Sobre um caso de convergência de fracções contínuas de elementos complexos (*)

por **João Farinha**
Universidade de Coimbra

Embora menos fàcilmente manejável do que as séries e os produtos infinitos, o algoritmo das fracções contínuas tem sido bom auxiliar no estabelecimento de muitas proposições fundamentais da matemática: por exemplo, a irracionalidade não quadrática de π.

Como problema inicial deste algoritmo, põe-se, naturalmente, o da determinação de condições de convergência. Nesta ordem de ideias, tem esta nota por objectivo demonstrar uma condição suficiente de convergência numa certa classe de fracções contínuas de elementos complexos.

Theorema. *Sejam* $f_1(z), f_2(z), \cdots f_n(z), \cdots$ *funções de uma variável complexa que verificam num domínio* Δ *as seguintes hipóteses*:

$$|f_1| \geqslant 1+\alpha_1, \quad |f_n| \geqslant 1+\alpha_n+\frac{1}{1+\alpha_{n-1}} \qquad (n=2,3,\cdots)$$

sendo $\underline{\lim}\,(\alpha_n) \geqslant a > 0$.

Nestas condições, a fracção contínua infinita

$$\cfrac{1}{f_1+\cfrac{1}{f_2+\ddots+\cfrac{1}{f_n+\cdots}}}$$

é uniformemente convergente em Δ *e todas as reduzidas têm os afixos no círculo*

$$|z| \leqslant \frac{a+1}{a(a+2)}.$$

Se representarmos por B_n o denominador da reduzida de ordem n, a fracção contínua considerada é, como se sabe, equivalente à série

$$\sum \frac{(-1)^{n-1}}{B_n B_{n-1}} \qquad (B_0=1).$$

(*) Recebido em 1951, Novembro, 8.

Ora das hipóteses anteriores decorre a convergência absoluta e uniforme desta série.

Em primeiro lugar é

$$\left|\frac{B_n}{B_{n-1}}\right| \geqslant 1+\alpha_n. \tag{1}$$

Com efeito:

$$\left|\frac{B_2}{B_1}\right| = \left|f_2+\frac{1}{f_1}\right| \geqslant |f_2| - \left|\frac{1}{f_1}\right| \geqslant 1+\alpha_2.$$

Mas se for $\left|\dfrac{B_k}{B_{k-1}}\right| \geqslant 1+\alpha_k$, ter-se-á

$$\left|\frac{B_{k+1}}{B_k}\right| = \left|f_{k+1}+\frac{B_{k-1}}{B_k}\right| \geqslant 1+\alpha_{k+1}$$

e deste modo fica provada (1), com toda a generalidade.

Por outro lado da hipótese $|f_1| \geqslant 1+\alpha_1$ e de (1) resulta que nenhum B_i se anula e a identidade

$$|B_n| = \prod_1^n \left|\frac{B_k}{B_{k-1}}\right|$$

dá então $|B_n| \geqslant \prod\limits_1^n (1+\alpha_n) \geqslant (1+a)^n$.

Assim, será em Δ, e para todos os valores de n

$$\frac{1}{|B_n B_{n-1}|} \leqslant \frac{1}{(1+a)^{2n-1}}.$$

A série $\sum \dfrac{(-1)^{n-1}}{B_n B_{n-1}}$ é pois absoluta e uniformemente convergente. E com isto se prova a primeira parte da proposição.

A segunda parte é imediata, pois $\dfrac{a+1}{a(a+2)}$ é justamente a soma da série majorante $\sum \dfrac{1}{(1+a)^{2n-1}}$.