GAZETA DE MATEMÁTICA
N.º 50 — Dezembro de 1951

Les filtres fermés des espaces compacts

par A. A. Monteiro

Univ. Nacional de Cuyo — San Juan — Argentina

La famille Φ_R de tous les filtres (¹) d'un réticulé R a des propriétés qui dépendent des propriétés de R.

Atuo Komatu [1] a déterminé les propriétés caractéristiques de l'ensemble Φ_R dans le cas où R est un réticulé quelconque. D'autres résultats analogues ont été indiqués par Garrett Birkhoff et Orrin Frink [2].

Leopoldo Nachbin [3] a généralisé et completé les résultats précédents en indiquant, en particulier, les propriétés caractéristiques de la famille de tous les filtres d'une algèbre de Boole (²) et d'une algèbre de Boole généralisée.

Soit $\mathfrak{F}$ la famille de tous les ensembles fermés d'un espace compact I (nous supposons dans cette note, qu'un espace compact vérifie l'axiome d'Hausdorff). Les filtres de $\mathfrak{F}$ seront appellés des *filtres fermés* de l'espace topologique I (Pierre Samuel [4]).

Nous nous proposons d'indiquer dans cette note, des propriétés caractéristiques du réticulé $\Phi_{\mathfrak{F}}$. Pour cela rapellons les définitions suivantes:

A) Un *élement* d'un réticulé R sera dit *inférieurement compact* (ou plus simplement *compact*) (L. Nachbin [3]) si étant donnée une famille, non vide, $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ d'éléments de R telle que

$$\bigcap_{\alpha\in A} x_\alpha \subseteq x$$

il existe une partie finie, non vide, A_0 de A telle que

$$\bigcap_{\alpha\in A_0} x_\alpha \subseteq x$$

B) Un *réticulé* R ayant un premier élément (0) sera dit compact si 0 est dit compact.

C) Un *atome* d'un réticulé R (ayant un premier élément) est un élément $a\in R$ tel que: 1.º) $a\neq 0$, 2.º) si $x\subseteq a$, alors ou $x=0$ ou $x=a$.

D) Un *élément* x de R sera dit *atomique* s'il existe une famille, non vide, $\{a_\alpha\}_{\alpha\in A}$, d'atomes de R telle que

$$\bigcup_{\alpha\in A} a_\alpha = x .$$

E) Nous dirons qu'un réticulé R, ayant un premier et un dernier élément 1, vérifie *l'axiome de la normalité*, si étant donnés $a, b\in R$ tels que $a\cap b=0$, il existe des éléments $a_1, b_1\in R$ tels que $a\cap b_1 = a_1\cap b = 0$, $a_1\cup b_1 = 1$ (Voir H. Wallman [5]).

Si nous exigeons, en outre, que les éléments a_1, b_1 vérifient la condition $a_1\cap b_1 = 0$, nous dirons que R vérifie l'*axiome de la disconnexion normale.*

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat suivant:

Théorème — *Pour qu'un réticulé* Φ *soit isomorphe à la famille* $\Phi_{\mathfrak{F}}$ *de tous les filtres fermés d'un espace compact il faut et il suffit que*

I) Φ *soit distributif, complet et compact.*

II) *Tout élément de* Φ *soit le produit d'éléments compacts.* (¹)

III) *Les éléments compacts de* Φ, *distincts de* 0 *coincident avec les éléments atomiques de* Φ.

IV) Φ *vérifie l'axiome de la normalité.*

Si nous voulons caractériser la famille de tous les filtres fermés d'un espace métrisable compact ξ, il suffit de remplacer l'axiome II par:

II′) *Il existe une famille dénombrable* K, *d'éléments compacts de* Φ, *telle que tout élement de* Φ *soit le produit d'éléments de* K.

(¹) Un filtre d'un réticulé R est une partie, non vide, F de R telle que: 1.º) si $x, y\in F$ allors $x\cap y\in F$; 2.º) Si $x\subseteq y$ et $x\in F$ alors $y\in F$. Un fitre F est propre si $F\neq R$.

(²) ou, ce que revient au même, de la famille de tous les systhèmes deductifs d'une Algèbre de Boole.

(¹) Nous disons que x est le produit des éléments x_i si $x=\bigcap_i x_i$.