Sobre la metrización de los espacios cuasi-métricos (*)

por **Manuel Balanzat**

Univ. Nac. de Cuyo — San Luis — Argentina

1. — Empezemos recordando las definiciones de espacios con métrica débil y de espacios cuasimétricos:

Si sobre un conjunto E se define para cada par ordenado (x,y) de elementos de E un número real $\delta(x,y)\geqslant 0$ que cumpla las siguientes condiciones:

$$\delta(x,x)=0 \qquad \delta(x,y)\leqslant\delta(x,z)+\delta(z,y)$$

y si se define el sistema fundamental de entornos de un punto a de E como el conjunto de los esferoides abiertos de centro a (es decir los conjuntos de puntos x tales que $\delta(a,x)<\lambda$ en donde λ toma valores reales), se dice entonces que E es un *espacio con métrica débil*.

Si se supone además que $\delta(x,y)=0$ implica $x=y$, el espacio se denomina *cuasimétrico*; si se añade finalmente la condición de simetria $\delta(x,y)=\delta(y,x)$ obtenemos el caso clásico de los espacios métricos.

Es inmediato que si un espacio con métrica débil cumple el axioma de Fréchet de los espacios accesibles es un espacio cuasimétrico y, recíprocamente, todo espacio cuasimétrico es accesible.

En una memoria («Sur les espaces à métrique faible», *Portugaliae Mathematica,* vol. 4, fas. 1, 1943) Hugo Ribeiro planteó el problema de las relaciones entre los espacios con una métrica débil y los espacios métricos, y en particular planteó el problema de si todo espacio con métrica débil que fuese normal seria metrizable. Empezaremos por dar una solución negativa al problema planteado por Hugo Ribeiro dando: *un ejemplo de espacio cuasimétrico completamente normal y no metrizable.*

Para ello consideremos el conjunto de los números reales del intervalo $(0\leqslant x\leqslant 1)$ y definamos una cuasidistancia $q(x,y)$ de la forma siguiente:

$$q(x,y)=\begin{cases} |y-x| & \text{si } x\leqslant y \\ 1 & \text{si } x>y \end{cases}$$

Es claro que $q(x,y)$ es siempre mayor o igual a cero y es igual a cero quando y sólo cuando $x=y$.

Pasemos ahora a probar la condición $q(x,y)\leqslant q(x,z)+q(z,y)$; la condición se cumple siempre que sea $x=y$, o $x=z$, o $y=z$; consideremos ahora los otros seis casos posibles:

$$\begin{aligned}
x<y<z:&\ q(x,y)=|x-y|;\ q(x,z)=|x-z|;\\ &\ q(z,y)=1\\
x<z<y:&\ q(x,y)=|x-y|;\ q(x,z)=|x-z|;\\ &\ q(z,y)=|z-y|\\
y<x<z:&\ q(x,y)=1;\ q(x,z)=|x-z|;\ q(z,y)=1\\
y<z<x:&\ q(x,y)=1;\ q(x,z)=1;\ q(z,y)=1\\
z<x<y:&\ q(x,y)=|x-y|;\ q(x,z)=1;\\ &\ q(z,y)=|z-y|;\\
z<y<x:&\ q(x,y)=1;\ q(x,z)=1;\ q(z,y)=|z-y|
\end{aligned}$$

y vemos que en todos los casos se cumple la condición.

E es pues un espacio cuasimétrico en el que los entornos de centro a y radio r son los intervalos $a\leqslant x<r$.

Vamos a probar ahora que E es completamente normal: para ello consideremos dos conjuntos A y B no mútuamente conexos.

Si $a\in A$, como $A\cap\overline{B}$ es vacío se puede determinar un esferoide abierto $E(a)$ de centro a que no contenga ningún punto de B. Analogamente para todo $b\in B$ se puede determinar un esferoide abierto $E(b)$ de centro b y tal que no contenga ningún punto de A.

Tomemos los conjuntos

$$A^*=\bigcup_{a\in A}E(a) \qquad B^*=\bigcup_{b\in B}E(b)$$

A^* y B^* son conjuntos abiertos que contienen respectivamente a A y B; si probamos que carecen de puntos comunes habremos probado que E es completamente normal, en efecto: para probar que $A^*\cap B^*$ es vacío basta probar que cualesquiera que sean $E(a)$ y $E(b)$, el conjunto $E(a)\cap E(b)$

(*) Recibido en 26 de Noviembre de 1951.

es vacio. Si $a \in A$ y $b \in B$ tiene que ser $a \neq b$; supongamos $a < b$. Sea r el radio de $E(a)$, como $b \notin E(a)$ es $b \geqslant a + r$; ahora bien, todo $x \in E(a)$ es menor que $a + r$ y todo $y \in E(b)$ es mayor o igual que b, luego tenemos

$$x < a + r \leqslant b \leqslant y$$

es decir que x es distinto de y como queríamos demonstrar.

Para probar que E no es metrizable, probaremos que tiene un conjunto denso numerable y carece de base numerable.

La primera parte es inmediata ya que el conjunto de los puntos racionales del intervalo es denso en E puesto que en todo entorno de cualquier x de E hay puntos racionales del intervalo.

Vamos a demostrar ahora que E carece de base numerable. Sea $\mathcal{V}$ una base; para cada $a \in E$ tiene que existir un $V(a)$ de la base contenido en $a \leqslant x < 1$ y tal que $a \in V(a)$; tomemos ahora dos puntos distintos a y b y supongamos $a < b$, es claro que entonces $a \notin V(b)$ luego $V(a) \neq V(b)$, cualesquiera que sean a y b.

Hemos hecho así corresponder a cada número real de $(0 \leqslant x < 1)$ un elemento de $\mathcal{V}$ de forma tal que a números distintos correspondan elementos distintos, luego, la base $\mathcal{V}$ no puede ser nunca numerable.

2. — Si recordamos que todo espacio topológico de Hausdorff, compacto y con base numerable es metrizable, cabe preguntarse: suprimiendo alguna de estas condiciones y reemplazándola por la condición de que el espacio sea cuasimétrico, se obtendrá un espacio metrizable?

Esto es cierto cuando la condición que se suprime es la de base numerable, ya que Hugo Ribeiro demostró (loc cit.) que todo espacio cuasimétrico de Hausdorff y compacto es metrizable. Vamos a ver en cambio que ello deja de ser cierto para los espacios cuasimétricos, compactos y con base numerable, así como para los espacios cuasimétricos de Hausdorff y con base numerable.

Empezaremos por dar *un ejemplo de un espacio cuasimétrico, compacto y con base numerable que no es metrizable.*

Para ello tomemos un conjunto numerable cualquiera de elementos distintos

$$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$$

y definamos la cuasidistancia de la forma siguiente:

$$q(a_n, a_p) = \begin{cases} \dfrac{1}{n+p} & \text{si } n < p \\ 0 & \text{si } n = p \\ 1 & \text{si } n > p \end{cases}$$

Como $q(a_n, a_p)$ es siempre $\geqslant 0$ y es igual a cero si, y sólo si, $n = p$, para probar que es una cuasidistancia bastará probar que $q(a_n, a_p) \leqslant q(a_p, a_r) + q(a_r, a_p)$; consideremos los seis casos posibles para puntos distintos:

$$n < p < r: \; q(a_n, a_p) = \frac{1}{n+p}; \; q(a_n, a_r) = \frac{1}{n+r}; \quad q(a_r, a_p) = 1$$

$$n < r < p: \; q(a_n, a_p) = \frac{1}{n+p}; \; q(a_n, a_r) = \frac{1}{n+r}; \quad q(a_r, a_p) = \frac{1}{r+p}$$

$$p < r < n: \; q(a_n, a_p) = 1; \; q(a_n, a_r) = 1; \; q(a_r, a_p) = 1$$

$$p < n < r: \; q(a_n, a_p) = 1; \; q(a_n, a_r) = \frac{1}{n+r}; \quad q(a_r, a_p) = 1$$

$$r < p < n: \; q(a_n, a_p) = 1; \; q(a_n, a_r) = 1; \quad q(a_r, a_p) = \frac{1}{r+p}$$

$$r < n < p: \; q(a_n, a_p) = \frac{1}{n+p}; \; q(a_n, a_r) = 1; \quad q(a_r, a_p) = \frac{1}{r+p}$$

La propiedad es evidente en todo los casos, excepto en el segundo y para éste se ve facilmente ya que se tiene

$$r < p; \; n + r < n + p; \quad \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n+r}; \quad q(a_n, a_p) < q(a_n, a_r)$$

y por consiguiente

$$q(a_n, a_p) < q(a_n, a_r) + q(a_r, a_n).$$

Se ve facilmente que el espacio tiene una base numerable: la formada por los esferoides con centros en cada punto y radios racionales.

Vamos ahora a probar que el espacio es compacto. Como es numerable, en él coinciden los conceptos de compacto y perfectamente compacto según Fréchet (no es en cambio compacto en el sentido de Bourbaki, ya que si bien tiene la propiedad de Borel-Lebesgue, no es un espacio de Hausdorff). Basta, pues, probar que todo conjunto infinito tiene un punto de acumulación. Sea F el conjunto infinito y a_n un punto cualquiera de F; consideremos un esferoide E de centro a_n y radio r cualquiera.

Sea p un número natural tal que $p > n$ y $p + n > \dfrac{1}{r}$.

Como F es infinito, en él hay un punto a_q tal que $q > p$. Entonces será $q > n$ y tendremos

$$q(a_n, a_q) = \frac{1}{n+q} < \frac{1}{n+p} < r$$

luego $a_q \in E$ y a_n es punto de acumulación de F. Vemos así que todos los puntos del espacio son puntos de acumulación de cualquier subconjunto de él que sea infinito luego es compacto.

Para probar que no es metrizable probaremos que no es un espacio de HAUSDORFF, en efecto: sean a_m y a_n dos puntos del espacio y V y W dos esferoides de centros a_m y a_n, y radios r y s respectivamente. Tomemos um número natural p tal que se tenga: $p > n$, $p + n > \frac{1}{r}$, $p > m$, $p + m > \frac{1}{s}$, entonces

$$q(a_m, a_p) = \frac{1}{m+p} < r \quad \text{luego} \quad a_p \in V$$

$$q(a_n, a_p) = \frac{1}{n+p} < s \quad \text{luego} \quad a_p \in W$$

y como esto es valido cualesquiera que sean r y s se deduce que el espacio no es de HAUSDORFF.

3. — Pasemos ahora a dar *un ejemplo de un espacio cuasimétrico, de* HAUSDORFF, *con base numerable y no metrizable.*

Para ello tomemos el conjunto de los números algebráicos del intervalo $(0 < x < 1)$ y definamos de la forma siguiente una cuasidistancia:

$q(x, y) = 0$ para $x = y$ y si $x \neq y$, entonces designando por r los números racionales y por i los irracionales

$$q(r', r'') = |r' - r''|; \quad q(i, r) = |i - r|;$$
$$q(r, i) = 1; \quad q(i', i'') = 1.$$

Probemos que es una cuasidistancia demostrando la propiedad $q(x, y) \leqslant q(x, z) + q(z, y)$. Como la cuasidistancia es siempre menor o igual que 1, la propiedad se cumple siempre que y o z son irracionales; si ambos son racionales se tiene, cualquiera que sea x

$$q(x, y) = |x - y| \leqslant |x - z| + |z - y| =$$
$$= q(x, z) + q(z, y).$$

El espacio es pues cuasimétrico y los esferoides abiertos de centros a y radio h están costituidos por a y los puntos racionales x tales que $|x-a|<h$.

Como en el ejemplo anterior se ve que el espacio, siendo cuasimétrico y numerable, tiene una base numerable.

Tomamos ahora dos puntos cualesquiera x e y distintos y sea $|x - y| = h$. Tomando dos esferoides de centros x e y y radios menores que la mitad de h, se ve inmediatamente que carecen de puntos comunes, lo que prueba que el espacio es de HAUSDORFF.

Para probar que no es metrizable probaremos que no es regular. En efecto: sea M el conjunto de los números algébraicos irracionales. M es cerrado, en efecto: sea $r \notin M$, entonces r es racional y cualquier esferoide de centro r sólo contiene puntos racionales, es decir no contiene ningún punto de M, luego cualquiera, que sea r no perteneciente a M, no puede ser punto de acumulación de M, luego M es cerrado.

Sea ahora a un punto racional y V un esferoide de centro a y radio h cualquiera, en el intervalo $|x - a| < h$ hay puntos irracionales (que no pertenecen a V); sea i uno de estos puntos irracionales. Todo conjunto abierto que contenga a M debe contener un esferoide de centro i, es decir los puntos racionales de un intervalo de centro i, luego tiene que contener puntos de V; ello nos prueba que el espacio no es regular, y por consiguiente no es metrizable.

4. — Un espacio cuasimétrico completamente regular puede muy bien no ser metrizable, como lo prueba el primer ejemplo que hemos dado, pero si modificamos la condición de completa regularidad se puede obtener una condición suficiente para que el espacio sea metrizable.

Una función $y = f(x)$ definida en un espacio cuasimétrico y tomando valores reales es contínua en un conjunto F del espacio E, si para cada punto a de F y cada ε real existe un μ real tal que si $q(a, x) < \mu$ se tiene $|f(a) - f(x)| < \varepsilon$. Esta definición de continuidad es, evidentemente, un caso particular de la definición general de función contínua en los espacios topológicos.

El número μ depende de a y de ε; por analogía con el caso de los espacios métricos diremos que la función es *uniformemente contínua* si se puede encontrar un μ que sólo dependa de ε, es decir si para todo ε existe $\mu(\varepsilon)$ tal que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ para todo par de puntos (x, y) tales que $q(x, y) < \mu(\varepsilon)$.

Vamos a probar ahora que: *si un espacio* E *cuasimétrico es tal que para todo conjunto cerrado* A *y todo punto* a *no perteneciente a* A, *existe en* E *una función numérica uniformemente contínua, tomando sus valores en el intervalo* $(0, 1)$ *y tal que* $f(a) = 0$ *y* $f(x) = 1$ *para todo* x *de* A, *entonces el espacio es metrizable.*

Para probar este teorema nos apoyaremos en el siguiente resultado de NIEMYTZKI («On the third axiom of metric space», *Transactions of the American Mathematical Society*, *vol.* 29, 1927):

«Sea E un conjunto en el que se hace corresponder a cada par ordenado (x, y) de puntos de E un número real $\delta(x, y) \geqslant 0$ sujeto a las condiciones siguientes:

1.° $\delta(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$.

2.° $\delta(x, y) = \delta(y, x)$.

3.° Para cada a de E y cada número real $\varepsilon > 0$, existe un $\mu(a, \varepsilon)$, tal que si $\delta(a, b) < \mu(a, \varepsilon)$ y $\delta(c, b) < \mu(a, \varepsilon)$, entonces $\delta(a, c) < \varepsilon$.

Tomemos como sistema fundamental de entornos de cada punto a de E los esferoides abiertos de centro a (es decir el conjunto de puntos x de E tales que $\delta(a, x) < r$, para los valores reales de r).

Entonces el espacio topológico así obtenido es metrizable».

Sea E el espacio cuasimétrico del teorema; tomemos $\delta(x, y)$ igual a la menor de las cuasidistancias $q(x, y)$ y $q(y, x)$. Es inmediato que $\delta(x, y)$ cumple las condiciones 1.° y 2.° del teorema de Niemytzki; vamos a probar que también cumple la 3.°. En efecto:

Sea a de E y $\varepsilon > 0$. Tomemos el esferoide abierto de centro a y radio ε. Sea M el conjunto cerrado complementario de dicho esferoide. Por hipótesis existe una función $f(x)$ uniformemente contínua en E y tal que $f(x) = 1$ para todo x de M (es decir para los x tales que $q(a, x) \geqslant \varepsilon$) y $f(a) = 0$.

Llamemos $\mu(a, \varepsilon)$ al número μ tal que $|f(x) - f(y)| < \frac{1}{2}$ para $q(x, y) < \mu(a, \varepsilon)$.

Como $\delta(x, y) \leqslant q(x, y)$ tendremos $|f(x) - f(y)| < \frac{1}{2}$ para $\delta(x, y) < \mu(a, \varepsilon)$.

Tomemos ahora dos puntos b y c tales que $\delta(a, b) < \mu(a, \varepsilon)$ y $\delta(b, c) < \mu(a, \varepsilon)$; se tendrá $|f(a) - f(b)| < \frac{1}{2}$ y $|f(b) - f(c)| < \frac{1}{2}$, y como $f(a) = 0$, se tiene

$$|f(c)| = |f(a) - f(c)| \leqslant |f(a) - f(b)| + \\ + |f(b) - f(c)| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

y de acá se deduce que $\delta(a, c)$ es menor que ε pues si fuese $\delta(a, c) \geqslant \varepsilon$ seria $q(a, c) \geqslant \varepsilon$ y entonces seria $f(c) = 1$.

Vemos pues que se cumple la condición 3.° del teorema de Niemytzki; luego E con la topología introducida por $\delta(x, y)$ es metrizable. Queda ahora por probar que la topología introducida por $\delta(x, y)$ es la misma que la introducida por $q(x, y)$. En efecto:

Sea a un punto cualquiera de E y $Q(r)$ el esferoide definido por la condición $q(a, x) < r$; como $\delta(a, x) \leqslant q(a, x)$, $Q(r)$ contiene el esferoide $D(r)$ definido por la condición $\delta(a, x) < r$.

Tomemos ahora el esferoide $D(r)$ y sea $f(x)$ la función uniformemente contínua en E y tal que $f(a) = 0$ y $f(x) = 1$ para $q(a, x) \geqslant r$. Sea μ el número real tal que $|f(x) - f(y)| < 1$ para $q(x, y) < \mu$.

Tomemos ahora el esferoide $Q(\mu)$ definido por la condición $q(a, x) < \mu$, y sea x uno cualquiera de sus puntos; como $q(a, x) < \mu$ se tiene: $f|(x)| = |f(a) - f(x)| < 1$, luego $q(a, x) < r$ ya que si fuese $q(a, x) \geqslant r$ seria $f(x) = 1$; como $\delta(a, x) \leqslant q(a, x) < r$ se deduce que x pertenece a $D(r)$, y como x es cualquiera se deduce que $Q(\mu)$ está contenido em $D(r)$.

Queda así probada la identidad de las dos topologías y por consiguiente demostrado el teorema.