Algumas Aplicações da Teoria Analítica dos Polinómios (*)

por **José Gaspar Teixeira**
Instituto Industrial de Lisboa

A teoria analítica dos polinómios — estudo dos polinómios como funções analíticas — pode considerar-se, sob certos aspectos elementares, como o prolongamento natural da discussão da natureza dos zeros dos mesmos polinómios, iniciada já nos cursos de matemáticas elementares.

No presente trabalho abordaremos alguns problemas relacionados com resultados obtidos por nós em 1944 e apresentados ao Congresso Luso-Espanhol do mesmo ano.

Problema. Consideremos um polinómio, $P_2(x)$, do 2.º grau em x, de coeficientes reais dependentes de dois parâmetros — funções lineares (1) desses parâmetros, por exemplo

$$P_2(x) = \varphi_0(\xi, \eta)\, x^2 + 2\varphi_1(\xi, \eta)\, x + \varphi_2(\xi, \eta)$$

em que

$$\varphi_i = a_i \xi + b_i \eta + c_i \quad (i = 0, 1, 2).$$

Para a discussão da natureza dos zeros de P_2, começaremos por notar as posições relativas das rectas r_i e da cónica C, de equações respectivamente $\varphi_i = 0$ e $\varphi_1^2 - \varphi_0 \varphi_2 = 0$:

1) C é tangente às rectas r_0 e r_2, nos pontos de intersecção destas rectas com r_1.

2) Os pontos de C só existem nos ângulos onde $\varphi_0 \varphi_2 > 0$; consequentemente:

   se for T o triângulo definido pelas rectas r_i,

   a) C será hipérbole e não terá pontos interiores ao triângulo T, se, no interior de T for $\varphi_0 \cdot \varphi_2 < 0$.

   b) C será elipse ou parábola e terá pontos interiores a T se, no interior de T for $\varphi_0 \cdot \varphi_2 > 0$.

Posto isto, sejam R_α as regiões simplesmente conexas determinadas do plano $\xi 0 \eta$ pelo trilátero r_0, r_1, r_2 e pela cónica C.

O polinómio $P_2(x)$ gosa, em relação a estas regiões $R_\alpha^{\prime\prime}$, das propriedades seguintes:

I — Conservando-se o ponto $M(\xi, \eta)$ no interior de uma mesma região R_α, não se altera a natureza dos zeros do polinómio P_2.

II — Quando $M(\xi, \eta)$ se desloca sobre r_0, um dos zeros de P_2 conserva-se no ponto infinito; sobre r_1 os dois zeros permanecem simétricos; sobre r_2 um dos zeros é nulo; enfim, sobre C os dois zeros são sempre iguais.

Aplicações. São imediatas as generalizações do problema anterior para o caso das equações $\varphi_i = 0$ representarem curvas à Jordan, limitando áreas simplesmente conexas.

Este metodo, porém, da discussão da natureza dos zeros dum polinómio não poderá ser aplicado a equações de grau superior ao quarto.

Mas o interesse prático da repartição das raízes da equação

$$(1) \qquad P_2(x) = 0$$

reside no facto de ser ela a equação característica da equação diferencial de 2.ª ordem, homogénea, de coeficientes constantes,

$$(2) \qquad \varphi_0 \frac{d^2 x}{dt^2} + 2\varphi_1 \frac{dx}{dt} + \varphi_2 x = 0,$$

que rege tantos fenómenos da mecânica e da física.

Em muitos desses problemas, interessa menos a determinação do integral geral da equação diferencial,

(*) Recebido em 3 de Novembro de 1951. Dissertação apresentada em concurso de provas públicas para Professor Ordinário do 1.º grupo do Instituto Industrial de Lisboa.

(1) São óbvias as generalizações a polinómios de coeficientes reais, funções regulares de dois parâmetros.

que o comportamento do mesmo integral quando a variável t aumenta indefinidamente.

Como se sabe, se for $\rho = \alpha + i\beta$ uma raíz complexa da equação (1) o integral geral de (2) tem a forma

$$x(t) = e^{\alpha t}\,(Ae^{i\beta t} + Be^{-i\beta t})$$

e é

$$|x(t)| = k^2 e^{\alpha t}.$$

Portanto, se $\alpha < 0$, é $\lim\limits_{t \to \infty} |x(t)| = 0$; se $\alpha = 0$, o integral geral $x(t)$ é função limitada para todos os valores de t.

Em qualquer dos casos, diz-se que, o sistema, sède do fenómeno em estudo, sofre uma evolução *estável* (1).

O estudo da estabilidade do sistema reduz-se pois ao estudo do sinal da parte real das raízes complexas da equação característica da respectiva equação diferencial.

O problema anterior mostra um critério simples, de natureza geométrica, aplicável ao estudo da estabilidade de um sistema físico.

Consideremos, por exemplo, um sistema cuja evolução obedece à equação diferencial

$$(\eta - \xi)\,\frac{d^2x}{dt^2} + 2(\xi - 1)\,\frac{dx}{dt} + (\eta + \xi)\,x = 0\,.$$

A equação característica tem a forma

$$(\eta - \xi)\,\lambda^2 + 2(\xi - 1)\,\lambda + (\eta + \xi) = 0$$

e, basta traçar as rectas: $\eta - \xi = 0$, $\xi - 1$ 0 e $\eta + \xi = 0$, e a hipérbole $2\xi^2 - \eta^2 - 2\xi + 1 = 0$ (fig. 1) para concluirmos:

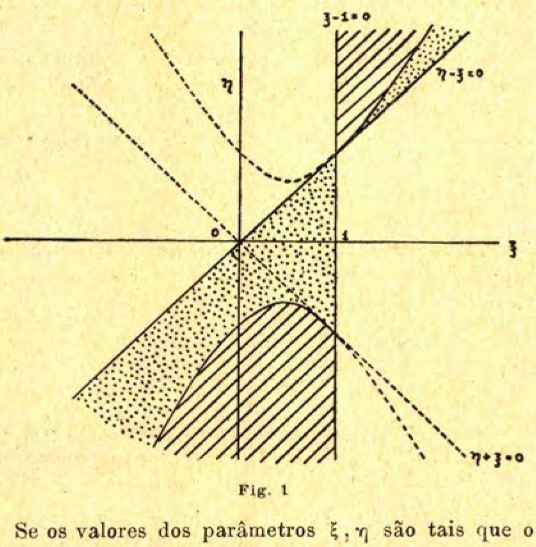

Fig. 1

Se os valores dos parâmetros ξ, η são tais que o ponto $M(\xi, \eta)$ se situa

(1) Se t for a variável tempo, e se $\lim\limits_{t \to \infty}(x) = \infty$, o sistema viria a sofrer uma rutura mecânica, disrupção eléctrica, etc.

a) na região tracejada, o sistema funciona em *regime periódico amortecido.*

b) sobre os arcos AB e CD dos ramos da hipérbole o sistema tem um *amortecimento crítico.*

c) na região ponteada, o regime é *aperiódico estável.*

Se, porém, a equação diferencial for

$$(\xi - \eta)\,\frac{d^2x}{dt^2} + 2(\xi - 1)\,\frac{dx}{dt} + (\xi + \eta)\,x = 0$$

a cónica reduz-se à parábola $\eta^2 - 2\xi + 1 = 0$, (fig. 2).

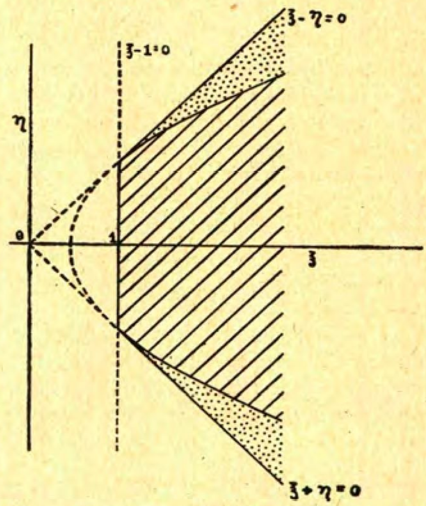

Fig. 2

Agora, se o ponto M estiver situado:

a) na área tracejada, o sistema funciona em regime periódico amortecido

b) sobre os arcos AB e CD da parábola, o sistema tem amortecimento crítico.

c) na região ponteada o regime é aperiódico estável.

Nos dois casos vê-se, gràficamente, que o regime de amortecimento crítico é um caso limite comum dos regimes periódicos amortecidos e aperiódico estável.

Generalizações. A análise anterior tem o inconveniente de não permitir uma generalização quanto ao grau do polinómio, pois baseia-se na resolubilidade por radicais da respectiva equação.

Há, no entanto, processos clássicos aplicáveis a equações quaisquer de coeficientes reais.

Temos, por exemplo o

TEOREMA DE HURWITZ (1). *A condição necessária e suficiente para que os zeros do polinómio de coeficientes reais*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \qquad (a_0 > 0)$$

tenham todos a parte real negativa, é que os determinantes

$$\Delta_1 = a_1 \,, \quad \Delta_2 \,, \quad \Delta_3 \,, \cdots, \quad \Delta_n$$

$$\Delta_\lambda = \begin{vmatrix} a_1 \, a_3 \, a_5 \cdots a_{2\lambda-1} \\ a_0 \, a_2 \, a_4 \cdots a_{2\lambda-2} \\ 0 \;\; a_1 \, a_3 \cdots a_{2\lambda-3} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 \;\; 0 \;\; 0 \cdots a_\lambda \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} (a_k = 0 \;\; se \;\; k > n) \\ \lambda > 1 \end{matrix}$$

sejam todos positivos.

Este teorema permite-nos resolver o caso de aplicação anterior, qualquer que seja a ordem da equação diferencial respectiva.

Outros critérios, devidamente adoptados, são também aplicáveis ao mesmo problema. Assim, conhece-se o

TEOREMA DE ENESTRÖM KAKEYA (1). *Se os coeficientes dum polinómio* f (x) *são reais e verificam as desigualdades*

$$0 \leqslant a_0 \leqslant a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_n$$

todos os zeros de f (x) *estão contidos no círculo unidade,* $|x| \leqslant 1$.

Como a bilinear, $z = \dfrac{x+1}{x-1}$ transforma o interior do círculo $|x| < 1$ no semi-plano $\Re(z) < 0$ (estabelecendo uma correspondência biunívoca e contínua entre os pontos das respectivas fronteiras), se a transformada

$$(z-1)^n f\left(\frac{z+1}{z-1}\right) = 0$$

verifica as condições do teorema de KAKEYA, todas as raízes da equação $f(x) = 0$ tem a parte real negativa.

Generalizações de outro tipo poderão obter-se, conderando polinómios de coeficientes complexos.

Referir-nos-emos apenas a um método devido a HERMITE, completado por um teorema de SCHUR e citado por DIEUDONNÉ (2).

Seja $f(x) = a_0 + \cdots + a_n x^n$ um polinómio de coeficientes complexos; a transformada

$$f^*(x) = x^n \overline{f(1/\bar{x})} = \bar{a}_n + \bar{a}_{n-1} x + \cdots + \bar{a}_0 x^n$$

tem os zeros simétricos dos de $f(x)$ em relação ao círculo unidade. A expressão

$$K(f) = \frac{f(x) f^*(y) - f(y) f^*(x)}{x-y} = \sum_{h,k=0}^{n-1} A_{hk} x^h y^k$$

é tal que os seus coeficientes verificam as relações

$$A_{hk} = A_k \qquad \bar{A}_{hk} = A_{n-h-1,\, n-k-1} \;;$$

se em K substituirmos x^h, y^{n-k-1} respectivamente por u_h e u_k, e fizermos $a_{hk} = A_{h,\, n-k-1}$, obtemos uma forma de HERMITE $H(f; u_0, u_1, \cdots, u_{n-1})$ associada a $f(x)$.

Então podemos enunciar o

TEOREMA DE SCHUR. *A condição necessária e suficiente para que todos os zeros do polinómio* f (x) *sejam interiores ao círculo unidade é que a forma* H *seja definida positiva.*

Enfim, refazendo a análise anterior, substituindo porém a transformada $f^*(x)$ por $\overline{f(x)}$, obtemos outro critério que nos permite afirmar quando todos os zeros dum polinómio de coeficientes complexos tem a parte real negativa.

Anteriormente a CAUCHY, os métodos usados no estudo analítico das funções eram pouco rigorosos, grosseiros, mesmo, abusando-se duma «intuição evidente» na falta duma estruturação lógica, ainda inexistente.

O estudo dos polinómios como funções analíticas inicia-se realmente com CAUCHY, mas até o fim do Sec. XIX procura-se apenas a determinação das posições dos zeros reais dos polinómios de coeficientes reais, deduzidas das posições relativas desses mesmos coeficientes.

No entanto, um dos primeiros resultados obtidos deve-se ao próprio CAUCHY, mas sobre polinómios de coeficientes quaisquer:

TEOREMA. *Todos os zeros do polinómio de coeficientes complexos*

(1) $$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

estão contidos no círculo $|x| \leqslant x_0$, *em que* x_0 *representa a raíz positiva da equação*

(2) $$A_0 + A_1 x + \cdots + A_{n-1} x^{n-1} = A_n x^n \qquad A_i = |a_i| \,.$$

Não conhecemos qualquer trabalho onde o estudo analítico dos polinómios seja feito como corpo próprio de doutrina. Pode dizer-se que os resultados conhecidos são em regra dispersos, havendo até métodos característicos dos polinómios de coeficientes complexos e métodos característicos dos de coeficientes reais.

(1) Citado por J. DIEUDONNÉ — *La théorie analytique des polynômes d'une variable.*

(2) DIEUDONNÉ — Loc. cit.

Relativamente poucos são os resultados obtidos sobre as propriedades dos argumentos dos zeros.

Em 1944 obtivemos algumas contribuições para o anterior teorema de CAUCHY [1].

Assim:

A condição necessária e suficiente de existência dum zero do polinómio (1) *sobre a circunferência* $|x|=x_0$ *é que os respectivos coeficientes verifiquem as relações únicas e simplesmente determinadas*

$$(A)\qquad \arg\frac{a_i}{a_{i+1}}=\arg\sqrt[n]{\frac{a_0}{a_n}}+\frac{\pi}{n}\qquad (i=0,1,\cdots n-2).$$

Além disso,

Os polinómios cujos coeficientes verificam as relações

$$(B)\qquad \arg\frac{a_i}{a_{i+1}}=\varphi+k\pi,$$

menos restritivas que as anteriores, constituem um domínio de integridade, $D\varphi$, *caracterizado pela propriedade seguinte*:

Todos os polinómios dum $D\varphi$ *têm os respectivos zeros simétricos em relação à recta* $y=x\cdot\operatorname{tg}\varphi$ *(em particular sobre a própria recta).*

Com efeito, se for

$$P_n(x)=e^{i\varkappa}\sum_{j=0}^{n}|a_j|\,e^{i\lambda_j}x^j\qquad(\lambda_j=j\varphi+k_j\pi)\qquad k_0=0$$

um elemento de $D\varphi$, a soma e o produto de dois elementos de $D\varphi$ ainda é elemento de $D\varphi$. Que $D\varphi$ é domínio de integridade, torna-se agora evidente.

D_0 é o domínio que contém todos os polinómios de coeficientes reais.

Passa-se dos elementos do domínio $D\varphi$ para os do domínio $D\psi$, efectuando no plano da variável x uma rotação em torno da origem de abertura $\varphi-\psi$.

O conjunto $\theta\varphi_\varkappa$ dos polinómios de $D\varphi$ cujo coeficiente independente tem o mesmo argumento $\varkappa$, não constitue um sub-anel de $D\varphi$.

Seja, abreviadamente, $\varphi_\varkappa$ o sub-anel de $D\varphi$, gerado pelo conjunto $\theta\varphi_\varkappa$. Se definirmos, à maneira vulgar, adição e multiplicação e admitirmos como correspondentes os elementos dos anéis $\varphi_\varkappa$ e $\psi_\varkappa$ que se transformam um no outro por meio da rotação anterior, então esta rotação define uma isomorfia entre $\varphi_\varkappa$ e $\psi_\varkappa$.

Além disso, como são isomorfos dois anéis $\psi_\varkappa$ e ψ_π, serão isomorfos $\varphi_\varkappa$ e ψ_π.

Note-se porém que o conjunto θ_{0_0} é já um sub-anel de D_0. Esta circunstância permite concluír que a rotação considerada estabelece entre um $\varphi_\varkappa$ e 0_0, não uma isomorfia mas uma homomorfia.

Ora 0_0 é o conjunto de todos os polinómios de coeficientes reais e termos independentes positivos — os polinómios que satisfazem às primeiras condições dos enunciados dos teoremas de HURWITZ e KAKEYA. Por outro lado, os polinómios cujos coeficientes verificam as condições B) constituem um anel, $\mathfrak{A}$.

Então as mesmas condições B) permitem a subdivisão de $\mathfrak{A}$ em sub-aneis [1] $\varphi_\varkappa$, isomorfos entre si, mas cada um homomorfo ao anel 0_0.

Esta análise permite uma generalização dos teoremas de HURWITZ e KAKEYA para o caso de coeficientes complexos; assim:

TEOREMA 1. *A condição necessária e suficiente para que os zeros dum polinómio de coeficientes complexos, verificando as condições* B)

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\qquad a_0=|a_0|\,e^{i\varkappa}$$

tenham todos a parte real negativa é que os determinantes

$$\Delta_1=A_1,\quad \Delta_2,\quad \Delta_3,\cdots\quad \Delta_n$$

$$\Delta_\lambda=\begin{vmatrix} A_1 & A_3 & A_5\cdots A_{2\lambda-1}\\ A_0 & A_2 & A_4\cdots A_{2\lambda-2}\\ 0 & A_1 & A_3\cdots A_{2\lambda-3}\\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\\ 0 & 0 & 0\cdots A_\lambda\end{vmatrix}\qquad \begin{matrix}(A_k=0\ \textit{se}\ k>n)\\ \lambda>1\\ A_j=a_je^{i(j\varphi-\varkappa)}\end{matrix}$$

sejam todos positivos.

TEOREMA 2. *Se os coeficientes (complexos) dum polinomio* $f(x)$ *verificam as condições* B) *e são tais que*

$$0<A_0<A_1<\cdots<A_n$$

$$A_j=a_j\,e^{i(j\varphi-\varkappa)}$$

todos os zeros de $f(x)$ *estão contidos no círculo unidade* $|x|<1$.

[1] TEIXEIRA, J. GASPAR — *Sur une certaine classe de polynômes à coefficients complexes.*

[1] Evidentemente, não disjuntos.