L'insegnamento delle frazioni (*)

di Emma Castelnuovo
Roma

Come ogni ramo della matematica così anche l'aritmetica ha una sua storia: una storia propriamente detta relativa alla scoperta o alla chiarificazione di un dato concetto numerico, e una storia dell'inserirsi e del divulgarsi del concetto stesso nella vita. Indubbiamente le due storie sono legate fra loro, ma i passaggi dall'una all'altra sono sempre molto lenti.

Ora, l'atteggiamento intellettuale del fanciullo è spesso dovuto a un'azione eriditaria considerata nel senso più largo; ma, evidentemente, non è il lavoro fatto da un matematico su questo o quell'argomento che lascia una traccia nella mentalità infantile, bensì lo sviluppo e l'uso di una determinata nozione nella vita pratica.

Questo lento processo di assimilazione esercita una profonda influenza sulla disposizione del bambino ad apprendere.

Ci proponiamo qui di analizzare le difficoltà che incontra l'allievo nello studio delle frazioni e di discutere un piano per un primo insegnamento di questo concetto, collegandolo all'uso e alla pratica che del concetto stesso si fece nella storia dell'umanità.

L'insegnamento attuale delle frazioni

Nelle popolazioni civili lo studio sistematico, da un punto di vista pratico, del calcolo frazionario viene impartito a ragazzi dagli 11 ai 14 anni.

Occorre notare che ad 11 anni il bambino ha acquisito nel campo concreto il concetto di talune frazioni, in particolare delle unità frazionarie; recenti esperienze fatte a Ginevra all'Institut Rousseau sotto la guida di Jean Piaget provano che è proprio nel periodo dagli 8 agli 11 anni che il bambino afferra e comprende — naturalmente per gradi — il concetto di frazione. Quando noi iniziamo lo studio sistematico delle frazioni il ragazzo ne ha dunque già acquisito il concetto.

Dopo uno o due anni di questo studio, dopo infiniti esercizi su espressioni frazionarie, si verifica un fatto assai strano: il ragazzo incaricato di andare ad acquistare $\frac{3}{8}$ di litro di latte è un pò incerto se gli basterà portare una bottiglia vuota da $\frac{1}{2}$ litro. Il nostro giovanetto, per scusare le proprie incertezze, afferma che gli studi fatti avevano carattere teorico e che così si dice a Scuola — il corso di Aritmetica serve per aiutare a ragionare proprio come quello di latino. Quanto al suo professore, conscio evidentemente del risultato negativo del proprio insegnamento, preferisce sorvolare sui problemi pratici ed insistere sempre più su quelle espressioni frazionarie che, di anno in anno, crescendo in lunghezza e in altezza tendono con la loro estensione ad invadere l'intera lavagna.

Nè l'allievo nè il maestro hanno osservato che sul libro di testo è scritto «Arimetica pratica». Minima è evidentemente la colpa dell'allievo, grande quella del maestro, ma grandíssima quella dell' autore del libro.

Nella maggior parte dei testi la frazione viene introdotta prima come *operatore* e poi come *numero*; ma non sono due definizioni, anche se si succedono opportunamente, che possono chiarire il concetto. Il periodo che è passato storicamente fra la nozione concreta e quella astratta non può ridursi alle poche righe che intercorrono fra una definizione e l'altra. Bisogna tener presente che è sono dopo secoli di lavoro che il simbolo $\frac{m}{n}$ fu spogliato del suo significato concreto e fu considerato come un numero.

Inoltre, le operazioni di addizione e sottrazione sono state create per necessità pratiche, cioè sono nate storicamente in modo concreto, mentre a Scuola il

(*) Ricevuto nell' Ottobre 1951.

calcolo frazionario viene svolto considerando la frazione come numero. Giustamente osserva R. Courant [1] che per ridurre immediati i calcoli sull' addizione e sottrazione si poteva stabilire per esempio che:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{2}{4};$$

ma è la rappresentazione concreta che ci impedisce di fissare per il calcolo numerico norme arbitrarie come la precedente.

Se l'attenzione dell'allievo non è costantemente richiamata all'interpretazione concreta è inevitabile che egli cadrà in errori di questo genere.

Un corso ciclico per le frazioni

Nell'insegnamento non si deve trascurare nessuno dei vari aspetti del concetto di frazione anche se si ha l'impressione di perder tempo. Io sarei del parere di «frazionarli» nei primi tre anni della Scuola secondaria: nel 1.º la frazione dovrebbe introdursi da un punto di vista concreto come *operatore;* nel 2.º come *numero;* nel 3.º come *rapporto.*

Qui mi propongo di discutere solo l'insegnamento del primo anno di questo corso ciclico.

Quest'insegnamento potrà essere iniziato anche subito, senza aver bisogno di svolgere alcuna teoria preliminare sul massimo comun divisore e minimo comune multiplo. Si eviterà così il pericolo di diffondersi troppo in questo studio astratto nel primo anno, quando l'allievo non può intendere ancora l'interesse di una teoria generale.

Il concetto di frazione nel piano concreto

Mi pare che le difficoltà che s'incontrano nel concetto di frazione sul piano concreto debbano attribuirsi a due fattori:

I) la frazione $\frac{m}{n}$ porta a fissare l'attenzione su *tre* punti contemporaneamente:

1) la parte $\frac{1}{n}$
2) la somma delle m parti
3) l'intero.

Questa contemporaneità di pensiero, obbligando a una sintesi, determina un notevole sforzo d'astrazione; è una difficoltà di ordine visivo.

II) La frazione $\frac{m}{n}$ ha, pur limitandosi sempre al campo concreto, due significati:

1) l'atto operativo: dividere l'intero in n parti e prenderne m;
2) il risultato dell'operazione: la parte di valore $\frac{m}{n}$.

Questo duplice aspetto porta a una difficoltà di ordine psicologico.

Analisi della prima difficoltà. Questa porta ad evitare la frazione.

A me pare che in questo punto la mentalità infantile riproduca, fin nei particolari, quella degli antichi.

Troviamo infatti che il pensiero dominante degli Egiziani e dei calcolatori Greci nel campo delle frazioni è quello di spezzare una frazione in somma di unità frazionarie:

$$\frac{m}{n}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\cdots+\frac{1}{p}.$$

Abituata a lavorare sugli interi, entità visibili, la mente dei primitivi rifugge dalla considerazione di tre concetti contemporanei, cioè dal concetto generale $\frac{m}{n}$, e si limita alla considerazione di unità frazionarie. L'unità frazionaria porta a fissare l'attenzione solo su due punti simultaneamente: la parte e l'intero. Spezzare la frazione significa lavorare su entità visibili, percettive.

Per evitare dunque le frazioni gli antichi ricorsero alle unità frazionarie.

Lo stesso avviene nei nostri bambini: per prendere $\frac{3}{4}$ di una tavoletta di cioccolata il bambino ne prende prima $\frac{1}{2}$ e poi $\frac{1}{2}$ di quello che rimane; opera quindi, come gli antichi, lo spezzamento:

$$\frac{3}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}.$$

Un altro modo di evitare le frazioni è quello di creare *nuove unità di misura:* è quanto è stato fatto dai Babilonesi e più tardi dai Romani, che arrivarono a enormi complicazioni nel loro sistema di unità di misura pur di evitare il simbolo $\frac{m}{n}$.

Anche il bambino ricorre a questo metodo: se il bastone che ha preso per misurare la distanza fra due oggetti è contenuto per esempio più di 4 volte e meno di 5, egli dice che «non è buono» e preferisce pren-

(1) R. COURANT and H. ROBBINS: *What is Mathematics* — Oxford University Press, 1946 — pag. 54. Traduzione italiana: Casa editrice Einaudi.

derne un altro più piccolo o più grande, ma tale che sia contenuto un numero intero di volte. Egli cambia dunque unità di misura.

Quanto alle unità frazionarie, benchè fin dalla più remota antichità ne compaiano di assai complesse, come nel Papyrus Rhind:

$$\frac{2}{29}=\frac{1}{24}+\frac{1}{58}+\frac{1}{174}+\frac{1}{232},$$

nella vita pratica egiziana sono state introdotte gradualmente.

Ce lo prova il fatto che gli Egiziani per prendere un sottomultiplo di un numero procedevano fin che possibile con successive divisioni per 2, cioè si valevano delle unità frazionarie:

$$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16},\frac{1}{32},\frac{1}{64},\cdots$$

Queste furono anzi assunte come sottomultipli dell'unità di capacità, l'hekat. (1)

Sucessivamente si utilizzarono molto spesso anche le unità:

$$\frac{1}{10},\frac{1}{3},\frac{1}{6},\frac{1}{12}.$$

Nei bambini l,analogia con la mentalità antica si ritrova nella successiva, graduale assimilazione del concetto di unità frazionaria. Si osserva infatti che al bambino l'unità $\frac{1}{2}$ riesce molto più semplice delle altre: $\frac{1}{3},\frac{1}{5},\frac{1}{10}$ (2). La differenza di difficoltà fra 1/2 e 1/3 ad esempio mi sembra debba attribuirsi a questo: $\frac{1}{2}$ traduce l'operazione di un movimento semplice (la piegatura di una strisciolina di carta, per esempio, in modo che i due estremi coincidano), mentre $\frac{1}{3}$ traduce un'operazione complessa (la trisezione).

E' chiaro che da un punto di vista percettivo si coglie subito la prima operazione, perchè se ne vede l'immediata esecuzione, mentre «vedere» la seconda è più difficile perchè non è chiaro il modo di eseguirla.

Trovato $\frac{1}{2}$, non c'è difficoltà ad avere $\frac{1}{4},\frac{1}{8},\cdots$

(1) É interessante notare che questi sottomultipli rimasero in uso si puó dire fino ai giorni nostri, fino all'introduzione del sistema decimale.

(2) Anche su questa graduale difficoltà riscontrata dal bambino interessanti esperienze sono state fatte all'Institut Rousseau pi Ginevra.

Giustamente osserva J. Piaget (1) che queste successive divisioni in due esercitano sul bambino una vera seduzione. Ma direi che questo sia un caso particolare di un fatto più generale: è il ripetersi di un'operazione che esercita un'attrazione sul bambino; qui poi oltre al ripetersi di questo atto operativo si ha come risultato un graduale rimpiccolimento e quindi viene eccitata la fantasia infantile.

Nella storia dell'aritmetica pratica egiziana si ritrova oltre all'uso delle unità frazionarie quello molto frequente della frazione $\frac{2}{3}$. Si è voluto attribuire a questa frazione un carattere mitico, come aveva nel campo della geometria il triangolo di lati 3, 4, 5. Ma anche il mito vuole le sue ragioni. Mi sembra che sia presumibile che l'uso della frazione $\frac{2}{3}$ si riallacci all'importanza che aveva questa frazione nella gamma cinese, la più antica a cui si possa risalire (2). Pur non prevedendo la funzione teorica che avrebbe avuto questa frazione nella gamma greca, se ne era intuita l'importanza, tanto che veniva considerata come una nuova unità di misura.

É chiaro che nella mente infantile non può riscontrarsi una particolare facilità per la frazione $\frac{2}{3}$; essa in fondo ha avuto un predominio solo per un periodo determinato di secoli e questo predominio non era dovuto a una convenienza pratica.

Analisi della seconda diffícoltà. Questa porta a considerare le frazioni come degli interi.

Questa difficoltà deriva, come abbiamo detto, dai due diversi significati che ha la frazione $\frac{m}{n}$, pur considerata sempre nel campo concreto: l'atto operativo e il risultato, la parte ottenuta.

Il fatto che gli antichi dividevano una frazione in unità frazionarie — enti visibili — ci prova anche che essi fermavano l'attenzione sul risultato, non sull'azione che conduce al risultato. Dai papiri egiziani risulta che la pratica nell'addizionare le unità $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}$ era tale che non si sentiva il bisogno di ridurle esplicitamente allo stesso denominatore. Essi «vedevano» dunque queste frazioni; ne percepivano il valore.

(1) J. Piaget: La géométrie spontanée de l'enfant. pg. 424. Paris, Presses Universitaires de France.

(2) A. Rey: *La science orientale avant les Grecs*, pg. 499. Paris, Albin Michel.

Come negli antichi il concetto di operatore è nascosto dal risultato così avviene nel bambino. Se gli diciamo di prendere i $\frac{3}{4}$ di una torta già divisa in 4 fette, egli prenderà 3 fette e non ricorderà più il valore di una fetta rispetto all'intero. Egli è condotto dunque ad agire come sugli interi. La sua mente si fisssa sul risultato; egli non pensa a come é stato ottenuto e non lo mette in relazione col totale.

Abbiamo detto che gli antichi riuscivano a «vedere» solo le unità frazionarie. L'intuizione di noi adulti — aiutata dall'azione ereditaria — si spinge un pò più in là: oltre alle unità frazionarie infatti noi riusciamo a cogliere il valore di frazioni a termini piccoli, per esempio la frazione $\frac{3}{4}$. Se invece la frazione ha termini grandi, per esempio $\frac{147}{352}$, la nostra mente non riesce a percepirne la grandezza e deve ricorrere all'atto operativo. Dunque, quando manca il sussidio visivo, si ritorna necessariamente all'operatore. Occorre risalire alle origini, alla costruzione.

In un primo insegnamento delle frazioni dovremo perciò insistere molto sull'atto operativo.

Un piano per l'insegnamento delle frazioni nel 1.º corso.

Da quanto abbiamo visto mi sembra che si possa asserire che il concetto di frazione non sorge naturalmente nel bambino come non è sorto in modo spontaneo negli antichi; e la cosa è avvalorata dal fatto che le società inferiori attuali non ne fanno uso. I secoli di lavoro pratico in questo campo sono ancora troppo pochi perchè se ne possa risentire una certa azione ereditaria.

Il bambino cerca di evitare la frazione propriamente detta e se è obbligato a questi calcoli s'industria ad attuarli come se operasse su degli interi.

A noi insegnanti si pone perciò un problema didattico diverso da quello che si presenta nell'introduzione dei numeri interi nelle scuole elementari; il problema è il seguente:

Far sentire la convenienza del calcolo frazionario e quindi fermarsi a lungo sul piano concreto; quando poi l'analogia coi numeri interi portasse a soffocare il concetto di frazione, richiamare la mente del bambino alla nozione primitiva.

Un'espressione conveniente per mettere in evidenza il valore relativo della frazione.

Ritorniamo all'esempio fatto prima sui $\frac{3}{4}$ della torta. Il bambino prende tre fette senza preoccuparsi della quarta. Solo se lo faremo riflettere su quello che rimane egli collegherà il numero delle parti che ha preso con l'intero, cioè avrà la concezione della frazione $\frac{3}{4}$ [1].

È qui il punto delicato, è qui dove il concetto di frazione si stacca veramente da quello di numero intero. È su questa *relatività* di valore che dobbiamo insistere nel primo avvicinarsi al concetto di frazione: è il valore relativo che interessa, non l'assoluto.

Io credo che la poca chiarezza che hanno i ragazzi nel concetto di frazione sia dovuta in parte all'espressione che usiamo; quando per esempio si dice: *tre quarti*, la mente considera i quarti come fossero oggetti; come dire: tre seggiole, tre case, ecc. e opera su questi come sugli interi, cioè fissa l'attenzione sul fatto che sono *tre*. Mi sembra che un'espressione capace di far riflettere sul valore relativo della frazione potrebbe essere la seguente (del resto usata per frazioni a termini grandi): *3 su 4*, dove alla preposizione «su» venga dato il significato originario. 3 su 4 significa infatti: 3 parti *delle* 4 parti, 3 parti *invece* di 4 parti, 3 *possibilità* su 4.

Quest'espressione doveva essere comunemente usata dagli Egiziani ogni volta che si trovavano davanti a una frazione di numeratore 2 e denominatore dispari; sappiamo che essi cercavano di disgregarla in somma di unità frazionarie per darle un senso. Ma finchè era scritta come frazione, per esempio (con notazione moderna) $\frac{2}{13}$, non la chiamavano «due tredicesimi», ma dicevano: «esprimi 2 entro 13, cioè vedi di quante parti si compone 2 rispetto a 13».

L. Rodet in un interessante articolo sul *Bulletin de la Société Mathématique de France* (t. VI, 1877-78) mette bene in evidenza il valore di quest'espressione che fu poi ripresa e adoperata dagli Arabi e dagli Ebrei.

La frazione. Le operazioni sulle frazioni. Addizione e sottrazione.

In un primo tempo converrà valersi di carta quadrettata, dove il lato del quadretto sarà considerato come qualcosa d'indivisibile. Si comincerà col far costruire le unità frazionarie:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots \tag{1}$$

$\frac{1}{2}$ significa la metà dell'intero; prenderemo dunque

(1) Vedi l'osservazione analoga fatta da L. Johannot in «*Le raissonnement mathématique de l'adolescent*» pg. 57. Neuchâtel, Delachaux et Niestlé; e da H. G. Wheat in «*The psychology and teaching of Arithmetic*», pg. 375. Boston, Heath and Company.

per intero un segmento divisibile in due: di 2 quadretti [1], o di $4, 6, \cdots$, insomma di un numero pari di quadretti. $\frac{1}{2}$ significa anche 1 *su* 2, una parte invece di due parti. S'insisterà su questo valore relativo per cui non ha importanza la grandezza dell'intero da cui si parte. Così si procederà per $\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots$

Si noti che come intero si potrebbe prendere una grandezza qualunque; il segmento è conveniente perchè facilmente rappresentabile, percepibile. Questo intero costituisce un appoggio visivo, una «base».

Partendo da un determinato segmento, per esempio di 16 quadretti, il ragazzo osserverà fàcilmente che:

1) ogni frazione (1) ha valore doppio della successiva;

2) $$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{4}{8}=\cdots$$

Arriverà così alla proprietà fondamentale delle frazioni. Si accorgerà che per ridurre ai «minimi termini» la frazione $\frac{8}{16}$ senza dover eseguire successive divisioni si può dividere subito i due termini per il loro *massimo comum divisore*; il concetto di massimo comun divisore entra così nel'insegnamento in modo naturale.

Si passerà poi alle unità frazionarie $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \cdots$

Come si *confronterà* $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$? Bisognerà prendere un segmento divisibile in due parti e in tre parti, cioè composto di 6 quadretti, o di 12, o di $18, \cdots$

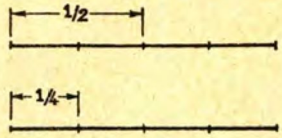
Ecco che si vede la convenienza pratica d'introdurre il *minimo comune multiplo.*

Si arriverà presto alla *frazione come somma di unità frazionarie; si costruirà insomma la frazione come un modo breve di espressione.*

Esempio: sia da eseguire l'addizione:

$\frac{1}{2}$ di un dato segmento $+\frac{1}{4}$ dello stesso segmento.

Per esprimere graficamente $\frac{1}{2}$ dovremo prendere un segmento formato da un numero pari di quadretti; per esprimere $\frac{1}{4}$ un segmento uguale al precedente e divisibile in quatro parti uguali. Converrà scegliere un segmento di 4 quadretti (vedi disegno). Opero l'addizione come se si tratasse di interi: ottengo 3 quadretti. È qui il punto delicato: ottengo 3 quadretti, è vero; ma, che cosa rappresentano questi quadretti rispetto al segmento di partenza? Osserviamo: ho avuto 3 quadretti invece di 4 quadretti, 3 parti su 4, 3 su 4; lo scrivo brevemente così: $\frac{3}{4}$.



Si entra in tal modo nel concetto di frazione.

In modo analogo si otterrà la differenza di due frazioni.

È chiaro che con questo procedimento il ragazzo si abituerà ben presto a calcolare espressioni del tipo:

$$2-\frac{5}{6}+\frac{3}{4}-\frac{2}{3}-\frac{1}{2}.$$

Alcune volte si arriverà a frazioni in cui il numeratore supera il denominatore (*frazioni improprie*). Esse assumeranno significato decomponendole in un numero intero e in una frazione propriamente detta. Si pensi che la frazione impropria riesce generalmente difficile perchè poco naturale, dato che si parte da un problema, spesso irrealizzabile, di questo tipo: prendere i $\frac{7}{5}$ di un oggetto.

La frazione impropria assume invece significato, anche nel campo concreto, se viene ad essere costruita come somma di frazioni.

Conviene anche tener presente che le frazioni improprie furono introdotte solo in via teorica nel 1700.

Le frazioni su cui il ragazzo lavorerà saranno sempre a termini piccoli. La frazione a termini grandi teoricamente non chiarisce certo il concetto e da un punto di vista pratico si può dire che non esista. Basterebbe per esempio confrontare le statistiche, dovute soprattutto agli americani e agli inglesi [1] relative alle frazioni che intervengono nella vita pratica.

Potrà accadere che, pur limitandosi sempre a calcoli su frazioni a termini piccoli, si debba prendere

---

(1) Per brevità diremo quadretto invece che lato di un quadretto.

(1) Vedi per esempio: H. G. WHEAT: «*The psichology and teaching of Arithmetic*», Heath and Company, Boston, 1937.

P. B. BALLARD: «*Teaching the Essentials of Arithmetic*», University of London Press, London, 1928.

The Scottish Council for Research in Education: «Studies in Arithmetic», vol. 1°, University of London Press, London, 1939 come «base» un segmento non contenuto nel foglio. È allora che il ragazzo si accorgerà che la rappresentazione grafica può essere anche mentale, purchè egli mantenga — e questo è importante — la percezione del segmento.

Questo momento del calcolo frazionario equivale a quello che è segnato nel campo dei numeri interi dal distacco del numero dalla sua rappresentazione grafica. Tale distacco non è mai totale: la percezione visiva è sostituita da una percezione mentale: si «vede» il numero.

Moltiplicazione e divisione

Diciamo subito che ci sembra molto discutibile se sia opportuno introdurre queste operazioni in un primo insegnamento delle frazioni; nel caso affermativo è bene porre ogni attenzione su questo studio che è molto delicato.

Moltiplicazione

Dato che ci limitiamo alle frazioni di grandezza, terremo presente che i fattori e il risultato di una moltiplicazione dovranno poter essere interpretati nel campo concreto.

Ora, mentre nel campo dei numeri interi la moltiplicazione si può interpretare come un'addizione abbreviata:

$$3 \cdot 4 = 4 + 4 + 4 ,$$

qnesta interpretazione viene a mancare se si passa alle frazioni.

Ricorriamo allora alla rappresentazione geometrica: sappiamo che nel campo degli interi il prodotto $3 \cdot 4$ rappresenta l'area di un rettangolo di dimensioni 3 e 4, espresse in una data unità di misura; questa interpretazione può estendersi al caso in cui base e altezza del rettangolo siano frazioni di interi. La scrittura:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5}$$

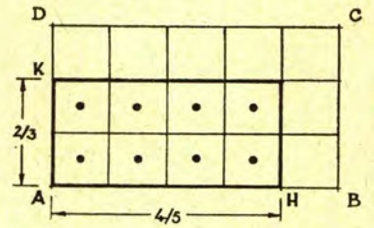
rappresenta l'operazione che si deve eseguire per calcolare l'area di un rettangolo di dimensioni $\frac{2}{3}$ di un segmento e $\frac{4}{5}$ di un altro segmento.

Risulta dalla rappresentazione grafica che il rettangolo che ha per dimensioni i segmenti di partenza AB e AD si compone di 15 parti, mentre il rettangolo di dimensioni $AH = \frac{4}{5}\, AB$ e $AK = \frac{2}{3} AD$ si compone di 8 parti.

Abbiamo dunque: 8 parti invece di 15 parti, 8 su 15, $\frac{8}{15}$. Quindi:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{15} .$$

Va osservato che a differenza delle operazioni di addizione e sottrazione i due termini della moltipli-



cazione non debbono necessariamente riferirsi alla stessa unità; per esempio nel caso della figura i segmenti AB e AD sono disiguali.

Dalla regola di moltiplicazione di due fattori si si passa facilmente a quella di tre o più fattori: basta infatti eseguire la moltiplicazione a due a due per ottenere la regola generale.

Da un punto di vista didattico l'interpretazione visiva della moltiplicazione, che abbiamo ora dato, riesce assai facile perchè si può riattaccare al procedimento seguito alla Scuola elementare per introdurre la moltiplicazione fra due numeri interi. Col disegno, com l'uso del pallottoliere ecc. si fanno disporre gli oggetti in modo da formare un rettangolo; così, per esempio, il risultato della moltiplicazione $2 \cdot 3$ viene presentato sotto la forma rettangolare qui riprodotta:

Il problema sulla moltiplicazione

Siamo partiti dalla scritttura $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5}$ interpretata come operazione per trovare l'area di un rettangolo di dimensioni $\frac{2}{3}$ e $\frac{4}{5}$ e abbiamo scoperto la regola di moltiplicazione delle frazioni.

In generale nei libri di testo si dà la regola di moltiplicazione delle frazioni senza alcuna giustificazione.

Passando quindi alle applicazioni e ai vari tipi di problemi si enuncia la regola: «per prendere una frazione di un numero o di un'altra frazioni e si deve eseguire una moltiplicazione»».

Talvolta, per un desiderio di maggiore efficacia didattica, prima d'introdurre la regola di moltiplicazione di due frazioni si parte da un problema del seguente tipo: *prendere i* $\frac{2}{3}$ *dei* $\frac{4}{5}$ *di una data grandezza.* Il ragazzo è condotto a prendere prima i $\frac{4}{5}$ della grandezza, ottenendo così una seconda grandezza, e poi i $\frac{2}{3}$ di quest'ultima. È condotto cioè ad operare sucessivamente.

Allora si cerca di fargli comprendere che quanto si ottiene in due operazioni successive coincide col risultato che si avrebbe operando una sola volta sulla grandezza di partenza con la frazione $\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}=$ $=\frac{8}{15}$. Ecco come si procede in generale: siccome da un punto di vista grafico risulta:

$$(1)\qquad \frac{2}{3} \text{ dei } \frac{4}{5}=\frac{8}{15},$$

dato che:

$$8=2\cdot 4 \quad , \quad 15=3\cdot 5 \; ,$$

si conviene che:

$$(2)\qquad \frac{2}{3} \text{ dei } \frac{4}{5}=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}.$$

Ma, a quest' uguaglianza si può arrivare solo se si è precedentemente introdotta l'operazione di moltiplicazione e se si è provato che:

$$(3)\qquad \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}=\frac{8}{15}.$$

Allora dalla (1) e dalla (3) risulterà la (2).

È proprio questa mancanza di ordine logico che il bambino avverte inconsciamente.

Occorre quindi introdurre prima la moltiplicazione di due frazioni (per esempio basandosi sull'appoggio visivo del rettangolo) e successivamente interpretare come moltiplicatoria l'expressione «dei».

La difficoltà viene così attenuata, non certo eliminata.

È sempre una convenzione, sia pure giustificata, quella per cui si traduce in simbolo di moltiplicazione l'espressione «dei»; e quindi, come in tutte le convenzioni, il bambino avverte un senso di artificiosità che lo costringe a uno sforzo d'astrazione.

Divisione

Ricorriamo allo stesso esempio numerico trattato nella moltiplicazione.

Partiremo dalla scrittura:

$$(1)\qquad \frac{8}{15}:\frac{2}{3}$$

e procederemo come nel caso della moltiplicazione: *la* (1) *può interpretarsi come l'altezza (o la base) di un rettangolo di cui è data l'area e la base (o l'altezza).* Si tratta quindi di costruire un rettangolo la cui area sia gli $\frac{8}{15}$ dell'area di un altro e vedere come risulta l'altezza se la base diventa i $\frac{2}{3}$ della base primitiva. Indubbiamente la costruzione è molto complicata. Sarei quindi d'opinione di trovare la regola della divisione con questa interpretazione geometrica solo in casi particolari (il divisore è un numero intero o un'unità frazionaria).

È difficile far derivare la regola di divisione da un problema concreto, e questo è avvalorato dal fatto che storicamente tale operazione compare molto tardi e da un punto di vista teorico, considerando la frazione come numero.

Ritengo quindi opportuno d'introdurrre la divisione come l'operazione inversa della moltiplicazione; si troverà empiricamente il quoziente e si verificherà poi il risultato.

Il problema sulla divisione

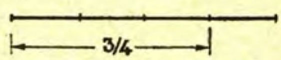
Ancor più che per la moltiplicazione si riscontra nel ragazzo una notevole difficoltà nell'interpretare i problemi sulle frazioni che portano a una divisione. Anche qui la difficoltà è assolutamente giustificata.

Non invertiamo il problema esposto per la moltiplicazione perchè poco visibile, ma ci limitiamo ad un esempio numerico e concreto particolarmente semplice: trattiamo un caso in cui il dividendo è un numero intero. Sia da risolvere il problema:

$\frac{3}{4}$ di litro di latte costano L. 60; quanto costa 1 litro?

La risoluzione è facile se si poggia l'attenzione su uno schema grafico.

L'intero segmento rappresenta 1 litro; i $\frac{3}{4}$ equivalgono a $L.60$. Dunque $\frac{1}{4}$ del segmento equivale a $L.60:3=$ $=L.20$, e quindi l'intero segmento equivale a $L.20.4=L.80$.



Il ragazzo è condotto anche in questo problema a spezzare la dificoltà operando due volte sucessivamente.

Si cerca di fargli comprendere che il problema si traduce nella divisione di partizione:

$$60:\frac{3}{4}.$$

Ma, se ci si limita a frazioni di grandezza, la difficoltà che ha il ragazzo è perfettamente logica e non può essere alleviata dall'analogia col campo degli interi. Infatti: il problema con dati interi:

3 litri di latte costano $L.\ 240$; quanto costa 1 litro? viene tradotto nella divisione di partizione:

$$240:3\ ,$$

dove il numero 3 è un numero puro.

La divisione a cui siamo portati nel problema analogo con dati frazionari è la seguente:

$$60:\frac{3}{4}\ ;$$

ora, questa divisione non ha senso se si considera la frazione $\frac{3}{4}$ solo nel campo concreto; per noi—finora—a frazione come numero puro non esiste.

Dunque, finchè ci si limita al campo concreto non dobbiamo far tradurre in una divisione un problema del tipo ora esposto; la risoluzione sarà eseguita sul diano grafico.

Conclusione

Non intendiamo di aver dato un metodo per un primo insegnamento delle frazioni; abbiamo solo voluto richiamare l'attenzione su un problema didattico che non deve sfuggire al maestro.

La nostra esposizione si chiude invitando i colleghi a riflettere su alcuni interrogativi:

1) Dobbiamo tener conto dello sviluppo storico nell'insegnamento delle frazioni?

2) È opportuno fare un corso ciclico?

3) Dobbiamo dare libertà al professore nell'insegnamento delle frazioni?