+\delta)$ do ponto a, com os subconjuntos $\overline{S}_N$ da sucessão $\{x_n\}$ assim definidos

$$\overline{S}_n = \{x_{N+1}, x_{N+2}, \cdots, x_{N+p}, \cdots\}$$

caracterizando-se a convergência de $\{x_n\}$ pela propriedade

$$\forall V_a \{\exists N [\forall n (n > N \rightarrow \overline{S}_N \subset V_a)]\}.$$

Ora os $\overline{S}_n$ constituem a base dum filtro sobre a recta real — *o filtro constituido por todos os conjuntos numéricos cujos conjuntos complementares têm apenas un número finito de pontos da sucessão* $\{x_n\}$. Chamando a este filtro o filtro elementar associado à sucessão $\{x_n\}$ podemos dizer: o $\lim\limits_{n=\infty} x_n$ é a se o *filtro elementar associado a* $\{x_n\}$ convergir para a (ou se o filtro elementar associado à sucessão for mais fino que $\mathcal{V}_a$, filtro das vizinhanças de a).

O facto das imagens dos conjuntos da base dum filtro gerarem um filtro, habilita-nos a uma outra formulação deste tipo de convergência.

No conjunto dos números naturais

$$\omega_0 = \{1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}$$

a classe de todos os conjuntos destes números, cujos complementares são finitos, é um filtro, que admite como base a classe dos conjuntos S_n constituidos por todos os números naturais maiores ou iguais a n:

$$S_n = \{n, n+1, n+2, \cdots\}$$

Este filtro designa-se por *filtro de* Frechet e dá, por imagem, graças à aplicação $n \to x_n$, um filtro na recta real, filtro que vem a ser precisamente o filtro elementar asssociado à sucessão $\{x_n\}$, considerada. Assim *calcular o limite duma sucessão numérica* $\{x_n\}_n$ *quando* n *tende para infinito* é uma expressão sinónima de *calcular o limite da sucessão* $\{x_n\}$ *segundo o filtro de* Frechet; *e diz-se que* $\{x_n\}$ *converge para* a *quando para* a *convergir o filtro obtido por imagem do filtro de* Frechet, *pela aplicação* $n \to x_n$.

Como a noção de sucessão convergente, também a de sucessão de Cauchy, com ela intimamente ligada, sofreu um processo crítico, que, em sucessivas abstracções, conduziu à noção de filtro de Cauchy.

É sabido que numa sucessão $\{x_n\}$ de números reais se diz sucessão de Cauchy quando possui a seguinte propriedade

$$\forall \delta \, \exists N \{ \delta > 0 \to \forall n \, \forall p \, (n > N \to |x_{n+p} - x_n| < \delta) \}$$

o que, tomando como *distância* de dois números reais x e y, o módulo da sua diferença, pode interpretar-se da seguinte maneira: qualquer que seja o número positivo δ existe uma ordem N tal que

$$x_{N+1}, x_{N+2}, \cdots, x_{N+p}, \cdots$$

constituem um conjunto C_N onde, entre dois quaisquer dos seus elementos, a distância é menor que δ », por outras palavras: quaisquer que sejam x e y se $x \in C_N$ e $y \in C_N$, $d(x, y) < \delta$ — o que patenteia uma *uniformidade* de comportamento dos pontos do conjunto C_N. Chamando-se *diâmetro* dum conjunto ao supremo do conjunto numérico formado pelas distâncias dos seus pontos, dir-se-á ainda que, se uma sucessão é de Cauchy, podem sempre nela encontrar-se conjuntos C_N de diâmetro inferior a qualquer número arbitrário e positvo δ, — o que se resume na frase: na sucessão $\{x_n\}$ podem encontrar-se conjuntos *tão pequenos quanto se queira*. Pensando no filtro elementar associado à sucessão $\{x_n\}$, deduz-se daqui ter esse filtro associado conjuntos *tão peqnenos quanto se queira*. Designando, de um modo geral, por *filtro de* Cauchy todo filtro que *possui conjuntos tão pequenos quanto se queira*, vê-se que a toda sucessão de Cauchy corresponde um filtro de Cauchy.

Estas noções, dadas no espaço dos números reais (porque familiar a todos nós) assentam fundamentalmente num critério de *pequenez dum conjunto*, ou de *proximidade de pontos dum espaço*, critério que foi formulado em termos da *distância de dois números*. Três propriedades intervêm essencialmente nessa formulação

$D.1$ $d(x, y) = 0$ se e só se $x = y$

$D.2$ $d(x, y) = d(y, x)$ (simetria)

$D.3$ $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$ (desigualdade triangular).

De modo que em todos os espaços topológicos, onde se define, para cada par de pontos x e y desse espaço, uma função não negativa que possui aquelas três propriedades — espaços chamados métricos — podem nele traduzir-se os teoremas basilares da teoria dos limites dos números reais. No sentido porém de abordarmos uma fase do desenvolvimento das noções de convergência que em si engloba já essa adaptação aos espaços métricos, detenhamo-nos ainda na observação das propriedades $D.1$, $D.2$, $D.3$, quando x, y e z representam pontos da recta real $\bar{R}$. Tomemos o conjunto de todos os pares (x, y) de números reais. Assim se constitui o que em teoria dos conjuntos se chama o espaço produto de $\bar{R}$ por si mesmo e se representa por $\bar{R} \times \bar{R}$. Corresponde $\bar{R} \times \bar{R}$ biunìvocamente ao conjunto dos pontos do plano cartesiano e neste plano figuraremos o par (x,y) pelo ponto de coordenadas x e y (fig. 2). Posto

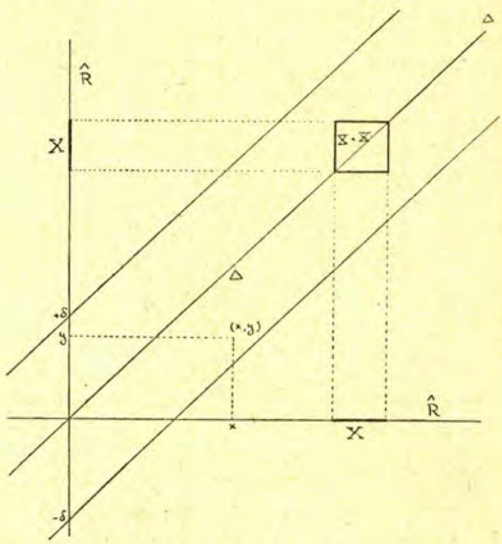

Fig. 2

isto, dizer que $d(x, y) < \delta$ ou $|x - y| < \delta$ significa afirmar que pertence o par (x, y) à faixa P_δ, constituida por todos os pontos do plano compreendidos entre as rectas $y = x + \delta$ e $y = x - \delta$. Chamaremos a P_δ *proximidade de ordem.* Se um conjunto numérico X é de diâmetro inferior a δ, nesta representação estará o conjunto plano produto $X \times X$ incluído na proximidade P_δ de ordem δ:

$$X \times X \subset P_\delta \, .$$

Se a disiância de dois pontos x e y é nula isso quere dizer qne (x, y), representa um ponto da recta $y = x$, distinguida com a letra Δ e a designação de *diagonal* entre os sub-conjuntos de $\overline{R} \times \overline{R}$ e definida para um espaço produto qualquer como o conjunto dos pares da forma (x, x).

A simetria $d(x, y) = d(y, x)$ — se $|x - y| < \delta$ também $|y - x| < \delta$ — diz-nos que se $(x, y) \in P_\delta$ igualmente $(y, x) \in P_\delta$. Esta propriedade implica uma outra menos restrita: *se conhecemos a proximidade do par* (x, y) (a proximidade dos pontos x e y em $\overline{R}$) *ficamos a conhecer a proximidade a que pertence o par* (y, x), isto é a natureza da proximidade de y a x. Sendo U um conjunto qualquer de $\overline{R} \times \overline{R}$ (ou dum espaço produto qualquer) representa-se por U^{-1} o conjunto dos pares (x, y) tais que $(y, x) \in U$. Para $\overline{R} \times \overline{R}$ é evidente que, por cada proximidade P_δ, se tem em P_δ^{-1} ainda uma proximidade (pois que $P_\delta = P_\delta^{-1}$).

Quanto a $D.3$ ela permite concluir a proximidade de dois números x e z, por intermédio duma triangulação, apoiada nas proximidades de x e z a um terceiro número y. Particularmente, ela permite concluir que é inferior a δ a distância de x a z, se forem a infefiores a $\delta/2$ tanto a distância de x a y com a de y a z.

No espaço produto $\overline{R} \times \overline{R}$ (como em qualquer espaço produto) esta utilização dum ponto y *entre* dois outros faz-se através da chamada *composição* de conjuntos: Se U_1 e U_2 são dois conjuntos de $\overline{R} \times \overline{R}$, chama-se $U_1 U_2$ *conjunto composto por* U_1 e U_2 ao conjunto de todos os pares (x, z) tais que existe y de modo a ser $(x, y) \in U_1$ e $(y, z) \in U_2$.

No plano (tomado como espaço produto $\overline{R} \times \overline{R}$), se considerarmos a proximidade $P_\delta/2 \, P_\delta/2$ coincide com P_δ: dado um par $(x, z) \in P_\delta$ pode determinar-se uma proximidade $P_{\delta/2}$ tal que existe y de modo a ser $(x, y) \in P_{\delta/2}$ e $(y, z) \in P_{\delta/2}$; propriedade que, das proximidades a que pertencem os pares (x, y) e $y, z)$, deduz a natureza da proximidade a que pertence o par (x, z).

Esta correspondência entre as propriedades da distância e as das faixas P_δ — as proximidades de $\overline{R}$ — correspondendo cada uma a um número real e positivo δ, leva a abstrair da noção de distância e a tirar o critério de *pequenez* ou *proximidade em* $\overline{R}$ do prévio conhecimento dùma classe de conjuntos — a classe dos P_δ — dada no espaço produto $\overline{R} \times \overline{R}$. Efectivamente, imaginadas traçadas no plano as faixas P_δ, bastaria tomar como definições: *dois números* x *e* y *serão próximos de ordem* δ *se o par* (x, y) *pertencer a* P_δ; *um conjunto* X *de números é pequeno de ordem* δ *se* $X \times X$ *estiver incluido em* P_δ.

Um filtro $\mathcal{F}$ *sobre* $\overline{\text{R}}$ *é um filtro de* Cauchy *se contiver conjuntos tão pequenos quanto se queira,* entendendo-se por tal que: *qualquer que seja a proximidade* P_δ *existem sempre em* $\mathcal{F}$ *conjuntos* F *pequenos de ordem* δ.

A proximidade dos pontos dum conjunto X pequeno de ordem δ tem um caracter uniforme: quaisquer que sejam x_1 e x_2 de X a sua proximidade é de ordem δ (o que se observa afim de se encontrar uma sugestão para designar por *estrutura uniforme* toda estrutura dum conjunto R para o qual se define no espaço produto $R \times R$ uma classe $\mathcal{P}$ de conjuntos, chamados *proximidades de* R com as seguintes propriedades (agora evidentes para o caso particular de R ser a recta real):

U_0 $\mathcal{P}$ é um filtro.

U_1 Δ está incluida em todos os conjuntos de $\mathcal{P}$.

U_2 Se $P \in \mathcal{P}$ também $P^{-1} \in \mathcal{P}$.

U_3 Para todo $P \in \mathcal{P}$ existe $\overline{P} \in \mathcal{P}$ tal que $\overline{P}^2 \subset P$ (representando por $\overline{P}^2$ o conjunto composto $\overline{P}\,\overline{P}$).

Para estudar agora a convergência de filtros sobre a recta real $\overline{R}$, munida da estrutura topológica habitual (sendo as vizinhanças dos números os intervalos abertos neles centrados) e da estrutura uniforme que nela define a classe $\mathcal{P}$ das faixas P_δ, come-

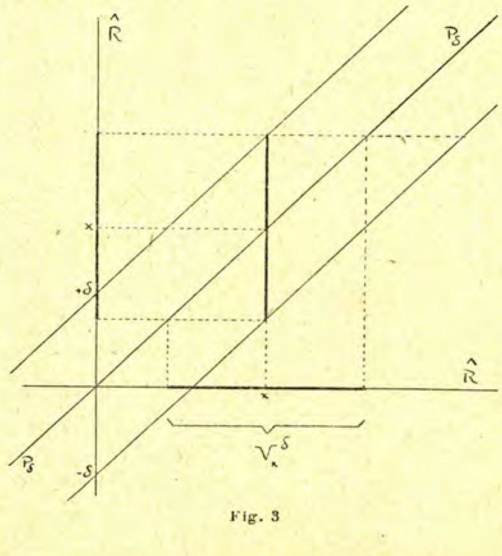

Fig. 3

cemos por observar a ligação existente entre essas duas estruturas: na realidade a vizinhança V_x^{δ} dum ponto x coincide com o conjunto dos pontos y tais que $(x, y) \in P_{\delta}$ (fig. 3). Esta ligação entre as duas estruturas exprime-se dizendo que a topologia de R pode *deduzir-se da sua estrutura uniforme.*

A um espaço E, cuja topologia foi deduzida, por este processo, duma estrutura uniforme nele dada, chama-se *espaço uniforme.* Vê-se pois como duma estrutura uniforme definida em E se deduz sempre uma organização topológica de E como espaço uniforme.

Terminada esta observação procuremos relacionar os filtros convergentes em $\overline{R}$ e os filtros de Cauchy definidos sobre $\overline{R}$. Como em todos os espaços uniformes, acontece que todo filtro convergente é um filtro de Cauchy. Na verdade: para toda proximidade P de $\overline{R}$, existe uma outra proximidade $\overline{P}$ tal que $\overline{P}^2 \subset F$. Seja $\overline{P}x_0$ a vizinhança de x_0 correspondente à proximidade $\overline{P}$. Sendo x_0 limite de $\mathcal{F}$ existe em $\mathcal{F}$ um conjunto X, tal que $X \subset \overline{P}x_0$; e como $\overline{P}x_0$ é pequeno de ordem $\overline{P}^2$ e $\overline{P}^2 \subset \overline{P}$, $\mathcal{F}$ possui conjuntos tão pequenos quanto se queira e é, por isso, um filtro de Cauchy. Quanto à condição suficiente não é ela verdadeira em todos os espaços uniformes. Por exemplo, se (como se fez para a recta real $\overline{R}$) definissemos sobre a recta racional R um conjunto de proximidades (faixas P traçadas no plano $R \times R$ constituído pelos pares (x, y) de pontos de coodenadas racionais), o filtro associado de

$$\{0,1\,;\ 0,10\,;\ 0,101\,;\ 0,10100\,;\ 0,101001\,;$$
$$0,10100100001\,;\ \cdots\}$$

é um filtro de Cauchy, que não é convergente em R.

Pelo contrário todo filtro de Cauchy sobre a recta $\overline{R}$ é convergente, propriedade que distingue entre os espaços uniformes, *os espaços uniformes completos.* A análise das razões desta essencial propriedade conduzir-nos-à a generalizar a definição dos números reais a partir dos números racionais, pelo método de Cantor.

Orienta esta definição (dada a partir do espaço não completo da recta racional R) precisamente o objectivo de identificar no domínio dos números reais as noções de sucessão convergente e sucessão de Cauchy, de modo a tornar válida na recta real a condição necessária e suficiente de convergência enunciada por Cauchy.

Partamos do espaço uniforme R dos números racionais, sendo a classe das suas proximidades as faixas P_d dos pontos (x, y) de $R \times R$ tais que $|x-y| < d$; considereremos o conjunto $\widetilde{R}$ de todas as sucessões de Cauchy $\{x_n\}$ de números racionais e convencionemos dizer que *a distância das sucessões* $\{x_n\}$ *e* $\{y_n\}$ *é menor que* d (número racional positivo) *se existir* N *tal que* $|x_{N+p} - y_{N+p}| < d$ *para todo inteiro positivo* p. Com esta convenção estudemos no espaço produto $\widetilde{R} \times \widetilde{R}$ o conjunto $\widetilde{P}$ de todos os pares $(\{x_n\}, \{y_n\})$ de sucessões de Cauchy $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ cuja distância é menor que d.

Como $\{x_n\}$ é sucessão de Cauchy, o filtro elementar $\mathcal{X}$ a ela associado possui um conjunto $X \subset R$:

$$X \equiv \{x_{N+1}\,,\ x_{N+2}\,,\ \cdots\ x_{N+m}\,,\ \cdots\}$$

pequeno de ordem P_d; anàlogamente o filtro $\mathcal{Y}$ associado a $\{y_n\}$ possui um conjunto $Y \subset R$ de ordem P_d:

$$Y \equiv \{y_{N+1}\,,\ y_{N+2}\,,\ \cdots\ y_{N+m}\,,\ \cdots\}\,.$$

O conjunto união $X \cup Y$ é comum aos filtros X e Y e a sua ordem P_{2d}, pois

$$|y_{N+l} - x_{N+k}| \leqslant |y_{N+l} - x_{N+l}| + |x_{N+l} - x_{N+k}| < 2\,d\,.$$

Assim, cada $\widetilde{P}_d$, proximidade de $\widetilde{R}$ coincide com o conjunto dos pares de sucessões de Cauchy, cujos filtros elementares associados têm em comum um conjunto de (números racionais) pequeno de ordem P_{2d}. A existência desta correspondência entre a classe dos $\widetilde{P}$ e a classe dos P, sugere que, para completar um espaço uniforme R qualquer, se tome o conjunto $\widetilde{R}$ constituido por todos os filtros de Cauchy sobre R e em $\widetilde{R}$ se defina uma estrutura uniforme, tendo como base das proximidades de $\widetilde{R}$ a classe $\widetilde{\mathcal{P}}$ de todos os conjuntos $\widetilde{P}$ de pares $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ de filtros de Cauchy sobre R que têem em comum um conjunto de ordem P. Pode verificar-se que assim se obtém efectivamente uma base de proximidades em $\widetilde{R}$.

Ora $\widetilde{R}$ resulta precisamente um espaço uniforme completo. Para o verificarmos continuemos a atentar no modelo $\widetilde{R}$, o conjunto das sucessões de Cauchy de números racionais. Entre estas sucessões encontram-se as de termos todos iguais entre si

$$\{x\,,\ x\,,\ x\,,\ \cdots\ x\,,\ \cdots\}$$

que representaremos por (x), onde x é um número racional. O sub-conjunto (R) de $\widetilde{R}$, constituido por todas as sucessões deste tipo, pode pôr-se em correspondência biunívoca com o espaço R dos números racionais, pela aplicação

$$x \longleftrightarrow (x)\,.$$

Quando se dá a definição dos números reais a partir dos números racionais é precisamente passagem essencial demonstrar que todo número real $\xi = [\{x_n\}]$, definido pela sucessão de Cauchy, $\{x_n\}$ pode considerar-se, mediante apropriada definição de limite.

$$\xi = \lim_{n=\infty} (x_n)$$

onde (x_n) é a imagem em $\tilde{R}$ do número (racional) x_n de R. Anàlogamente, para completar um espaço uniforme R qualquer, deveremos considerar o sub-conjunto (R) de $\tilde{R}$, $(R) \subset \tilde{R}$, constituido pelos filtros de CAUCHHY (x) cuja base é o conjunto $\{x\}$ com $x \in R$; e demonstrar que qualquer elemento de $\tilde{R}$, isto é qualquer filtro $\mathfrak{X}$ sobre R pode considerar-se, em $\tilde{R}$, como limite do filtro $(\mathfrak{X})$ imagem em (R), por meio de $x \rightarrow (x)$, do próprio filtro $\mathfrak{X}$. Prova que decorrre de ser o filtro $\mathscr{P}_x$ das vizinhanças de $\mathfrak{X}$ menos fino do que $\mathfrak{X}$. De facto, tome-se a vizinhança $\tilde{P}_x$ de $\mathfrak{X}$, constituída por todos os filtros $\mathscr{Y}$ tais que $(\mathscr{Y}, \mathfrak{X}) \in \tilde{P}$. Esta relação implica que $\mathfrak{X}$ e $\mathscr{Y}$ têm em comum um conjunto C pequeno de ordem P. Mas todo $c \in C$ dá lugar a um filtro (c) que satisfará a $((c), \mathfrak{X}) \in \tilde{P}$. Assim a imagem (C), em $\tilde{R}$ de de C satisfará a $(C) \subset P_x$.

Porém essa imagem (C) sendo dum elemento C do filtro $\mathfrak{X}$ pertencerá à imagem $(\mathfrak{X})$ deste mesmo filtro; o que prova ser menos fino o filtro das vizinhanças de $\mathfrak{X}$ do que $(\mathfrak{X})$.

Esta densidade de (R) em $\tilde{R}$ vai permitir mostrar que em $\tilde{R}$ todo filtro de CAUCHY é convergente. Uma vez mais guiemo-nos pelo procedimento seguido na passagem de R considerado como a recta racional para $\tilde{R}$ considerado como o conjunto de todas as sucessões de CAUCHY de números racionais. A demonstração consiste na escolha em corrrespondência a cada um dos elementos

$$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots$$

pertencentes a uma sucessão de CAUCHY, $\{\xi_n\}$ onde cada elemento ξ_n é por sua vez uma sucessão de CAUCHY $\xi_n = \{x_m\}$ de números racionais, x_m de elementos de (R)

$$(x_1), (x_2), \cdots, (x_n), \cdots$$

tais que $|\xi_n - (x_n)| < \delta$. A sucessão $\{(x_n)\}$ seria uma sucessão de CAUCHY, porque

$$|(x_n) - (x_m)| \leq |\xi_n - (x_n)| + |\xi_n - \xi_m| + |\xi_m - (x_m)| < 3d,$$

mas constituida apenas por elementos de (R). Ora a sucessão $\{x_n\}$ que lhe corresponderia em R seria igualmente de CAUCHY. Assim $\{x_n\}$ seria um elemento de $\tilde{R}$, limite até de $\{(x_n)\}$ e por isso igualmente da sucessão de CAUCHY dada, $\{\xi_n\}$.

Façamos agora a transposição desta demonstração para mostrar que é completo o espaço uniforme $\tilde{R}$ dos filtros de CAUCHY sobre R (R um espaço uniforme não completo qualquer). Em vez duma sucessão de CAUCHY começaremos por considerar um qualquer filtro de CAUCHY $\tilde{C}$ sobre $\tilde{R}$. Assim como à sucessão $\{\xi_n\}$ substituimos outra sucessão de CAUCHY, cujos elementos (x_n) eram imagens de números racionais x_n, imagens essas *vizinhas* de menos de d dos correspondentes elementos na sucessão $\{\xi_n\}$, vamos agora substituir, ao filtro de CAUCHY sobre $\tilde{R}$, um filtro $(\mathfrak{C})$ de CAUCHY, sobre $(R) \subset \tilde{R}$, filtro porém com elementos próximos da mesma ordem $\tilde{P}$ (qualquer), dos elementos de $\tilde{C}$. Para isso, e fixada uma proximidade $\tilde{P}$, considera-se para cada conjunto $C \in \tilde{\mathfrak{C}}$ a união

$$\bigcup_{c \in C} \tilde{P}_c$$

das vizinhanças $\tilde{P}_c$ (correspondentes à proximidade $\tilde{P}$) de todos os elementos c de C. As intersecções destas uniões com a imagem (R) de R

$$(R) \frown \bigcup_{c \in C} \tilde{P}_c$$

constituem uma base de filtro como fàcilmente se verifica. Mas filtro que é de CAUCHY. Efectivamente se $\tilde{P}'$ é uma proximidade qualquer de $\tilde{R}$ a propriedade U_3 das proximidades assegura-nos que existe P tal que $\tilde{P}^2 \tilde{P} = \tilde{P}^3 \subset \tilde{P}'$. Escolhendo no filtro $\mathfrak{C}$ um conjunto C pequeno de ordem $\tilde{P}$, $(R) \frown \bigcup_{c \in C} P_c$ será pequeno de ordem $\tilde{P}^3$ e portanto de ordem $\tilde{P}'$. Sendo $(\mathfrak{C})$ de CAUCHY é-o igualmente a sua imagem C, em R. Portanto C é um elemento de $\tilde{R}$, cujo filtro das vizinhanças é então menos fino que $(\mathfrak{C})$; mas este é claramente menos fino que $\tilde{\mathfrak{C}}$ pois todo elemento de $(\mathfrak{C})$ é-o também de $\tilde{\mathfrak{C}}$. Todo filtro de CAUCHY em $\tilde{R}$ é pois convergente: *$\tilde{R}$ é um espaço uniforme completo.*

Deve ter sido já observado que em $\tilde{R}$ (considerado como conjunto de todas as sucessões de CAUCHY de números racionais) não se tem ainda a *recta real R*: os elementos de $\tilde{R}$ não são os números reais. Efectivamente falta ao espaço uniforme completo $\tilde{R}$ uma propriedade fundamental da recta real (e da própria recta racional) — a *separação* de dois quaisquer dos seus pontos; não é possível no espaço $\tilde{R}$ e, para dois seus pontos arbitrários, determinar duas vizinhanças respectivas sem pontos comuns. Diz-se que *R não é espaço separado.* E ser espaço separado é propriedade essencial num espaço dotado da noção de limite, pois é a separação que garante à convergência (das sucessões e dos filtros) um único limite. Ora, é de facto, possível encontrar duas sucessões distintas $\left(\text{por exemplo } \{x_n\} \text{ e } \left\{x_n - \frac{1}{n}\right\}\right)$ distintas, mas para as quais não existe uma proximidade $\widetilde{P}$ tal que $\left(\left\{x_n\right\}, \left\{x_n - \frac{1}{n}\right\}\right) \notin \widetilde{P}$. De modo que é impossível determinar em $\widetilde{R}$, com a topologia compatível com a sua estrutura uniforme, uma vizinhança de $\{x_n\}$ e outra de $\left\{x_n - \frac{1}{n}\right\}$ sem pontos comuns. Mais geralmente sendo $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ duas sucessões tais que, para d arbitrário, se pode determinar N de modo a ser $|x_n - y_n| < d$ para $n > N$, o par correspondente, $(\{x_n\}, \{y_n\})$, pertence a todas as proximidades; a intersecção em $\widetilde{R} \times \widetilde{R}$ de todas as proximidades de $\widetilde{R}$ não se confunde pois com a diagonal Δ do espaço produto $\widetilde{R} \times \widetilde{R}$.

Recorde-se que, para a definição de números reais, se introduz uma relação de equivalência entre as sucessões de Cauchy de números racionais, relação essa que é

$$[\{x_n\} \approx \{y_n\}] \rightleftarrows \forall\, d\, \exists\, N\, [\forall n\, (n \supset N \rightarrow |x_n - y_n| < d)].$$

Ora esta relação de equivalência pode exprimir-se em termos das proximidades $\widetilde{P}_d$ de $\widetilde{R}$ na forma seguinte, onde $\bigcap \widetilde{P}_d$ representa a intersecção de todas as proximidades de $\widetilde{R}$:

$$[\{x_n\} \approx \{y_n\}] \rightleftarrows (\{x_n\}, \{y_n\}) \in \bigcap \widetilde{P}_d$$

isto é duas sucessões são equivalentes se o par que elas determinam em $\widetilde{R} \times \widetilde{R}$ pertence a todas as proximidades da estrutura uniforme definida em $\widetilde{R}$; números reais são classes de sucessões de Cauchy de números racionais equivalentes entre si.

Vê-se que este problema da definição dos números reais a partir dos números é, num dos seus aspectos, um caso particular do processo a seguir para tornar *separado* um espaço uniforme qualquer *não separado*:

Por transposição da noção de sucessões equivalentes para um espaço uniforme qualquer $\widetilde{R}$, diremos que dois pontos x e y deste espaço serão equivalentes se o seu par (x, y) pertencer à $\bigcap \widetilde{P}$ do correspondente espaço produto $\widetilde{R} \times \widetilde{R}$.

Com as classes $\bar{x}$ de todos os pontos de $\widetilde{R}$ equivalentes a x, forma-se um novo conjunto $\bar{R}$ (o conjunto cociente de $\widetilde{R}$ pela relação de equivalencia adoptada) que pode igualmente organizar-se como espaço uniforme separado completo.

Para levar a efeito essa organização note-se que na recta real $\bar{R}$ de elementos $[x_n]$ (designando-se por tal o número real que é o conjunto de todas as sucessões equivalentes à sucessão $\{x_n\}$, sucessão que *representa* o respectivo número real) à proximidade $\bar{P}_d$, por exemplo, que é definida pela faixa limitada pelas duas paralelas à diagonal tiradas pelos pontos $(0, d)$ e $(0, -d)$ pertencem dois números quaisquer $[x_m]$ e $[y_m]$ que satisfaçam a

$$|[x_m] - [y_m]| < d.$$

Mas para que os números reais $[x_m]$ e $[y_m]$ satisfaçam a esta desigualdade deve existir em $[x_m]$ uma sucessão $\{\bar{x}'_m\}$ e em $[y_m]$ uma sucessão $\{\bar{y}'_m\}$ que pertençam simultâneamente à proximidade $\widetilde{P}_d$ de $\widetilde{R}$.

Esta observação indica-nos a relação existente entre as proximidades $\widetilde{P}_d$ de $\bar{R}$ e as $\widetilde{P}_d$ de $\widetilde{R}$; e diz-nos que na passagem dum espaço uniforme não separado qualquer $\widetilde{R}$ para um outro separado $\bar{R}$, se define a estrutura uniforme sobre $\bar{R}$ da forma seguinte: em correspondência a cada $\widetilde{P}$ de $\widetilde{R} \times \widetilde{R}$ formamos em $\bar{R} \times \bar{R}$ o conjunto de todos os pares $(\bar{x}, \bar{y})$ das classes $\bar{x}$ e $\bar{y}$ de pontos de $\bar{R}$ tais que existe $x' \in \bar{x}$ e $y' \in \bar{y}$, $x' \in \widetilde{R}$ e $y' \in \widetilde{R}$ com $(\bar{x}', \bar{y}') \in \widetilde{P}$.

As relações que têm lugar entre as proximidades dos dois espaços permitirão verificar o caracter completo d'este espaço e o de ampliação relativamente ao espaço uniforme e não completo, donde partíramos no início.