GAZETA DE MATEMÁTICA
N.º 50 — Dezembro de 1951

Hillsche Hypertetraeder (*)

von **H. Hadwiger**
Universität Bern, Schweiz

Es sei $(\mathfrak{a}_1, \cdots, \mathfrak{a}_k)$ ein System von k linear unabhängigen isogonalen Einheitsvektoren $\mathfrak{a}_\nu$ des k-dimensionalen euklidischen Raumes, sodass für ein $\omega = \cos\theta$, $-\dfrac{1}{k-1} < \omega < 1$,

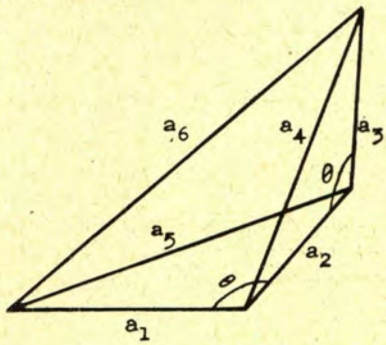
$$(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_j) = \omega \qquad [i \neq j ; i, j = 1, \cdots, k]$$

gilt. Das k-dimensionale Simplex H_ω, dessen Punkte durch die in einem Ursprung Z angreifenden Ortsvektoren

$$\sum_1^k \lambda_\nu \mathfrak{a}_\nu \qquad [1 \geqslant \lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_k \geqslant 0]$$

gegeben sind, wollen wir ein Hillsches Hypertetraeder nennen. Für $k=3$, also im Falle des gewöhnlichen Raumes, ist H_ω ein von M. J. M. Hill (1) beschriebenes Tetraeder (vergl. Abb. und Tabelle), dessen Volumen sich auf Grund der üblichen Inhaltsaxiome ohne Grenzübergang aus dem Prismavolumen ableiten lässt. Diese Möglichkeit hängt aufs engste mit der Tatsache zuzammen, dass das Hillsche Tetraeder mit einem Würfel zerlegungsgleich (endlichgleich) ist (2). Mühelos lässt sich bestätigen, dass die bekannten von M. Dehn (3) aufgestellten notwendigen Bedingungen für eine bestehende Zerlegungsgleichheit im vorliegenden Falle erfüllt sind (vergl. Tabelle).

Die oben erwähnte eindeutige Bestimmbarkeit des Volumens ohne Stetigkeitsbetrachtung ist andererseits nach einem allgemeinen Satz von B. Jessen (4) übrigens auch hinreichend dafür, dass diese speziellen Tetraeder mit einem Würfel ergänzungsgleich bzw. zerlegsgleich sind.



a_i Kanten
α_i Flächenwinkel
$\omega = \cos\theta$
$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi$

i	a_i	$\cos\alpha_i$
1	1	$\sqrt{1+2\omega/2+2\omega}$
2	1	$-\omega/1+\omega$
3	1	$\sqrt{1+2\omega/2+2\omega}$
4	$\sqrt{2+2\omega}$	0
5	$\sqrt{2+2\omega}$	0
6	$\sqrt{3+6\omega}$	1/2

(*) Eingegangen am 4.10.1951.

(1) M. J. M. Hill, Determination of the volumes of certain species of tetrahedra without employment of the method of the limits; Proc London Math. Soc. **27** (1896) 39–53.

(2) Nach den Hillschen Konstruktionen ergibt sich zunächst die Zerlegungsgleichheit seines Tetraeders mit einem dreiseitigen Prisma; hieraus resultiert weiter die Zerlegungsgleichheit eines Hillschen Tetraeders mit einem Parallelotop. Hier kam damals die Schlussweise zum Stillstand, da man erst viel später erkannte, dass jedes Parallelotop mit einem Würfel zerlegungsgleich ist. Dies wurde u. W. erstmals von A. Emch Endlichgleiche Zerschneidung von Parallelotopen in gewöhnlichen und höheren Euklidischen Räumen; Comm. Math. Helv. **18.** (1945/46) 224-231 bewiesen. Eine diesbezügliche Bemerkung von C. Juel (Egalité par addition de quelques polyèdres; Ber. d. K. Ges. d. Wiss. Kopenhagen 1903, 65-67), die sich auf eine Pyramide, welche sich aus vier «rechtwinkligen» Hillschen Tetraedern zusammensetzt, bezieht, wurde aus den oben genannten Gründen von H. Vogt (Ueber Gleichheit und Endlichgleichheit von Prismen und Pyramiden; **139.** Programm d. Königlichen Friederichs-Gymnasiums zu Breslau 1904, S. 9 Fussnote 1) als Irrtum angeführt. Die Juelsche Behauptung ist aber doch richtig!

(3) M. Dehn, Ueber den Rauminhalt; Math. Ann. **55.** (1901) 465-478. Einen vereinfachten Beweis des Dehnschen Satzes gab kürzlich José da Silva Paulo, Aequivalenz von Polyedern; Gaz. Mat., Lisboa, **9**, 4-6 (1948).

(4) B. Jessen, En Bemaerkning om Polyedres Volumen; Mat. Tidsskr. B, 1941.

In der vorliegenden Note will ich einen kurzen Beweis dafür skizzieren, dass die sich auf die Hillschen Tetraeder beziehende klassische Satzaussage für alle Dimensionen zutrifft, d. h. es gilt

Die k*-dimensionalen Hillschen Hypertetraeder* H_ω *sind mit einem* k*-dimensionalen Hyperwürfel* W *zerlegungsgleich.*

Ueber die Zerlegungsgleichheit k-dimensionaler Polyeder ist für $k>3$ u. W. noch nicht sehr viel bekannt; begreiflicherweise, wenn man bedenkt, dass gewisse charakteristische Schwierigkeiten nicht einmal im elementargeometrischen Fall $k=3$ überwunden werden konnten (5). Der hier mitgeteilte Sachverhalt dürfte für gewisse Untersuchungen über Zerlegungsgleichheit im k-dimensionalen Raum wertvolle Hinweise liefern.

Um den in Aussicht gestellten Beweis einzuleiten, gehen wir von der Bemerkung aus, dass es eine Gruppe von kongruenten Abbildungen χ_p $[p=1,2,\cdots k!]$ (Drehungen und Spiegelungen) des k-dimensionalen Raumes gibt, welche die k im Ursprung Z angreifenden Vektoren $\mathfrak{a}_\nu$ $[\nu=1,2,\cdots,k]$ des isogonalen k-Beins $(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \cdots, \mathfrak{a}_k)$ in sich überführen.

Es sei $\mathfrak{a}_\nu^p=\chi_p(\mathfrak{a}_\nu)$ der Bildvektor von $\mathfrak{a}_\nu$; dann ist das Bildsimplex $H_\omega^p=\chi_p(H_\omega)$ von H offenbar durch die Ortsvektoren $\sum_1^k \lambda_\nu \mathfrak{a}_\nu^p$ $[1\geqslant\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_k\geqslant 0]$ festgelegt. Die in dieser Darstellung auftretende Anordnung $(\mathfrak{a}_1^p, \cdots, \mathfrak{a}_k^p)$ stellt eine der Abbildung χ_p eineindeutig zugeordnete Permutation der ursprünglichen Anordnung $(\mathfrak{a}_1, \cdots, \mathfrak{a}_k)$ dar. Bezeichnet $(\lambda_1^p, \cdots, \lambda_k^p)$ die kogrediente Permutation des Koeffizientensatzes $(\lambda_1 \cdots, \lambda_k)$, so lässt sich H_ω^p auch durch die Ortsvektoren $\sum_1^k \lambda_\nu^p \mathfrak{a}_\nu$ beschreiben.

Im Hinblick einerseits auf die Nebenbedingung $1\geqslant\lambda_1\geqslant\cdots\geqslant\lambda_k\geqslant 0$ ergibt sich, dass die $k!$ verschiedenen Bildsimplexe H_ω^p paarweise keine inneren Punkte gemeinsam haben können, und andererseits erhellt der Umstand, dass p alle Permutationen durchläuft, dass das Vereinigungspolyeder

$$P=\sum_1^{k!} H_\omega^p$$

durch die Ortsvektoren

$$\sum_1^k \lambda'_\nu \mathfrak{a}_\nu \qquad [0\leqslant\lambda'_\nu\leqslant 1,\quad \nu=1,2,\cdots,k]$$

dargestellt ist, da ja ein beliebiger Koeffizientensatz (λ'_ν), der den Nebenbedingungen rechts genügt, stets als Permutation eines monoton fallenden Koeffizientensatzes (λ_ν) darstellbar ist. Also ist P ein k-dimensionales Parallelotop, insbesondere ein Hyperrhomboeder. Nach einem bekannten Satz von A. Emch (6) u. a. ist P mit einem Hyperwürfel W' zerlegungsgleich. Von den $k!$ Bildsimplexen H_ω^p sind $\frac{k!}{2}$ kongruent und $\frac{k!}{2}$ symmetrisch zu H_ω. Nach der geläufigen k-dimensionalen Erweiterung eines klassischen Satzes (7) sind aber symmetrische Polyeder zerlegungsgleich. Unser Würfel W' ist somit zerlegungsleich mit der Vereinigung von $k!$ kongruenten Exemplaren H_ω. Da andererseits der Würfel W' auch zerlegungsgleich mit $k!$ kongruenten kleineren Würfeln W ist, folgt so, dass H_ω mit W in diesem Sinne selbstergänzungsgleich ist. Nach den vom Verf. kürzlich bewiesenen allgemeinen Sätzen über Ergänzungsgleichheit (8) resultiert nunmehr die Zerlegungsgleichheit von H_ω mit W, w. z. b. w.

---

(5) Die für die Zerlegungsgleichheit zweier Polyeder hinreichenden Bedingungen konnten immer noch nicht aufgefunden werden; sie sind vermutlich mit den Dehnschen notwendigen Bedingungen identisch.

(6) vergl. Fussnote (2).

(7) vergl. etwa: H. Schoute, Mehrdimensionale Geometrie, II. Teil, Leipzig 1905; Nr. 38.

(8) H. Hadwiger, Ergänzungsgleichheit k-dimensionaler Polyeder; befindet sich im Druck und erscheint voraussichtlich in der Math. Zeitschr.