GAZETA DE MATEMÁTICA
N.º 50 — Dezembro de 1951

Quelques problèmes de physique théorique (*)

par Antonio Gião

I — Sur la masse propre du photon. II — Sur la différence de comportement de la masse dans un champ gravifique et de la charge électrique dans un champ électromagnétique. III — Propriétés générales du champ électromagnétique généralisé. IV — Sur l'équation de SCHWINGER-TOMONAGA. V — Champs magnétiques stellaires à variation periodique.

I

Sur la masse propre du photon

De la quantification des équations du champ métrique interne et externe dans notre théorie unitaire [1] nous avons pu déduire l'expression suivante pour le potentiel électrostatique $V(r)$ dune charge ponctuelle ε isolée, c'est-à-dire suffisamment éloignée de toute autre charge:

$$V(r) = \varepsilon \frac{e^{-\eta_1 r} - e^{-\eta_2 r}}{r}, \tag{1}$$

où η_1 et η_2 sont des constantes dont nous indiquerons plus loin les valeurs. Ce potentiel, identique au potentiel déduit par M. L. DE BROGLIE par sa méthode du «champ soustractif» [2], est la différence d'un potentiel quasi coulombien à grande portée (constante η_1) et d'un potentiel de YUKAWA à faible portée (constante η_2). Il reste fini pour $r \to 0$ et correspond à une valeur finie

$$W_0 = \frac{\varepsilon^2}{4} \frac{(\eta_2 - \eta_1)^2}{\eta_1 + \eta_2} \tag{2}$$

de l'énergie propre de la particule électrisée. La constante η_1, qui nous intéresse ici particulièrement, est reliée par

$$m^0_{ph.} = \frac{h}{2\pi c} \eta_1 \tag{3}$$

à la masse propre $m^0_{ph.}$ du photon, que nous allons essayer de déterminer.

D'après notre théorie unitaire [3], l'espace-temps peut être considéré comme une hypersurface V_4 d'un espace auxiliaire ambiant pseudo-euclidien pentadimensionnel E_5, et toutes les propriétés électromagnétiques correspondent à des propriétés de la métrique externe de V_4 dans E_5. Considérons, comme dans un travail récent [4] auquel nous renvoyons le lecteur pour éviter des répétitions, deux déformations *opposées* (D_1, D_2) de V_4, c'est-à-dire telles que les dérivées premières et secondes des coordonnées des points de E_5 sur V_4 par rapport aux coordonnées des points de V_4, ont la même valeur absolue et des signes opposés en tout couple (P_1, P_2) de points correspondants de D_1 et D_2. La Géometrie Différentielle nous apprend alors que les composantes ω_{ik} du tenseur métrique externe de V_4, contrairement à celles du tenseur métrique interne g_{ik}, ont la même valeur absolue et des signes opposés en P_1 et P_2.

Considérons les équations du champ métrique externe

$$S_{ik} - \frac{1}{2}(S + \lambda_\omega)\,\omega_{ik} = U_{ik}, \tag{4}$$

où S_{ik} désigne le tenseur de Ricci formé avec le tenseur externe ω_{ik}, S l'invariant $\omega^{ik} S_{ik}$ (avec $\omega^{ih}\omega_{hk} = \delta^i_k$), U_{ik} la densité d'énergie-quantité de mouvement de l'électricité (ce tenseur joue, pour l'électricité, un rôle parallèle à celui du tenseur T_{ik} pour la matière), et enfin λ_ω la constante cosmologique électromagnétique. Dans le cas où il est possible d'admettre l'existence de deux déformations D_1 et D_2 de l'espace-temps rigoureusement opposées, on déduit facilement de (4) la relation

$$U_{ik} = -\frac{1}{2}\lambda_\omega\,\omega_{ik}, \tag{5}$$

(*) Recebido em Outubro de 1951.

valable en un point quelconque de D_1 ou de D_2. Pour arriver [4] à cette relation il suffit d'appliquer le système (4) à un couple quelconque (P_1, P_2) de points correspondants de D_1 et D_2, et de supposer que ces déformations rigoureusement opposées de l'espace-temps sont associées à des distributions de charge électrique ayant la même valeur absolue, c'est-à-dire que les valeurs absolues $|U_{ik}|$ des composantes de la densité d'énergie-impulsion électrique sont les mêmes en P_1 et P_2.

Pour obtenir une autre expression de U_{ik}, nous rappelerons ici le principe fondamental de notre méthode de quantification des équations du champ métrique. D'après ce principe, les états quantiques de U_{ik} sont reliés aux états quantiques de ω_{ik} par la relation

$$(6) \qquad U_{ik}^{(lm)} = \frac{1}{4} U^{(l)} \omega_{ik}^{(lm)}, \qquad (U = \omega^{ik} U_{ik}),$$

dans laquelle l'indice supérieur l prend la valeur 1 pour la classe d'états quantiques non accompagnés d'émisssion ou d'absorption de rayonnement, la valeur 2 pour la classe d'états qui correspondent à une émission ou absorption de rayonnement et la valeur 3 pour la classe d'états d'interaction de la particule avec les autres particules d'un système. L'indice supérieur m symbolise l'ensemble des nombres quantiques habituels indépendamment de l'appartenance d'un état à l'une des trois classes $l=1$, $l=2$ et $l=3$.

La relation (6) permet de quantifier le système (4). Tout d'abord, ce système peut être écrit comme suit

$$(7) \qquad S_{ik} = U_{ik} - \frac{1}{2}(U + \lambda_\omega)\,\omega_{ik}.$$

La quantification par (6) donne alors

$$(8) \qquad S_{ik}^{(lm)} = -\frac{1}{2}\left(\lambda_\omega + \frac{U^{(l)}}{2}\right)\omega_{ik}^{(lm)}.$$

Pour pouvoir envisager l'existence de deux particules correspondant à des déformations rigoureusement opposées de l'espace-temps, il faut évidemment quantifier l'état de ces particules et ne considérer que les états quantiques où d'une part il n'y a pas d'interaction des particules et où d'autre part elles n'émettent ni n'absorbent de rayonnement. Il faut donc que les états des deux particules appartiennent à la classe définie par $l=1$. La relation (6) et le système (8) s'appliquent donc à deux deformations rigoureusement opposées à la condition de poser $l=1$. Afin de comparer ce résultat à (5), il faut maintenant remarquer que cette relation repose essentiellement sur l'hypothèse de l'égalité, en valeur absolue, de la charge des deux particules qui occupent une paire de déformations rigoureusement opposées de l'espace-temps. Or, il est clair qu'une telle hypothèse exige, pour être valable, que l'espace-temps, abstraction faite des déformations opposées, soit tel que le U_{ik} correspondant s'annule identiquement, d'après les équations du champ externe (4). L'espace-temps le plus général qui jouit de cette propriété est une hypersphère de De Sitter, dont nous désignerons la constante cosmologique par λ^0_ω. Nous devons donc écrire pour deux déformations rigoureusement opposées

$$(9) \qquad U_{ik} = -\frac{1}{2}\lambda^0_\omega\,\omega_{ik}, \qquad U = -2\lambda^0_\omega$$

d'où l'on déduit en quantifiant

$$(10) \qquad U_{ik}^{(lm)} = -\frac{1}{2}\lambda^0_\omega\,\omega_{ik}^{(lm)}, \qquad U^{(l)} = -2\lambda^0_\omega.$$

En posant $l=1$ et en comparant ce résultat à (8) on obtient finalement pour des déformations rigoureusement opposées

$$(11) \qquad S_{ik}^{(1m)} = -\frac{1}{2}(\lambda_\omega - \lambda^0_\omega)\,\omega_{ik}^{(1m}.$$

Pour les champs faibles ici considérés, on a la linéarisation suivante

$$(12) \qquad \Box\,\omega_{ik}^{(1m)} = \eta_1^2\,\omega_{ik}^{(1m)}$$

avec

$$(13) \qquad \eta_1^2 = \chi_0(\lambda_\omega - \lambda^0_\omega),$$

χ_0 étant la courbure moyenne de l'hypersphère de De Sitter la plus proche du domaine d'espace-temps envisagé. Cette constante η_1 n'est autre que la constante η_1 de (1), car ce potentiel est une solution particulière du système (8) linéarisé [1]. Posons

$$(14) \qquad P_0(\lambda_\omega - \lambda^0_\omega) = b,$$

P_0 étant le rayon de l'hypersphère de De Sitter dont la courbure moyenne est χ_0. Comme on a $\chi_0 = 1/P_0$, on obtient immédiatement

$$(15) \qquad m^0_{ph.} = \frac{h}{2\pi c}\frac{\sqrt{b}}{P_0}$$

en comparant (13) à (3). Ce résultat exprime une relation entre des propriétés microphysiques et macrophysiques (cosmologiques) fondamentales de l'Univers et montre d'ailleurs qu'il est impossible d'envisager le photon comme une particule à masse propre évanouissante. Cette masse propre est cependant très petite. En effet, nous avons montré ailleurs [3] qu'il faut poser $b \simeq 1$, de sorte que (15) devient

$$(16) \qquad m^0_{ph.} \simeq \frac{h}{2\pi c P_0} \simeq 10^{-65} \text{ gr},$$

pour $P_0 = 10^{27}$ cm. (ordre de grandeur généralement admis en cosmologie relativiste).

Il est curieux de constater l'accord de (16) avec le résultat correspondant de la théorie de la particule de spin maximum 2 («graviton-photon») [5], théorie qui par ailleurs repose sur des hypothèses peu séduisantes.

II

Sur la différence de comportement de la masse dans un champ gravifique et de la charge électrique dans un champ électromagnétique

La matière et l'electricité sont les deux contenus fondamentaux de l'espace-temps. Dans certains phénomènes, leurs propriétés se manifestent avec un parallélisme presque parfait, tandis que dans d'autres phénomènes, non moins importants, leur comportement est essentiellement différent. Nous voulons nous occuper spécialement ici du point suivant: le mouvement d'un corps dans un champ de gravitation est indépendant de sa masse, tandis que le mouvement d'un corps électrisé dans un champ électromagnétique dépend d'une manière essentielle du rapport charge/masse. Cette propriété ayant été considérée à tort jusqu'ici comme un obstacle très sérieux s'opposant à un traitement unitaire de la gravitation et de l'électromagnétisme, nous croyons utile de montrer qu'elle est une simple conséquence du fait que la masse est une quantité essentiellement positive, tandis que la charge électrique est positive ou négative.

Résumons tout d'abord l'explication [4] de ce fait fondamental par notre théorie unitaire. Les propriétés électromagnétiques étant, pour cette théorie, des propriétés de la métrique externe de l'espace-temps, sont naturellement empreintes de la dualité caractéristique de cette métrique, par opposition à l'unicité des propriétés métriques internes qui décrivent les phénomènes gravifiques-matériels proprement dits. Par suite du fait qu'à toute hypersurface V_N d'un espace ambiant on peut attacher deux tenseurs métriques externes $(\omega_{ik})_1$ et $(\omega_{ik})_2$ satisfaisant à $(\omega_{ik})_1 = -(\omega_{ik})_2$ (ambiguité de la direction de la normale en chaque point de V_N), il est possible d'attacher, en accord avec les équations du champ (équations 4 de la Note I précédente), à toute déformation de l'espace-temps des distributions d'électricité ayant la même valeur absolue de la charge et des signes opposés. De même, deux déformations opposées de l'espace-temps (au sens de la Note I) seront occupées par des charges de signes opposés, tandis que la densité d'énergie-impulsion matérielle est essentiellement la même dans les deux déformations. On peut dire que la matière est un contenu «interne» de l'espace-temps, tandis que l'électricité est en quelque sorte un contenu superficiel «inscrit» sur les faces «positive» et «négative» de l'espace-temps, considéré en tant qu'hypersurface d'un espace ambiant pseudo-euclidien E_5. En d'autres termes: l'électricité correspond à quelques propriétés de la *forme* de l'espace-temps, tandis que la matière (masse) est «indifférente» à la forme. La différence de comportement entre la matière et l'électricité doit donc être, en dernière analyse, une manifestation de la différence fondamentale entre la structure métrique interne et la structure métrique externe (forme) de l'espace-temps, en dépit du fait que ces deux structures sont décrites par des tenseurs symétriques du second ordre satisfaisant à des équations du champ ayant la même forme analytique (équations 4 de la Note I et équations analogues pour g_{ik} et T_{ik}).

Rappelons maintenant que selon la théorie des particules fondamentales [6] que l'on peut construire en se basant sur notre théorie unitaire, on doit admettre l'existence d'une seule espèce de particules véritablement élémentaires, qui n'est autre qu'un électron généralisé susceptible de se trouver dans une infinité dénombrable d'états de charge et de masse propre, dont le premier $(n=1)$ est l'électron normal de charge $\pm e$ et de masse propre $(m_0)_e$, tandis que les autres états $(n \geqslant 2)$ sont des états microélectroniques ou des microélectrons dont les charges $\pm e_n$ et les masses propres $(m_0)_n$ satisfont à

$$(1) \qquad e_n = \frac{e}{n^5} \quad ; \quad (m_0)_n = \frac{(m_0)_e}{n^5}$$

(Les rapports $e_n/(m_0)_n$ sont donc constants pour tous les états). Toutes les autres particules fondamentales, y compris le proton et le neutron, doivent être considérées, non comme des particules élémentaires, mais comme des particules résultant de la fusion d'électrons généralisés, c'est-à-dire d'électrons et de microélectrons des deux signes. Les équations densitaires du mouvement des fluides élémentaires qui correspondent à chaque valeur de n s'écrivent [7]:

$$(2) \qquad \frac{d^2 x^i}{ds^2} + \left\{ {i \atop jk} \right\}_g \frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds} = -\frac{1}{\xi_g}(\Theta^{ij}_g)_{;j} \,,$$

pour les fluides élementaires de matière et

$$(3) \qquad \frac{d^2 x^i}{ds^2} + \left\{ {i \atop jk} \right\} \frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds} = -\frac{1}{\xi_\omega}(\Theta^{ij}_\omega)_{,j} \,,$$

pour les fluides élémentaires d'électricité. Dans ces équations, Θ^{ij}_g et Θ^{ij}_ω sont les tenseurs des tensions hydrodynamiques internes des fluides, ξ_g et ξ_ω des scalaires de densité généralisée de masse et charge propres et $\left\{ {i \atop jk} \right\}_\omega$ le symbole de Christoffel formé avec le tenseur métrique externe ω_{ik} comme $\left\{ {i \atop jk} \right\}_g$ est formé avec g_{ik}. On voit donc qu'abstraction faite de l'influence des tensions internes, les trajectoires des particules infinitésimales des fluides élémentaires d'électricité sont les géodésiques de la métrique externe $d\Omega^2 = \omega_{ik}\, dx^i\, dx^k$.

Nous avons montré en détail dans un travail antérieur [7] que l'on peut déduire des équations densitaires du mouvement les équations du mouvement des «centres de gravité» des particules finies de matière et d'électricité, et nous avons écrit ces équations dans le cas général. En particulier, si l'on néglige l'influence du spin de la particule et de la non homogénéité du champ électromagnétique (influence qui n'apparait précisément que lors du passage des équations densitaires à des équations pour les particules finies), ainsi que l'influence de la réaction du rayonnement (réaction du champ métrique externe propre de la particule sur son mouvement), ce qu'il est permis de faire dans le présent travail où il s'agit simplement de chercher l'origine de la différence de comportement de la masse et de la charge dans les champs de force, alors [7] les équations du mouvement d'une particule finie d'électricité s'écrivent:

$$\frac{dV^i}{ds} + \left\{ {i \atop jk} \right\}^0_\omega V^j\, V^k = 0\,, \tag{4}$$

V^i étant le vecteur vitesse du centre de «gravité» de la particule et

$$\left\{ {i \atop jk} \right\}^0_\omega \equiv \frac{\delta^{ih}}{\chi_\omega}[h\,,jk]^0_\omega \equiv \tag{5}$$
$$\equiv \frac{1}{2\chi^0_\omega}\left(\frac{\partial\,\omega^0_{ji}}{\partial x^k} - \frac{\partial\,\omega^0_{jk}}{\partial\,x^i} + \frac{\partial\,\omega^0_{ik}}{\partial\,x^j}\right),$$

ω^0_{ik} étant le tenseur métrique externe (abstraction faite du tenseur métrique externe propre de la particule dont on étudie le mouvement) et χ_ω un scalaire (courbure moyenne de l'hypersphère d'espace-temps telle que les $\bar\omega^{ik} \equiv -\dfrac{g^{ik}}{\chi_\omega} + \omega^{ik}$ soient des petites quantités par rapport à $1/\chi_\omega$).

Les équations (4) sont applicables à tout électron ou microélectron et ne manifestent aucune influence du rapport e/m sur le mouvement, de sorte que le comportement des électrons dans un champ électromagnétique pur est tout-à-fait parallèle à leur comportement dans un champ gravifique pur. Nous allons montrer que la différence essentielle de comportement de la masse et de la charge dans les champs de force n'apparait qu'à partir du moment où l'on considère des particules non élémentaires formées par la fusion d'électrons et de microélectrons. Soit en conséquence un ensemble de ν électrons ou microélectrons de charge $\pm\, e_p$ et de masse propre $(m_0)_p\,(p=1\,,\cdots\nu)$. Les rapports $|e_p|/(m_0)_p$ ont tous la valeur $e/(m_0)_e$ de l'électron normal. Le mouvement de chacune de de ces ν particules d'électricité satisfait aux équations (4), de sorte qu'on peut écrire pour la particule complexe

$$\frac{1}{Q}\sum_1^\nu{}_p \frac{dV^i_p}{ds} e_p + \frac{1}{Q}\sum_1^\nu{}_p \left[\left\{ {i \atop jk} \right\}^0_\omega\right]_p V^j_p\, V^k_p e_p = 0\,, \tag{6}$$

Q étant la charge de la particule donnée par

$$Q = \sum_1^\nu e_p\,.$$

Les équations (6) peuvent s'écrire comme suit

$$\frac{1}{Q}\sum_1^\nu \frac{dV^i_p}{ds}\frac{e_p}{(m_0)_p}(m_0)_p +$$
$$+\frac{1}{Q}\sum_1^\nu{}_p \frac{\delta^{ih}}{(\chi_\omega)_p}([h\,,jk]^0_\omega)_p\, V^j_p\, V^k_p\, e_p = 0\,.$$

Remarquons que les e_p de même que les $(\chi_\omega)_p$ peuvent être positifs ou négatifs, mais les rappports $e_p/(\chi_\omega)_p$ sont toujours positifs, conformément à des résultats antérieurs [4]. On peut donc écrire

$$\frac{1}{Q}\sum_1^\nu{}_p \frac{dV^i_p}{ds}\frac{|e|}{(m_0)_e}(m_0)_p +$$
$$+\frac{1}{Q}\sum_1^\nu{}_p \frac{\delta^{ih}}{|(\chi_\omega)_p|}([h\,,jk]^0_\omega)\, V^j_p\, V^k_p\, e_p = 0\,.$$

L'opération de fusion que nous envisageons ici étant une opération après laquelle toutes les particules prennent la même quantité de mouvement, on voit que l'on peut écrire aussi après fusion des particules

$$\frac{1}{Q}\frac{|e|}{(m_0)_e}\sum_1^\nu{}_p \frac{dV^i_p}{ds}(m_0)_p + \tag{7}$$
$$+\frac{1}{Q}V^j\, V^k\sum_1^\nu{}_p \frac{\delta^{ih}}{|(\chi_\omega)_p|}([h,jk]^0_\omega)_p\, e_p = 0\,.$$

Posons

$$\left\langle F^i_{jk}\right\rangle \equiv \frac{(m_0)_e c^2}{|e|\,Q}\sum_1^\nu{}_p \frac{\delta^{ih}}{|(\chi_\omega)|_p}([h\,,jk]^0_\omega)\, e_p \equiv$$
$$\equiv \frac{1}{Q}\sum_1^\nu{}_p (F^i_{jk})_p\, e_p$$

et définissons par

$$\frac{DV^i}{Ds} = \frac{1}{M_0}\sum_1^\nu{}_p \frac{dV^i_p}{ds}(m_0)_p$$

(M_0 masse propre de la particule) l'accélération du centre de gravité de la particule complexe. Les équations (7) prennent alors la forme

$$(8) \qquad \frac{D V^i}{Ds} + \frac{Q}{M_0 c^2} \left\langle F^i_{jk} \right\rangle V^j V^k = 0 .$$

Nous sommes ainsi arrivés très simplement à des équations du mouvement de la particule électrisée sous l'action du champ électromagnétique (généralisé) $\left\langle F^i_{jk} \right\rangle$ où l'influence du rapport charge/masse propre apparait classiquement. Pour une particule dont la vitesse reste très inférieure à $c\,(V^j << 1 , j = 1 , 2 , 3)$, les équations (8) se simplifient et prennent une forme lorentzienne classique

$$(9) \quad \frac{D V^i}{Ds} + \frac{Q}{M_0 c^2} \varphi^i_j V^j = 0 , \left(\varphi^i_j = (2 - \delta^4_j) \left\langle F^i_{j4} \right\rangle \right).$$

Nous verrons dans la Note III que les φ^i_j se réduisent au champ électromagnétique classique lorsque les ω^0_{ik} satisfont à des conditions très générales. Quoi qu'il en soit, le résultat (7) montre nettement que l'intervention de Q/M_0 dans le mouvement de la particule soumise à un champ électromagnétique provient du fait que la particule n'est pas élémentaire. Inversement, la facilité de la déduction de (8) à partir de (4) peut être considérée comme une preuve que toutes les particuless dont le Q/M_0 n'est pas celui de l'électron résultent de la fusion de particules élémentaires. Nous voyons ainsi que la différence de comportement de la masse et de la charge dans les champs de force n'est au fond qu'apparente, puisqu'elle disparait pour les électrons et les microélectrons dont sont formées toutes les particules.

III

Propriétés générales du champ électromagnétique généralisé

Dans la Note précédente, nous avons rencontré des grandeurs à trois indices F^i_{jk} définies par

$$(1) \qquad F^i_{jk} = \frac{(m_0)_e c^2}{e} \left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\}^0_\omega = \frac{(m_0)_e c^2}{e} \frac{\delta^{ih}}{\chi_\omega} [h, jk]^0_\omega$$

et qui représentent, dans notre théorie, le champ électromagnétique qui agit sur les particules électrisées. Il convient d'étudier les propriétés générales de ce champ électromagnétique généralisé et de mettre en evidence les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il se réduise au champ électromagnétique classique à deux indices.

Disons avant tout que la généralisation à laquelle conduit nécessairement notre théorie est bien naturelle, puisque c'est aussi une grandeur à trois indices

$$G^i_{jk} = \left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\}^0_g = \frac{1}{2} \delta^{ih} \left(\frac{\partial g^0_{jh}}{dx^k} - \frac{\partial g^0_{jk}}{dx^h} + \frac{\partial g^0_{hk}}{dx^j} \right)$$

qui régit le mouvement des particules matérielles sous l'action d'un champ de gravitation et qui représente donc le véritable champ de gravitation selon les équations bien connues

$$\frac{d V^i}{ds} + G^i_{jk} V^j V^k = 0 ,$$

dont la forme est tout à fait analogue à celle des équations (4) de la Note II.

De la loi de transformation des symboles de Christoffel de première espèce pour une transformation de coordonnées $x^i \to \bar{x}^i$, on déduit immédiatement

$$(2) \qquad \bar{F}^i_{jk} = F^a_{bc} \frac{\partial x^a}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^b}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^c}{\partial \bar{x}^k} + \frac{(m_0)_e c^2}{e} \frac{1}{\chi_\omega} \omega^0_{ab} \frac{\partial x^a}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial^2 x^b}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^j} .$$

Le champ F^i_{jk} est donc un tenseur du troisième ordre lorsque la transformation $x^i \to \bar{x}^i$ appartient au groupe des transformations linéaires. Il en est donc ainsi pour toute transformation de Lorentz. De plus, F^i_{jk} se comporte comme un tenseur du second ordre dans toute transformation $x^i \to \bar{x}^i$ linéaire qui laisse invariante l'une des coordonnées. On a alors par exemple

$$\bar{F}^i_{j(k)} = F^a_{b(k)} \frac{\partial x^a}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^b}{\partial \bar{x}^j} .$$

En particulier, dans le cas important des transformations linéaires purement spatiales, on a

$$\bar{F}^i_{j(4)} = F^a_{b(4)} \frac{\partial x^a}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^b}{\partial \bar{x}^j} .$$

De la définition de F^i_{jk} on déduit

$$F^i_{jk} - F^i_{kj} = 0 ,$$

et

$$F^i_{jk} + F^j_{ik} = \frac{(m_0)_e c^2}{e} \frac{1}{\chi_\omega} \frac{\partial \omega^0_{ij}}{\partial x^k} .$$

En particulier, pour $k = 4$ (valeur temporelle de l'indice) on a

$$F^i_{j4} + F^j_{i4} = \frac{(m_0)_e c^2}{e} \frac{1}{\chi_\omega} \frac{\partial \omega^0_{ij}}{\partial x^4}$$

de sorte que F^i_{j4} se comporte comme un tenseur antisymétrique du second ordre pour des transformations linéaires purement spatiales des coordonnées lorsque la métrique externe est statique. La définition (1) donne enfin pour $k=4$:

$$F^i_{j(4)} = \frac{\partial A^i}{\partial x^j} - \frac{\partial A^j}{\partial x^i} + \frac{(m_0)_e c^2}{e} \frac{1}{\chi_\omega} \frac{\partial \omega^0_{ij}}{\partial x^4}$$

avec

$$A^i = \frac{(m_0)_e c^2}{e} \frac{1}{\chi_\omega} \frac{\omega^0_{4i}}{2} .$$

Si la métrique est statique le champ F^i_{j4} dérive donc du potentiel A^i. Remarquons ici que dans toutes les relations précédentes nous avons écrit F^i_{jk} au lieu de F_{ijk} bien que les premiers termes du second membre de (2) représentent une loi triplement covariante. Mais on doit écrire, par suite de (1), $F^i_{jk} = \delta^{ih} F_{hjk} = F_{ijk}$.

La transformation (2), pour un changement $\bar{x}^i \to x^i$ linéaire, peut s'écrire comme suit:

$$(3) \qquad \bar{F}^i_{j(4)} = \left(F^a_{b(4)} \frac{\partial x^a}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^b}{\partial \bar{x}^j} \right) \frac{\partial x^4}{\partial \bar{x}^4} + \left(F^a_{bl} \frac{\partial x^a}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^b}{\partial \bar{x}^j} \right) \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^4} ,$$

avec $l=1,2,3$. Considérons alors une transformation de Lorentz

$$\begin{cases} x^l = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(\bar{x}^l \sqrt{1-\beta^2 + (v^l/c)^2} - v^l \bar{x}^4/ic \right) , \\ x^4 = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(\bar{x}^4 - i v_l x^l/c \right), \end{cases}$$

qui donne à (3) la forme suivante:

$$F^i_{j(4)} = \left(F^a_{b(4)} \frac{\partial x^a}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^b}{\partial \bar{x}^j} \right) \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - \left(F^a_{bl} \frac{\partial x^a}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^b}{\partial \bar{x}^j} \right) \frac{v^l/ic}{\sqrt{1-\beta^2}} .$$

Pour des petites vitesses par raport à c les termes en F^a_{bl} sont des petites quantités par rapport aux termes en $F^a_{b(4)}$, de sorte que $F^i_{j(4)}$ se comporte alors aproximativement comme un tenseur du second ordre (antisymétrique si la métrique externe est statique). Il en est de même des φ^i_j de l'équation (9) de la Note II précédente. En résumé, le champ électromagnétique, d'après notre théorie, ne peut être décrit par un tenseur antisymétrique du second ordre (comme le tenseur de Maxwell-Minkowski classique) que dans les conditions que nous venons de mettre en évidence. Dans le cas général, il faut utiliser F^i_{jk} pour décrire le véritable champ électromagnétique.

Il est intéressant de comparer, dans un cas simple, la loi du mouvement relativiste classique avec la loi déduite de F^i_{jk}. Considérons une particule électrisée partant du repos et se déplaçant suivant l'axe des x^1 sous l'action d'un champ électrostatique homogène pur. Abstraction faite de la réaction du rayonnement, l'équation relativiste classique du mouvement s'écrit

$$(4) \qquad \frac{dV^1}{ds} + \frac{Q}{M_0 c^2} \varphi^1_4 \frac{dx^4}{ds} = 0 .$$

Mais on a ici

$$(5) \qquad \left(\frac{dx^4}{ds} \right)^2 + (V^1)^2 = 1 , \qquad (V^1 \equiv dx^1/ds)$$

de sorte que

$$\frac{dV^1}{ds} + \frac{Q}{M_0 c^2} \varphi^1_4 \sqrt{1-(V^1)^2} = 0 ,$$

d'où en intégrant (avec $s \equiv ict$):

$$(6) \qquad x^1 = x^1_0 + \frac{M_0 c^2}{Q \varphi^1_4} \left[\cosh \left(\frac{Q}{M_0 c} \varphi^1_4 t \right) - 1 \right] ,$$

ou bien:

$$(7) \qquad x^1 = x^1_0 + \frac{Q}{M_0} \varphi^1_4 \frac{t^2}{2!} + \frac{1}{c^2} \left(\frac{Q}{M_0} \varphi^1_4 \right)^3 \frac{t^4}{4!} + \frac{1}{c^4} \left(\frac{Q}{M_0} \varphi^1_4 \right)^5 \frac{t^6}{6!} + \cdots$$

(les termes d'ordre > 2 sont la correction relativiste au mouvement newtonien).

L'équation du mouvement, étudié selon notre théorie, s'écrit

$$(8) \qquad \frac{dV^1}{ds} + \frac{Q}{M_0 c^2} F^1_{44} \left(\frac{dx^4}{ds} \right)^2 = 0 ,$$

ou bien, par suite de (5):

$$\frac{dV^1}{ds} + \frac{Q}{M_0 c^2} F^1_{44} [1 - (V^1)^2] = 0 .$$

En intégrant on obtient

$$(9) \qquad x^1 = x^1_0 - \frac{M_0 c^2}{Q F^1_{44}} \log \cos \left(\frac{Q}{M_0 c} F^1_{44} t \right)$$

ou encore (pour $| Q F^1_{44} t/M_0 c | < \pi/2$):

$$(10) \qquad x^1 = x^1_0 + \frac{Q}{M_0} F^1_{44} \frac{t^2}{2} + \frac{1}{c^2} \left(\frac{Q}{M_0} F^1_{44} \right)^3 \frac{t^4}{3 \cdot 4} + \frac{1}{c^4} \left(\frac{Q}{M_0} F^1_{44} \right)^5 \frac{2}{6 \cdot 15} t^6 + \cdots$$

On voit que la correction relativiste n'a pas la même valeur dans notre théorie et dans la théorie classique et que l'écart des deux corrections peut devenir sensible pour de grandes valeurs de t, c'est-à-dire après un long parcours de la particule, on bien pour des champs électrostatiques intenses.

Si l'on désigne en effet par $(x^1)_{\text{class.}}$ sa position suivant la théorie classique, les résultats précédents donnent

$$x^1 - (x^1)_{\text{class.}} = \frac{1}{c^2}\left(\frac{Q}{M_0}\varphi_4^1\right)^3 \frac{1}{4\,!}t^4 + \\ + \frac{1}{c^4}\left(\frac{Q}{M_0}\varphi_4^1\right)^5 \frac{15}{6\,!}t^6 + \cdots$$

puisqu'on a ici $F_{44}^1 \neq \varphi_4^1$. Dans une vérification expérimentale de ces résultats il est probablement plus facile de comparer les vitesses au lieu des espaces parcourus par la particule. On on alors:

$$(11)\qquad \frac{dx^1}{dt} - \left(\frac{dx^1}{dt}\right)_{\text{class.}} = \frac{1}{c^2}\left(\frac{Q}{M_0}\varphi_4^1\right)^3 \frac{1}{3\,!}t^3 + \\ + \frac{1}{c^4}\left(\frac{Q}{M_0}\varphi_4^1\right)^5 \frac{15}{5\,!}t^5 + \cdots .$$

On voit que pour des champs très intenses l'effet étudié ici peut devenir sensible même après un parcours relativement petit de la particule. La formule (11) montre que la vitesse de la particule est constamment supérieure, d'après notre théorie, à la vitesse déterminée par l'équation relativiste classique du mouvement.

Il est à peine nécessaire d'insister sur l'importance de la vérification expérimentable de l'effet exprimé par la formule (11), car une telle vérification équivaudrait à vérifier expérimentalement que la notion classique de champ électromagnétique (tenseur antisymétrique du second ordre) doit être généralisée par une grandeur à trois indices F_{jk}^i, ce qui est l'une des principales conséquences de notre théorie unitaire [1].

IV

Sur l'équation de Schwinger-Tomonaga

Considérons, dans l'espace-temps, une famille d'hypersurfaces 3-dimensionnelles σ du genre espace, dépendant d'une paramètre temporel τ. Prenons, sur l'une quelconque des σ, un réseau orthogonal $x^j\ (j=1,2,3)$ et désignons par ρ^j les coordonnées géodésiques locales orthogonales correspondantes en un point $P(x)$ de σ. L'axe temporel local ρ^4 est normal à σ et l'on a sur σ: $d\rho^4 = f(x)\,d\tau$.

Suposons qu'il existe un hamiltonien $H(x)$ tel que la fonction d'état $\Psi(x)$ du système étudié satisfasse en chaque point de σ à l'équation d'évolution

$$(1)\qquad \frac{\partial\Psi}{\partial\rho^4} = H(\Psi)$$

qu'on peut écrire

$$(2)\qquad \frac{\partial\Psi}{\partial\tau} = [f(x)\,H(x)]\,(\Psi)\,.$$

Définissons par

$$(3)\qquad \left[\int f(x)\,\mathfrak{H}(x)\,d\sigma\right]\int\Psi\,d\sigma = \int f(x)\,H(x)\,\Psi\,d\sigma$$

un opérateur hamiltonien $\mathfrak{H}(x)$ et posons

$$(4)\qquad \Psi[\sigma] = \frac{1}{\sigma}\int\Psi\,d\sigma\,.$$

On déduit alors de (2):

$$(5)\qquad \frac{\partial\Psi[\sigma]}{\partial\tau} = \left[\int d\sigma\,f(x)\,\mathfrak{H}(x)\right]\Psi[\sigma]\,.$$

Si l'opérateur $\mathfrak{H}(x)$ ne dépend pas de τ, la solution générale de cette équation s'écrit formellement:

$$(6)\qquad \Psi[\sigma] = \left[e^{\int d\sigma f(x)\,\tau\,\mathfrak{H}(x)}\right]\Psi_0[\sigma]$$

$\Psi_0[\sigma]$ décrivant l'état «initial» du système et l'opérateur exponentiel étant naturellement défini par le développement

$$e^{\int d\sigma f(x)\,\tau\,\mathfrak{H}(x)} = 1 + \tau\int d\sigma\,f(x)\,\mathfrak{H}(x) + \\ + \frac{\tau^2}{2\,!}\int d\sigma\,f(x)\,\mathfrak{H}(x)\int d\sigma'\,f(x')\,\mathfrak{H}(x') + \cdots$$

Soit V le volume d'espace-temps compris entre deux hypersurfaces σ' et σ de la famille et posons

$$(8)\qquad \frac{\delta\Psi[\sigma]}{\delta\sigma(x)} = \lim_{V\to 0}\frac{\Psi[\sigma'] - \Psi[\sigma]}{V}$$

la notation $\delta/\delta\sigma(x)$ servant à rappeler que l'opération $V\to 0$ a lieu dans le voisinage du point x de σ. En remarquant que $dV = f\tau\,d\sigma$, on voit que (6) est aussi la solution générale de l'équation fonctionnelle

$$(9)\qquad \frac{\delta\Psi[\sigma]}{\delta\sigma(x)} = \mathfrak{H}\,\Psi[\sigma]\,,$$

formellement identique à l'équation de Schwinger-Tomonaga [8,9]. La déduction précédente montre nettement l'origine de cette équation et de la fonctionnelle d'état $\Psi[\sigma]$. L'équation (9) peut être soumise à une opération de superquantification qui confère à $\Psi[\sigma]$ le caractère d'un opérateur fonctionnel.

Les recherches d'électrodynamique quantique basées sur l'équation (9) utilisent toujours des développements en série analogues à (7), ce qui donne lieu

---

(1) A priori d'ailleurs la loi relativiste classique (4) du mouvement ne peut être exacte. En effet, contrairement à ce qui arrive avec (9), conséquence de la loi généralisée (8), l'expression (6) n'implique pas, par elle-même, l'existence d'une borne supérieure pour les valeurs de s, du fait que la vitesse de la particule est nécessairement $< c$.

à des calculs impraticables dès que l'on veut pousser les approximations au delà du premier ou du deuxième ordre. Il nous semble donc très utile de mettre la solution (6) sous forme finie. Pour cela, considérons d'abord la solution générale de l'équation (2) qui s'écrit formellement:

$$\Psi = \left[e^{f(x)\,\tau\,H(x)} \right] (\Psi_0) \,. \tag{10}$$

Désignons par φ_0 une solution particulière de (2) telle que $\Psi_0+\varphi_0$ admette un logarithme. Posons $H = H_1 + H_2$, où l'opérateur H_1 est la partie de l'hamiltonien qui dépend explicitement des symboles $\partial/\partial\rho^i$. Pour toute fonction F dérivable nous écrirons:

$$\left[e^{\tau H_1}\right](F) = \mathfrak{T}(F) \,.$$

La solution (10) prend alors la forme

$$\Phi \equiv \Psi + \varphi_0 = \left[e^{\tau H_2} \left(e^{\mathfrak{T}\left(\frac{1}{f} \log \Phi_0\right)} \right) \right]^f \tag{11}$$

Supposons que l'on a

$$H_1 = k\,\gamma^j \frac{\partial}{\partial \rho^j} \,, \qquad H_2 = \sum_1^n a_p(x)\,\varepsilon^p \,, \tag{12}$$

k étant une constante et les γ^j et ε^p des matrices satisfaisant à $(\gamma^j)^2 = (\varepsilon^p)^2 = 1$. Dans ce cas on aura

$$e^{\tau H_2} = \prod_{p\,1}^{n} \left[\cosh\,(\tau\, a_p) + \sinh\,(\tau\, a_p)\,\varepsilon^p \right]$$

et

$$e^{\tau H_1} = \prod_{j\,1}^{3} \left[\cosh\left(\tau k \frac{\partial}{\partial \rho j}\right) + \gamma^j \sinh\left(\tau k \frac{\partial}{\partial \rho j}\right) \right]$$

Mais on a:

$$\left[\cosh\left(\tau k \frac{\partial}{\partial \rho j} \right) \right] F\,(x\,,\tau) =$$

$$= \frac{1}{2} \left[F\,(x^j + \xi\,,\tau) + F\,(x^j - \xi\,,\tau) \right] ,$$

$$\left[\sinh\left(\tau k \frac{\partial}{\partial \partial j} \right) \right] F\,(x\,,\tau) =$$

$$= \frac{1}{2} \left[F\,(x^j + \xi\,,\tau) - F\,(x^j - \xi\,,\tau) \right] ,$$

avec

$$\frac{1}{k} \int_{x^j}^{x^j+\xi} d\rho' = \tau \,, \qquad [x^j \text{ coordonnées géodésiques de pôle } P\,(x)] \,,$$

et nous poserons pour simplifier l'écriture

$$\left[e^{\tau H_1}\right](F) = \mathfrak{T}(F) = \{F\} \,.$$

Par suite des résultats précédents, on voit que (11) prend la forme:

$$\Phi = \left[\prod_{p\,1}^{n} \left[\cosh\,(\tau\, a_p) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \sinh\,(\tau\, a_p)\,\varepsilon_p \right] \left(e^{\left\{ \frac{1}{f} \log \Phi_0 \right\}} \right) \right]^f . \tag{13}$$

Telle est la solution de l'équation (2) sous forme finie quand l'hamiltonien a la forme (12), ce qui est en particulier le cas de l'hamiltonien de Dirac pour lequel on a

$$H_1 = \frac{1}{\sqrt{-1}}\,\gamma^i \frac{\partial}{\partial \rho j} \,; \tag{14}$$

$$H_2 = -\,\frac{2\pi}{h} \left(\frac{\varepsilon}{c} A_j\,\gamma^j - m \cdot c\,\alpha_4 \right) ,$$

les γ^j et α_4 étant des matrices bien connues.

De la solution (13) on déduit immédiatement par (4) la solution de l'équation de Schwinger-Tomonaga correspondante. Il est permis d'espérer que cette solution sans développements en série pourra simplifier beaucoup les calculs de l'éleetrodynamique quantique.

V

Champs magnétiques stellaires à variation périodique

En appliquant les équations de Codazzi à un domaine quasi-statique de l'espace-temps on trouve [10] la relation suivante entre les composantes spatio-temporelles des tenseurs métriques externe ω_{ik} et interne g_{ik} d'un tel domaine

$$\frac{\partial\,\omega_{4l}}{\partial\,x^j} - \frac{\partial\,\omega_{4j}}{\partial\,x^l} = (A^j_j + A^l_l) \left(\frac{\partial\,g_{4l}}{\partial\,x^j} - \frac{\partial\,g_{4j}}{\partial\,x^l} \right) , \tag{1}$$
$$(j\,,\,l = 1\,,2\,,3) \,,$$

avec

$$2\,A^{il}_k = \chi\,\delta^i_k + g^{li}\,\tilde{\omega}_{lk} \tag{2}$$

χ étant la courbure moyenne de l'espace-temps et $\tilde{\omega}_{ik}$ un tenseur dont les composantes sont des petites quantités par rapport à $\chi\,g_{ik}$ au moins pour $i \neq k$. Or, nous savons [7, 10] (voir l'équation 1 de la Note III) que le champ magnétique H_i est donné par

$$H_i = \frac{1}{\chi_\omega \sqrt{-1}} \frac{(m_0)_e\,c^2}{e} \left(\frac{\partial\,\omega_{4l}}{\partial\,x^j} - \frac{\partial\,\omega_{4j}}{\partial\,x^l} - \frac{\partial\,\omega_{jl}}{\partial\,x^4} \right) \tag{3}$$

On a donc pour un domaine quasi-statique de l'espace-temps

$$H_i = \frac{1}{\chi_\omega \sqrt{-1}} \frac{(m_0)_e\,c^2}{e} \,(A^j_j + A^l_l) \left(\frac{\partial\,g_{4l}}{\partial\,x^j} - \frac{\partial\,g_{4j}}{\partial\,x^l} \right), \tag{4}$$

i, j, l étant une permutation circulaire de $1, 2, 3$.

Considérons une sphère en rotation constante. Il est facile de déduire [10] des équations du champ métrique interne g_{ik} la solution extérieure suivante

$$g_{4i}(P) = \frac{2K}{c^3\sqrt{-1}}\,\gamma\,\frac{M_{\text{rot.}}}{r^3}\,(u_j\,x_l - u_l\,x_j)\,, \tag{5}$$

$M_{\text{rot.}}$ étant le moment de rotation de la sphère, K la constante newtonienne de la gravitation, r la distance du point extérieur P au centre de la sphère, u_j les composantes du vecteur unitaire de l'axe de rotation, x_j des coordonnées orthogonales sphérocentriques et γ un coefficient numérique $\leqslant 1$ ($\gamma = 1$ pour une sphère dont la densité et la vitesse de rotation sont constantes ou possèdent la symétrie sphérique). En comparant (5) à (4) on déduit immédiatement

$$\vec{H} = \frac{2\xi}{\chi_\omega}\,\frac{(m_0)_e}{e\,c}\,K\gamma\,M_{\text{rot.}}\,\text{rot}\left[\vec{u}\times\nabla\left(\frac{1}{r}\right)\right], \tag{6}$$

où nous avons posé $\xi = A_j^j + A_l^l$ (cette quantité ξ est un scalaire pour des transformations purement spatiales des coordonnées et d'autre part $A_j^j + A_l^l$ a la même valeur pour toute valeur de j et $l = 1, 2, 3$). L'électromagnétisme classique nous apprend que (6) est le champ magnétique extérieur d'une sphère uniformément aimantée dont le moment magnétique $M_{\text{magn.}}$ est donné par

$$M_{\text{magn.}} = \frac{2\xi}{\chi_\omega}\,\frac{(m_0)_e}{e\,c}\,K\gamma\,M_{\text{rot.}}\,. \tag{7}$$

Nous avons appliqué précédemment [10, 11] cette formule pour expliquer le champ magnétique général de la Terre, du Soleil et de certaines étoiles magnétiques (78 Virginis par exemple) étudiées par H. W. Babcock au Mount Wilson [12]. Les champs magnétiques stellaires à variation périodique découverts par Babcock [13] peuvent d'ailleurs être expliqués aussi par (7), car le coefficient ξ a en général une variation périodique [14]. Enfin, nous avons montré [15] qu'en ne négligeant pas les composantes non diagonales du tenseur A_k^i défini par (2), les équations de Codazzi donnent une relation plus générale que (6) et expliquent facilement l'inclinaison de l'axe magnétique par rapport à l'axe de rotation.

Dans le présent travail nous voulons généraliser quelques uns de ces résultats en montrant que la forme du coefficient ξ à laquelle conduit la théorie rend compte très aisément de la courbe du champ magnétique polaire H_p de l'étoile B. D.-18° 3789 (constellation de la Vierge), récemment publiée par Babcock [16]. Pour déterminer le coefficient ξ on peut utiliser, comme nous l'avons fait dans un travail antérieur [14], les équations de propagation du second ordre des fonctions d'onde fondamentales Ψ_{mn} et Φ_{mn} de notre théorie unitaire

$$\square\,\Psi_{mn}\,\alpha_n\,\Psi_{mn}\;;\qquad \square_\omega\,\Phi_{mn} = \beta_n\,\Phi_{mn} \tag{8}$$

[$m = 1, 2, 3, 4$; $n = 1, 2, \cdots, \infty$; $\square$ laplacien (dalembertien pour une métrique interne hyperbolique normale) attaché à la métrique g_{ik}; $\square_\omega$ dalembertien attaché à la métrique externe ω_{ik} et formé avec les ω_{ik} comme $\square$ est formé avec les g_{ik}. Pour un domaine quasi-statique les équations (8) peuvent se mettre sous la forme

$$\square\,\Phi_{mn} = \chi_\omega\left(\beta_n - \bar{\omega}_{44}\,\frac{\partial^2}{\partial(x^4)^2}\right)\Phi_{mn}\;; \tag{9}$$

$$\triangle_3\,\Psi_{mn} = \alpha_n\,\Psi_{mn}\,.$$

En cherchant [14] pour $n = 1$ [niveau principal (électronique) des tenseurs de densité d'énergie-impulsion] une solution de la forme

$$\Phi_{m1} = \lambda(x^4)\,\Psi_{m1}(x^1, x^2, x^3) + \varphi_{m1}(x^1, x^2, x^3), \tag{10}$$

généralisation minima de la relation $\Phi_{m1} = \lambda\,\Psi_{m1}$ pour le cas statique, on trouve ($x^4 \equiv i\,c\,t$):

$$\frac{d^2\lambda}{dt^2} + \sigma^2\lambda = \frac{a\,c^2}{1+\chi_\omega\,\bar{\omega}^{44}}\;; \tag{11}$$

$$\triangle_3\,\varphi_{m1} - \chi_\omega\,\beta_1\,\varphi_{m1} = a\,\Psi_{m1}\,,$$

a étant une constante arbitraire et

$$\sigma^2 = \frac{c^2\,(\chi_\omega\,\beta_1 - \alpha_1)}{1+\chi_\omega\,\bar{\omega}^{44}}\,. \tag{12}$$

On obtient donc

$$\lambda(t) = \lambda_0 - \Lambda\sin(\sigma\,t)\,, \tag{13}$$

en choisissant convenablement l'origine des temps et en posant

$$\lambda_0 = \frac{a}{\chi_\omega\,\beta_1 - \alpha_1}\,. \tag{14}$$

Considérons maintenant les tenseurs de densité d'énergie-impulsion $T_{ik}(\Psi_{mn})$ et $U_{ik}(\Phi_{mn})$ exprimés par les fonctions d'onde fondamentales et leurs dérivées [v. par ex. 7]. Les composantes spatio-temporelles (T_{4j}, U_{4j}, $j = 1, 2, 3$) de ces tenseurs sont les suivantes (on néglige ici les petites contributions des niveaux $n \geqslant 2$ et on tient compte de la condition $\partial\,\Psi_{m1}/\partial x^4 = 0$ dans le cas actuel):

$$U_{4j} = \frac{1}{2}\sqrt{\chi_\omega}\left\{\left(\Phi_{m1}\,\varepsilon_{q1}^4\,\frac{\partial}{\partial q_j}\,\Phi_1^m - \frac{\partial\Phi_{m1}}{\partial q_j}\,\varepsilon_{q1}^4\,\Phi_1^m\right) + \right.$$
$$\left. + \left(\Phi_{m1}\,\varepsilon_{q1}^j\,\frac{\partial}{\partial q_4}\,\Phi_1^m - \frac{\partial\Phi_{m1}}{\partial q_4}\,\varepsilon_{q1}^j\,\Phi_1^m\right)\right\}, \tag{15}$$

$$(16) \qquad T_{4j} = \frac{1}{2}\chi_\omega \left\{ \Psi_{m1}\, \varepsilon_1^4 \frac{\partial}{\partial \rho_j} \Psi_1^m - \frac{\partial \Psi_{m1}}{\partial \rho_j} \varepsilon_1^4\, \Psi_1^m \right\},$$

où nous avons désigné par q^j les coordonnées géodésiques locales orthogonales attachées à la métrique externe et définies en chaque point par $d\Omega^2 = \omega_{ik}\, dx^i\, dx^k = \sum_1^4 (dq^i)^2$ (pour ce qui est de la signification des matrices ε_1^i et ε_{q1}^i voir par exemple [7]). Posons

$$(17) \qquad \begin{aligned} \mu_{4j} &= \frac{1}{2}\left(\varphi_{m1}\, \varepsilon_{q1}^j\, \Psi_1^m - \Psi_{m1}\, \varepsilon_{q1}^j\, \varphi_1^m\right), \\ w_{4j} &= \frac{1}{2}\left\{\left(\varphi_{m1}\, \varepsilon_{q1}^4 \frac{\partial \Psi_1^m}{\partial q_j} - \frac{\partial \Psi_{m1}}{\partial q_j}\, \varepsilon_{q1}^4\, \varphi_1^m\right) + \right. \\ &\qquad \left. + \left(\Psi_{m1}\, \varepsilon_{q1}^4 \frac{\partial \varphi_1^m}{\partial q_j} - \frac{\partial \varphi_{m1}}{\partial q_j}\, \varepsilon_{q1}^4\, \Psi_1^m\right)\right\} \\ \tau_{4j} &= \frac{1}{2}\left(\varphi_{m1}\, \varepsilon_{q1}^4 \frac{\partial \varphi_1^m}{\partial q_j} - \frac{\partial \varphi_{m1}}{\partial q_i}\, \varepsilon_{q1}^4\, \varphi_1^m\right). \end{aligned}$$

On obtient alors

$$(18) \qquad \begin{aligned} U_{4j} = \Bigg\{ &\left[\lambda_0^2 \sqrt{\frac{\chi}{\chi_\omega}} + \frac{1}{T_{4j}}\left(\lambda_0\, w_{4j} + \tau_{4j}\right)\chi\sqrt{\chi_\omega}\,\right] - \\ &- \frac{\sigma\,\Lambda\sqrt{\chi\,\chi_\omega}}{i\,c}\,\frac{\mu_{4j}}{T_{4j}}\cos(\sigma t) + \left(\Lambda^2\sqrt{\frac{\chi}{\chi_\omega}}\right)\sin^2(\sigma t) - \\ &- \Lambda\left(2\lambda_0\sqrt{\frac{\chi}{\chi_\omega}} + \frac{w_{4j}}{T_{4j}}\,\chi\sqrt{\chi_\omega}\right)\sin(\sigma t)\Bigg\}\, T_{4j}\,. \end{aligned}$$

Des équations du champ métrique externe (équations 4 de la Note I) on déduit la solution suivante dans un domaine quasi-statique

$$(19) \qquad \omega_{4i}(P) = -\frac{\chi_\omega}{2\pi}\int \frac{U_{4i}(Q)}{r}\, d\,v_Q\,, \quad (i=1,2,3)\,,$$

en négligeant naturellement le terme cosmologique en λ_ω. En appliquant cette solution à une sphère en rotation et en utilisant (1) et (5) on voit que l'on peut écrire dans ce cas

$$(20) \qquad \omega_{4i}(P) = 2\chi_\omega \frac{e\,c}{(m_0)_e}\,\frac{M_{\text{magn.}}}{r^3}\,(u_j\, x_i - u_i\, x_j)$$

d'où l'on déduit en tenant compte de (6)

$$(21) \qquad \omega_{4i} = \xi\, g_{4i} \qquad (i=1,2,3)\,.$$

Comparons la solution (19) à la solution extérieure

$$(22) \qquad g_{4i}(P) = -\frac{1}{2\pi}\int \frac{T_{4i}(Q)}{r}\, d\,v_Q\,, \ (i=1,2,3)$$

pour le champ métrique interne quasi-statique qui prend la forme (5) pour une sphère en rotation. Par suite de la condition (21) on doit avoir nécessairement pour une sphère en rotation

$$(23) \qquad U_{4i} = \frac{\xi}{\chi_\omega}\, T_{4i}\,, \qquad (i=1,2,3)$$

Le coefffcient de T_{4j} dans l'expression (18) doit donc être égalé au scalaire ξ/χ_ω dans le cas d'une sphère en rotation constante. Posons donc :

$$(24) \qquad \begin{aligned} b_1 &= \lambda_0^2\sqrt{\chi\,\chi_\omega} + \frac{1}{T_{4j}}\left(\lambda_0\, w_{4j} + \tau_{4j}\right)\chi\,\chi_\omega\sqrt{\chi_\omega} \\ b_2 &= -\frac{\sigma\,\Lambda}{i\,c}\,\chi_\omega\sqrt{\chi\,\chi_\omega}\,\frac{\mu_{4j}}{T_{4j}}\,, \\ b_3 &= \Lambda^2\sqrt{\chi\,\chi_\omega}\,, \\ b_4 &= -\Lambda\left(2\lambda_0\sqrt{\chi\,\chi_\omega} + \frac{w_{4j}}{T_{4j}}\,\chi\,\chi_\omega\sqrt{\chi_\omega}\right). \end{aligned}$$

L'expression de ξ devient alors :

$$(25) \qquad \xi = b_1 + b_2\cos(\sigma t) + b_3\sin^2(\sigma t) + b_4\sin(\sigma t)\,.$$

De la relation (6) on déduit immédiatement le champ polaire à la surface d'une étoile de rayon r_0 :

$$H_p = B\,\xi\,,$$

avec

$$(26) \qquad B = \frac{4}{\chi_\omega}\,\frac{(m_0)_e}{e\,c}\,K\,\gamma\,\frac{M_{\text{rot.}}}{r_0^3}\,.$$

En tenant compte du résultat (25), on obtient donc finalement :

$$(27) \qquad \begin{aligned} H_p = B\,b_1 + B\,b_2\cos(\sigma t) + B\,b_3\sin^2(\sigma t) + \\ + B\,b_4\sin(\sigma t)\,. \end{aligned}$$

Pour l'étoile B. D. - 18° 3789, qui se prête particulièrement bien aux mesures de l'effet Zeeman par suite de l'orientation de son axe magnétique suivant la ligne de vision, Babcock a montré [16] que la courbe d'équation

$$(28) \qquad \begin{aligned} H_p\,(\text{gauss}) = 2000 + 6600\cos(\sigma t) - \\ - 1600\cos(2\sigma t) \end{aligned}$$

représente très bien les observations avec

$$(29) \qquad \frac{\sigma}{2\pi} = 1{,}25 \text{ microcycles/sec.}$$

La période magnétique P_m (égale à la période de la variation d'intensité des raies métalliques) a la valeur :

$$P_m = \frac{2\pi}{\sigma} = 9{,}295 \text{ jours}\,.$$

L'équation (28) de la courbe des observations peut se mettre sous la forme

$$(30) \qquad H_p\,(\text{gauss}) = 400 + 6600\cos(\sigma t) + \\ + 3200\sin^2(\sigma t)$$

puisque $2\sin^2(\sigma t) = 1 - \cos(2\sigma t)$. Remarquons que les coefficients Bb_1, Bb_2, Bb_3 et Bb_4 de (27) ainsi que σ font intervenir, d'après (12, 26,24), les constantes arbitraires λ_0, Λ, χ, $\bar{\omega}^{44}$ et γ que l'on peut déterminer maintenant, pour l'étoile en question, en posant

$$Bb_1 = 400 \text{ gauss}; \qquad Bb_2 = 6600 \text{ gauss}$$

$$Bb_3 = 3200 \text{ gauss}; \qquad b_4 = 0;$$

$$\frac{\sigma}{2\pi} = 1{,}25 \text{ microcycl./sec.}$$

Ces valeurs rendent identiques la courbe théorique (27) et la courbe des observations (30). Remarquons que $b_4 = 0$ implique, d'après (24), pour l'étoile B. D.-18° 3789:

$$w_{4j} = -\frac{\lambda_0^2}{\chi_\omega \sqrt{\chi}}\, T_{4j}$$

d'où l'on déduit aussi

$$\tau_{4j} > \frac{2\lambda_0^2}{\chi_\omega \sqrt{\chi}}\, T_{4j}$$

puisque $b_1 > 0$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Gião A. — *J. Phys. Rad.*, 1951, **12**, 99-106; *C. R. Acad. Sc.*, 1950, **230**, 278, 434, 1740, 1838.

[2] Broglie L. de. — *C. R. Acad. Sc.*, 1949, **229**, 157, 269, 401; *Portugaliae Math.*, 1949, **8**, 37-48.

[3] Gião A. — *Portugaliae Phys.*, 1946, **2**, 1-98; *Portugaliae Math.*, 1946, **5**, 145-192.

[4] Gião A. — *Portugaliae Math.*, 1949, **8**, 143-153.

[5] Broglie L. de. — *Théorie générale des particules à spin*, (Gauthier-Villars, Paris, 1943), p. 191.

[6] Gião A. — *Portugaliae Math.*, 1947, **6**, 67-114; *Ibid.*, 1948, **7**, 1-44.

[7] Gião A. — *J. Phys. Rad.*, 1951, **12**, 31-40.

[8] Schwinger J. — *Phys. Rev.*, 1948, **73**, 416; *Ibid.*, 1948, **74**, 1439-1461.

[9] Dyson F. J. — *Phys. Rev.*, 1949, **75**, 486-502.

[10] Gião A. — *Phys. Rev.*, 1949, **76**, 764-768; *J. Phys. Rad.*, 1949, **10**, 240-249; *C. R. Acad. Sc.*, 1947, **224**, 1813; 1947, **225**, 924; 1948, **226**, 645, 1298; 1949, **228**, 742.

[11] Gião A. — *Gazeta de Mat.*, 1947, **34**, 9-12; *Ibid.*, 1948, **35**, 10-12.

[12] Babcock H. W. — *Astrophys. J.*, 1947, **105**, 105-119; *Pub. Astro. Soc. Pac.*, 1947, **59**, 112-124.

[13] Babcock H. W. — *Pub. Astro. Soc. Pac.*, 1947, **59**, 260-261; *Phys. Rev.*, 1948, **74**, 489.

[14] Gião A. — *C. R. Acad. Sc.*, 1948, **226**, 2126.

[15] Gião A. — *C. R. Acad. Sc.*, 1949, **228**, 1203.

[16] Babcock H. W. — *Nature*, 1950, **166**, 249-251.