Hillsche Hypertetraeder (*)

von **H. Hadwiger**
Universität Bern' Schweiz

Es sei $(\mathfrak{a}_1, \cdots, \mathfrak{a}_k)$ ein System von k linear unabhängigen isogonalen Einheitsvektoren $\mathfrak{a}_\nu$ des k-dimensionalen euklidischen Raumes, sodass für ein $\omega = \cos\theta$, $-\dfrac{1}{k-1} < \omega < 1$,

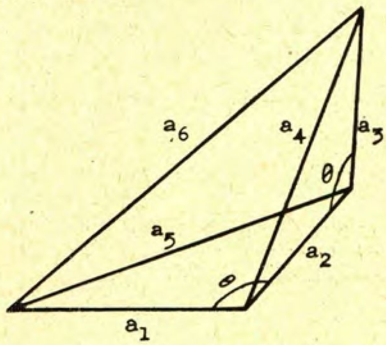
$$(\mathfrak{a}_i\,,\,\mathfrak{a}_j) = \omega \qquad [i \neq j\,;\, i, j = 1, \cdots, k]$$

gilt. Das k-dimensionale Simplex H_ω, dessen Punkte durch die in einem Ursprung Z angreifenden Ortsvektoren

$$\sum_1^k \lambda_\nu \mathfrak{a}_\nu \qquad [1 \geqslant \lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_k \geqslant 0]$$

gegeben sind, wollen wir ein Hillsches Hypertetraeder nennen. Für $k=3$, also im Falle des gewöhnlichen Raumes, ist H_ω ein von M. J. M. Hill [1] beschriebenes Tetraeder (vergl. Abb. und Tabelle), dessen Volumen sich auf Grund der üblichen Inhaltsaxiome ohne Grenzübergang aus dem Prismavolumen ableiten lässt. Diese Möglichkeit hängt aufs engste mit der Tatsache zuzammen, dass das Hillsche Tetraeder mit einem Würfel zerlegungsgleich (endlichgleich) ist [2]. Mühelos lässt sich bestätigen, dass die bekannten von M. Dehn [3] aufgestellten notwendigen Bedingungen für eine bestehende Zerlegungsgleichheit im vorliegenden Falle erfüllt sind (vergl. Tabelle).

Die oben erwähnte eindeutige Bestimmbarkeit des Volumens ohne Stetigkeitsbetrachtung ist andererseits nach einem allgemeinen Satz von B. Jessen [4] übrigens auch hinreichend dafür, dass diese speziellen Tetraeder mit einem Würfel ergänzungsgleich bzw. zerlegsgleich sind.



a_i Kanten
α_i Flächenwinkel
$\omega = \cos\theta$
$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi$

i	a_i	$\cos \alpha_i$
1	1	$\sqrt{1+2\omega/2+2\omega}$
2	1	$-\omega/1+\omega$
3	1	$\sqrt{1+2\omega/2+2\omega}$
4	$\sqrt{2+2\omega}$	0
5	$\sqrt{2+2\omega}$	0
6	$\sqrt{3+6\omega}$	1/2

(*) Eingegangen am 4.10.1951.

(1) M. J. M. Hill, Determination of the volumes of certain species of tetrahedra without employment of the method of the limits; Proc London Math. Soc. **27** (1896) 39–53.

(2) Nach den Hillschen Konstruktionen ergibt sich zunächst die Zerlegungsgleichheit seines Tetraeders mit einem dreiseitigen Prisma; hieraus resultiert weiter die Zerlegungsgleichheit eines Hillschen Tetraeders mit einem Parallelotop. Hier kam damals die Schlussweise zum Stillstand, da man erst viel später erkannte, dass jedes Parallelotop mit einem Würfel zerlegungsgleich ist. Dies wurde u. W. erstmals von A. Emch Endlichgleiche Zerschneidung von Parallelotopen in gewöhnlichen und höheren Euklidischen Räumen; Comm. Math. Helv. **18.** (1945/46) 224-231 bewiesen. Eine diesbezügliche Bemerkung von C. Juel (Egalité par addition de quelques polyèdres; Ber. d. K. Ges. d. Wiss. Kopenhagen 1903, 65-67), die sich auf eine Pyramide, welche sich aus vier «rechtwinkligen» Hillschen Tetraedern zusammensetzt, bezieht, wurde aus den oben genannten Gründen von H. Vogt (Ueber Gleichheit und Endlichgleichheit von Prismen und Pyramiden; **139.** Programm d. Königlichen Friederichs-Gymnasiums zu Breslau 1904, S. 9 Fussnote 1) als Irrtum angeführt. Die Juelsche Behauptung ist aber doch richtig!

(3) M. Dehn, Ueber den Rauminhalt; Math. Ann. **55.** (1901) 465-478. Einen vereinfachten Beweis des Dehnschen Satzes gab kürzlich José da Silva Paulo, Aequivalenz von Polyedern; Gaz. Mat., Lisboa, **9**, 4-6 (1948).

(4) B. Jessen, En Bemaerkning om Polyedres Volumen; Mat. Tidsskr. B, 1941.