GAZETA DE MATEMÁTICA
N.º 50 — Dezembro de 1951

Integral de Riemann-Stieltjes num espaço localmente compacto

Ruy Luís Gomes
Porto

O **Curso de Analyse Infinitesimal** de **Gomes Teixeira**, cuja primeira edição foi publicada no Porto em 1889, assenta, no que respeita a Integração, na definição de CAUCHY, do integral de uma função contínua num intervalo $[a, b]$.

Ora, estando a «Gazeta de Matemática» a organizar um número comemorativo do 1.º centenário do nascimento do grande Mestre e Investigador, parece-nos de verdadeiro interesse para os estudantes das nossas Escolas Superiores, uma exposição simples e actualizada da noção de integral, tendo precisamente como ponto de partida a definição de CAUCHY.

Assim, este artigo trata no essencial, do prolongamento por continuidade do integral de CAUCHY; mas de modo a abranger o integral de RIEMANN e o integral de STIELJES. E ainda com a vantagem didática de utilizar um método que nos conduz directamente, ao integral de LEBESGUE-STIELJES num espaço localmente compacto, ou seja, às mais modernas teorias da integração.

Resumo

Constroi-se a noção de integral de RIEMANN-STIELJES de uma função limitada, de suporte compacto em E, pelo prolongamento por continuidade de uma funcional linear e não-negativa no sub-espaço L das funções contínuas, de suporte compacto em E. Para isso introduz-se uma topologia conveniente no espaço $\mathcal{F}$ das funções limitadas, de suporte compacto e recorre-se ao teorema fundamental do prolongamento por continuidade (1). Dá-se uma condição necessária e suficiente de integrabilidade em termos de medida de LEBESGUE-STIELTJES. Mostra-se que a definição de função integrável coincide com a definição clássica de STIELTJES quando E se reduz a um intervalo fechado de R^1. Estende-se a definição ao caso de a funcional ser linear e contínua (em termos da topologia da convergência uniforme).

Relaciona-se a definição do texto com a generalização de integral de STIELJES, devida a POLLARD.

(1) BOURBAKI — Livre III, Chap. I, § 6, p. p. 37-38 e RUY LUÍS GOMES «*Integral Lebesgue-Stieltjes*», J. I. M., Porto, 1952.

1. — O espaço topológico $\mathcal{F}$.

Designemos por E um espaço localmente compacto e por $\mathcal{F}$ a classe das funções numéricas, limitadas, de suporte compacto (2) em E.

PROPOSIÇÃO 1. *$\mathcal{F}$ é um espaço de* RIESZ (3) *(espaço vectorial reticulado).*

Na verdade se f_1, f_2 pertencem a $\mathcal{F}$, o mesmo sucede a $c_1 f_1 + c_2 f_2$, a $f_1 \cap f_2$ e a $f_1 \cup f_2$, quaisquer que sejam os números reais c_1, c_2.

As funções contínuas, de suporte compacto formam um sub-espaço (de RIESZ) de $\mathcal{F}$. Designá-lo-hemos por L.

Se E é compacto, $\mathcal{F}$ coincide com a classe das funções limitadas e L com a das funções contínuas.

TEOREMA 1. *A condição necessária e suficiente para que* $f \in \mathcal{F}$, *é que existam funções* $\varphi_1 \leqslant \varphi_2$ *de* L, *tais que* $\varphi_1 \leqslant f \leqslant \varphi_2$ *para todo* x *de* E.

Na verdade, se f admite o infimo l e o supremo $\mathcal{L}$ e é nula no complementar dum conjunto compacto $K \subset E$, podemos tomar $\varphi_1 = l\varphi_0$ e $\varphi_2 = \mathcal{L}\varphi_0$, sendo φ_0, contínua, de suporte compacto, igual à unidade em K (4).

Inversamente, de $\varphi_1 \leqslant f \leqslant \varphi_2$ deduz-se que $f \in \mathcal{F}$.

(2) De suporte compacto, quere dizer, nulas no complementar de um conjunto compacto, que pode variar de função para função.

(3) Designação introduzido por DIEUDONNÉ [*Bull. Soc. Math. France*, t. **72**, 1944, p. 193-194].

(4) Se E não é compacto tem-se $l \leq 0$ e $0 \leq L$. Por outro lado, dado um conjunto compacto, $K \subset E$, é sempre possível determinar uma função como φ_0 [cf. BOURBAKI, Livre III, Chap. IX, § 4, Cor. Prop. 4]. Se E é compacto, basta fazer $\varphi_1 = l$ $\varphi_2 = L$.

DEFINIÇÃO 1. *Entende-se por intervalo, a classe das funções* f *de* $\mathcal{F}$ *tais que* $\varphi_1 \leqslant f \leqslant \varphi_2$, *sendo* $\varphi_1 \leqslant \varphi_2$ *duas funções de* L. *E representa-se pelo símbolo* $[\varphi_1, \varphi_2]$.

DEFINIÇÃO 2. *Entende-se por vizinhança de uma função* f *de* $\mathcal{F}$, *qualquer intervalo que contém* f.

PROPOSIÇÃO 2. *Estas vizinhanças transformam* $\mathcal{F}$ *num espaço topológico (de* KURATOWSKY*).*

Com efeito: 1) toda função $f \in \mathcal{F}$ admite uma vizinhança; 2) toda vizinhança de f contém f; 3) dadas duas vizinhanças de f existe sempre uma vizinhança contida na intersecção daquelas. (5)

Daqui por deante interpretamos sempre $\mathcal{F}$ como um espaço munido desta topologia. E é evidente que, segundo essa topologia, L é denso em $\mathcal{F}$, quere dizer, o fecho de L coincide com o próprio espaço $\mathcal{F}$.

2. — Integral superior e Integral inferior de *Riemann-Stieltjes*.

Representemos por $F(\varphi)$ uma funcional linear e não-negativa (6) em L, isto é, uma funcional definida em L e tal que

$$F(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) = c_1 F(\varphi_1) + c_2 F(\varphi_2),$$

para $\varphi_1, \varphi_2 \in L$, c_1, c_2 números reais; $0 \leqslant F(\varphi)$ para $0 \leqslant \varphi$.

DEFINIÇÃO 3. *Entende-se por integral superior e integral inferior* RIEMANN-STIELTJES *de uma função* $f \in \mathcal{F}$, *os números representados e definidos respectivamente por*

$$\overline{\overline{F}}(\varphi) = \inf_{(V)}[\sup_{\varphi \in V} F(\varphi)], \quad \underline{\underline{F}}(\varphi) = \sup_{(V)}[\inf_{\varphi \in V} F(\varphi)]$$

sendo (V) *a classe das visinhanças de* f.

TEOREMA 2. *Os integrais — superior e inferior — são sempre finitos e, àlém disso,* $\underline{\underline{F}}(f) \leqslant \overline{\overline{F}}(f)$, $0 \leqslant \underline{\underline{F}}(f)$ *e* $0 \leqslant \overline{\overline{F}}(f)$ *para* $0 \leqslant f$.

Que são finitos deduz-se imediatamente da monotonia (7) de $F(\varphi)$.

Vejamos agora a relação $\underline{\underline{F}}(f) \leqslant \overline{\overline{F}}(f)$. Como, por definição, é sempre possível determinar vizinhanças V, V'', tais que $\underline{\underline{F}}(f) < \inf_{\varphi \in V'} F(\varphi) + \varepsilon$, $\sup_{\varphi \in V''} F(\varphi) < \overline{\overline{F}}(f) + \varepsilon$, construindo $V \subset V' \cap V''$, resulta

$$\underline{\underline{F}}(f) < \inf_{\varphi \in V'} F(\varphi) + \varepsilon \leqslant \inf_{V} F(\varphi) + \varepsilon \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\varphi \in V} F(\varphi) + \varepsilon \leqslant \sup_{\varphi \in V''} F(\varphi) + \varepsilon < \overline{\overline{F}}(f) + 2\varepsilon,$$

donde

$$\underline{\underline{F}}(f) \leqslant \overline{\overline{F}}(f).$$

Finalmente, se $0 \leqslant f$, a função f admite uma base de vizinhanças em que só figuram funções $\varphi \in L^+$, isto é, da classe das funções de L que são não negativas. E este facto combinado com $0 \leqslant F(\varphi)$ para $\varphi \in L^+$, mostra-nos que $0 \leqslant \underline{\underline{F}}(f)$, $0 \leqslant \overline{\overline{F}}(f)$.

PROPOSIÇÃO 3. *Tem-se* $\overline{\overline{F}}(f) = \overline{\overline{F}}(\bar{f}) = \inf_{\bar{f} \leq \varphi} F(\varphi)$, $\underline{\underline{F}}(f) = \underline{\underline{F}}(\underline{f}) = \sup_{\varphi \leq \underline{f}} F(\varphi)$, *designando por* $\underline{f}, \bar{f}$ *os limites inferior e superior, de* f.

Na verdade como V é da forma $[\varphi_1, \varphi_2]$ e $\inf_{\varphi \in V} F(\varphi) = F(\varphi_1)$, $\sup_{\varphi \in V} F(\varphi) = F(\varphi_2)$, vem $\overline{\overline{F}}(f) = \inf_{f \leq \varphi} F(\varphi) = \inf_{\bar{f} \leq \varphi} F(\varphi)$ e $\underline{\underline{F}}(f) = \sup_{\varphi \leq f} F(\varphi) = \sup_{\varphi \leq \underline{f}} F(\varphi)$.

Recorrendo ao integral de LEBESGUE-STIELTJES (8), — que designaremos pela letra F, ainda se pode escrever

$$\overline{\overline{F}}(f) = \overline{\overline{F}}(\bar{f}) = \mathsf{F}(\bar{f})$$

e

$$\underline{\underline{F}}(f) = \underline{\underline{F}}(\underline{f}) = \mathsf{F}(\underline{f}),$$

pois tanto $\bar{f}$ como $\underline{f}$ são somáveis (1).

COROLÁRIO 1. $\overline{\overline{F}}(f) - \underline{\underline{F}}(f) = \overline{\overline{F}}(\omega) = \mathsf{F}(\omega)$, *sendo* ω *a oscilação pontual de* $f \in \mathcal{F}$.

É uma consequência imediata da aditividade de F na classe das funções somáveis, combinada com a propriedade $\overline{\overline{F}}(f) = \overline{\overline{F}}(\bar{f})$ e com $\omega = \bar{\omega} = \bar{f} - \underline{f}$.

COROLÁRIO 2. *Sejam* f_1, f_2 *duas funções quaisquer de* $\mathcal{F}$. *Tem-se* $\overline{\overline{F}}(f_1 + f_2) \leqslant \overline{\overline{F}}(f_1) + \overline{\overline{F}}(f_2)$ *e* $\underline{\underline{F}}(f_1) + \underline{\underline{F}}(f_2) \leqslant \underline{\underline{F}}(f_1 + f_2)$.

Basta recorrer à Proposição 2 e à aditividade de $F(\varphi)$ em L.

(5) Na verdade, reportando-nos às designações utilizadas no no teorema 1, f admite a visinhança $[\varphi_1, \varphi_2]$; toda vizinhança de f contém f por definição; se $[\varphi'_1, \varphi'_2]$ e $[\varphi''_1, \varphi''_2]$ são vizinhanças de f, o mesmo sucede a $[\varphi'_1 \cup \varphi'_1, \varphi''_1 \cap \varphi''_2]$, que está contida na intersecção daquelas.

(6) Se E se reduz a intervalo fechado $I \subset R^n$, $F(\varphi)$ pode ser, por exemplo, o intregral de RIEMANN-STIELTJES da função contínua, φ, em ordem a uma qualquer função *não*-decrescente.

(7) Como $F(\varphi)$ é não-negativa, tem-se $F(\varphi_1) \leq F(\varphi_2)$ para $\varphi_1 \leqslant \varphi_2$.

(8) Cf. H. CARTAN — *Sur les Fondements de la Théorie du Potentiel*, Bull. Soc. Math. France, **69**, 1941, p. 73-74 e RUY LUIS GOMES — *Integral de Lebesgue-Stieltjes*, J. I. M. Porto, 1952.

3. — Funções Integraveis

DEFINIÇÃO 4. *Diz-se que* f *é integrável* RIEMANN-STIELTJES *em ordem a* $F(\varphi)$, $\varphi \in L$, *se* $\underline{\underline{F}}(f) = \overline{\overline{F}}(f)$. *E o valor comum*, $\mathsf{F}(f)$, *desses dois números, chama-se integral de* RIEMANN-STIELTJES *de* f.

TEOREMA 3. *As funções integráveis formam um espaço de* RIESZ, *sub-espaço de* $\mathcal{F}$ *no qual* $\mathsf{F}(f)$ *é linear e não-negativa.*

São integráveis, em particular, as funções de L. O integal assim definido não *é mais do que o prolongamento por continuidade da funcional linear e não-negativa*, $F(\varphi)$, $\varphi \in L$, *nos termos da topologia de* $\mathcal{F}$. *E sabemos que este prolongamento é único.*

TEOREMA 4. *A condição necessária e suficiente para que* $f \in \mathcal{F}$ *seja integrável* REMANN-STIELTJES *é que os pontos da descontinuidade de* f *formem um conjunto*, D, *da medida nula.*

É uma consequência imediata de

$$\overline{\overline{F}}(f) - \underline{\underline{F}}(f) = \mathsf{F}(\omega)$$

e das propriedades do integral LEBESGUE-STIELJES $\mathsf{F}(\omega)$.

4. — Integral de *Riemann-Stieljes* num intervalo fechado $I \subset R^1$

Vamos aplicar a teoria desenvolvida nos parágrafos anteriores ao caso de E se reduzir a $I \subset R^1$ e estabelecer as relações que a ligam às definições conhecidas, nomeadamente, a de STIELTJES e a generalização de POLLARD.

Em primeiro lugar, como $F(\varphi)$ se reduz, então, a uma funcional linear e não-negativa na classe L das funções contínuas num intervalo fechado $[a,b]$ da recta euclideana, o teorema de RIESZ [9] diz-nos que $F(\varphi) = \int_a^b \varphi(x)\, d\psi(x)$, sendo o segundo membro o integral de STIELTJES da função contínua φ em ordem à função não decrescente ψ.

Designando por P uma partição qualquer de $[a,b]$ nos sub-intervalos $[x_{j-1}, x_j]$, por $d(P)$ a amplitude máxima destes sub-intervalos, por z_j um ponto compreendido entre x_{j-1} e x_j e finalmente por $\Delta_j \psi$ o acréscimo $\psi(x_j) - \psi(x_{j-1})$, tem-se, [10] pela definição de STIELTJES

$$\int_a^b \varphi\, d\psi = \lim_{d(P)=0} S(P;\varphi,\psi)$$

$$S(P;\varphi,\psi) = \sum_j \varphi(z_j)\,\Delta_j\psi .$$

Ora, pode demonstrar-se o

TEOREMA 5. *Seja* f *uma função limitada no intervalo* $[a,b]$.

A definição de integral de STIELTJES *em ordem a uma função não-decrescente* ψ *coincide com a definição dada anteriormente em ordem à funcional linear não-negativa* $F(\varphi) = \int_a^b \varphi\, d\psi$, $\varphi \in L$. *E inversamente.*

Na verdade, se existe $\lim_{d(P)=0} \Sigma f(z_j)\,\Delta_j\psi$, existem também $\lim_{d(P)=0} \Sigma L_j \Delta_j \psi$ e $\lim_{d(P)=0} \Sigma l_j \Delta_j \psi$, em que $L_j = \sup f$ e $l_j = \inf f$ em $[x_{j-1}, x_j]$. E todos estes limites são iguais.

Por outro lado, como ψ não tem mais do que uma infinidade numerável de pontos de descontinuidade, podemos supor que os x_j, $x_j \neq a, b$, não caem em nenhum desses pontos.

Consequentemente, é possível arranjar $\varphi_1 \leqslant \varphi_2$, tais que $\varphi_1 \leqslant f \leqslant \varphi_2$ e $F(\varphi_2) \leqslant \sum_j L_j \Delta_j \psi + \varepsilon$, $\Sigma l_j \Delta_j \psi - \varepsilon \leqslant F(\varphi_1)$ donde $\underline{\underline{F}}(f) = \overline{\overline{F}}(f) = \lim_{d(P)=0} \Sigma f(z_j)\,\Delta_j \psi$.

Suponhamos agora que $\underline{\underline{F}}(f) = \overline{\overline{F}}(f)$ e sejam φ_1, φ_2 tais que $\varphi_1 \leqslant f \leqslant \varphi_2$, $F(\varphi_2) - F(\varphi_1) < \varepsilon$. Vem $\sum_j \varphi_1(z_j)\,\Delta_j\psi \leqslant \sum_j f(z_j)\,\Delta_j \psi \leqslant \sum_j \varphi_2(z_j)\,\Delta_j \varphi_j$. Mas se $d(P)$ é suficientemente pequeno, pode considerar-se que $\sum_j \varphi_2(z_j)\,\Delta_j \varphi_j$ não difere de $F(\varphi_2)$ nem $\Sigma \varphi_1(z_j)\,\Delta_j \psi$ de $F(\varphi_1)$. Logo, $\lim_{d \to 0} \sum_j f(z_j)\,\Delta_j \psi = F(f)$.

Este resultado [11] dá-nos ainda uma justificação da definição de integral RIEMANN-STIELTJES de uma função $f \in \mathcal{F}$ em ordem a uma funcional linear e não-negativa em L.

Dada agora uma funcional linear e contínua em L, basta decompô-la na diferença [12] $F^+ - F^-$ de duas funcionais lineares e não-negativas, para ficarmos habilitados a definir o integral de RIEMANN-STIELTJES em ordem a F^+ e em ordem a F^-:

Se f *é integrável em ordem a* F^+ *e a* F^-, $F(f) = F^+(f) - F^-(f)$ *define o integral* RIEMANN-STIELTJES *em ordem a uma funcional linear e contínua em* L.

---

(9) *Sur certains systèmes singuliers d'Équations Integrales* — Ann. Ec. Nor. Sup. **28**, Année 1911, p. p. 41, 42, 43. Cf demonstração de H. LEBESGUE in *Leçons sur l'Intégration*, Paris, 1928, 2 éd., p. 265.

(10) Notações de GRAVES in *The Theory of Functions of Real Variables*, New-York, 1946, p. 260.

(11) Quando $\psi = x$, $F(\varphi)$ coincide com o integral de CAUCHY, $\int_a^b \varphi\, dx$, e o prolongamento de $F(\varphi)$ conduz-nos ao integral de RIEMANN.

(12) Resultado conhecido. Ver uma demonstração em *Integral de* LEBESGUE-STIELTJES, já citado.

Finalmente se E se reduz a $I \subset R^1$, $F(\varphi) = \int_a^b \varphi(x)\, d\, v(x)$, sende $v(x)$ uma função de variação total limitada [13], e a definição anterior coincide com a definição clássica de integral em ordem a uma função $v(x)$ de $v.\ t.\ l.$

Em 1923 POLLARD introduziu [14] os integrais — superior e inferior — de RIEMANN-STIELTJES nos termos destas expressões

$$\overline{\int_a^b} f\, d\psi = \inf_P \overline{S}(P; f, \psi)$$

e

$$\underline{\int_a^b} f\, d\psi = \sup_P \underline{S}(P; f, \psi),$$

nas quais

$$\overline{S}(P; f, \psi) = \sum_j \mathcal{L}_j \Delta_j \psi ,$$

$$\underline{S}(P; f, \psi) = \sum_j l_j \Delta_j \psi$$

e

$\mathcal{L}_j$ sup f em $[x_{j-1}, x_j]$, l_j inf f em $[x_{j-1}, x_j]$.

Sujeitando a partição P à condição de nenhum dos pontos x_j, diferentes de a e b, caír num ponto de descontinuidade de ψ, veem os integrais

$$\overline{\overline{\int_a^b}} f\, d\psi = \inf_P \overline{\overline{S}}(P; f, \psi)$$

e

$$\underline{\underline{\int_a^b}} f\, d\psi = \sup_P \underline{\underline{S}}(P; f, \psi).$$

Ora, vamos demonstrar o

TEOREMA 6. $\overline{\overline{\int_a^b}} \mathrm{f\, d}\psi = \overline{\overline{\mathrm{F}}}(\mathrm{f})$, $\underline{\underline{\int_a^b}} \mathrm{f\, d}\psi = \underline{\underline{\mathrm{F}}}(\mathrm{f})$.

Basta observar que: dada uma função φ, tal que $f \leqslant \varphi$, é possível arranjar [15] uma partição admissível que verifique $\overline{\overline{S}} \leqslant F(\varphi) + \varepsilon$, donde $\overline{\overline{\int_a^b}} f\, d\psi \leqslant F(f)$.

Inversamente, dada uma partição admissível, como os seus pontos de divisão são pontos de continuidade de ψ, é possível arranjar φ, tal que $f \leqslant \varphi$ e $F(\varphi) \leqslant \overline{\overline{S}} + \varepsilon$, donde $\overline{\overline{F}}(f) \leqslant \overline{\overline{\int_a^b}} f\, d\varphi$.

Logo, $\overline{\overline{\int_a^b}} f\, d\psi = \overline{\overline{F}}(f)$ e do mesmo modo se mostraria que $\underline{\underline{\int_a^b}} f\, d\psi = \underline{\underline{F}}(f)$.

COROLÁRIO 3. *Tem-se sempre* $\underline{\underline{\int_a^b}} f\, d\psi - \overline{\overline{\int_a^b}} f\, d\psi = \overline{\overline{\int_a^b}} \omega\, d\psi$.

Se ψ é contínua *no interior* de $[a, b]$ os integrais $\overline{\overline{\int_a^b}}$, $\underline{\underline{\int_a^b}}$ coincidem com os de POLLARD e vem a fórmula [16]

$$\overline{\int_a^b} f\, d\psi - \underline{\int_a^b} f\, d\psi = \int_c^b \omega\, d\psi .$$

([13]) Teorema de RIESZ, loc. cit.

([14]) *The Stieltjes Integral and its generalizations* — Quart. Jour. Math., **49**, 1920-1923, p. p. 73-138.

([15]) Note-se que ψ não admite mais do que uma infinidade numerável de pontos de descontinuidade.

([16]) POLLARD, loc. cit. Ver uma demonstração totalmente diferente da do texto, em E. W. HOBSON — *The theory of Functions* Vol. I, Cambridge, 3 ed. 1927, p. 556-557.