ANO XII–N.º 49 **GAZETA DE MATEMÁTICA** OUTUBRO – 1951

REDACTOR PRINCIPAL: *M. Zaluar* • EDITOR: *Gazeta de Matemática, Lda.* • ADMINISTRADOR: *A. Sá da Costa*

REDACTORES ADJUNTOS: *J. Gaspar Teixeira, J. Morgado e J. da Silva Paulo*

Composto na Tipografia Matemática, Lda. — R. Almirante Barroso, 20, r/c — LISBOA-N

A Análise Infinitesimal no Ensino Secundário

por ***José Sebastião e Silva***

A análise infinitesimal é o ramo da matemática que maior êxito tem alcançado nas aplicações às ciências da natureza, e é por isso, também, o mais extenso, o mais rico, o mais fecundo, deixando a perder de vista a álgebra ou a geometria. Não é portanto de estranhar que a sua exclusão completa do programa dos liceus — como acontecia na reforma de 1936 — viesse a produzir graves perturbações no ensino global das matérias científicas. Sem ter adquirido a mínima familiaridade com os conceitos de infinitésimo e de derivada, o aluno, ao entrar na universidade, passava bruscamente a ter de assimilar o método infinitesimal em todas as minúcias e com os requintes de subtilização lógica que cem anos de crítica exaustiva lhe infligiram, quási desfigurando a sua primária feição intuitiva. Contemporâneamente, o mesmo aluno era forçado a aplicar o referido método em cursos volumosos de física e de química, em que se fala de integrais, de gradientes e de outras finuras — quando ele ainda mal se entendia com as derivadas e estava bem longe de saber o que é um integral.

O resultado era de prever. Queixavam-se os alunos de que lhes era exigido muito mais do que as suas possibilidades lhes permitiam dar — e mal sabiam os alunos até que ponto estava com eles a razão. Queixavam-se os mestres de que os alunos vinham pèssimamente preparados do liceu — e também os mestres, vamos lá, tinham a sua razão.

Evidentemente, a solução não estava em baixar o nível do ensino universitário. A solução estava simplesmente em regressar ao estado de coisas anterior a 1936, com os eventuais ajustamentos requeridos pela evolução da ciência e dos métodos de ensino. E foi isto afinal o que, numa bora feliz, se decidiu fazer na reforma de 1948. Estou certo de que todos os que se interessam verdadeiramente pelo ensino das ciências em Portugal hão-de ter sentido, nesse momento, íntimo regosijo, por verem que o bom-senso acabou por triunfar.

Não faltou depois, e não falta (a história de «O velho, o rapaz e o burro»...) quem protestasse contra a enormidade que é apresentar a alunos do liceu conceitos tão delicados como o de infinitésimo e o de derivada. Que se trata de conceitos delicados, ninguém o pode contestar; mas quanto a serem inacessíveis a rapazes de 15 ou 16 anos, temos de falar...

Não, senhores de pouca fé! As grandes ideias criadoras são sempre assim: o seu efeito sobre a mente juvenil é comparável ao do ar forte da montanha, que primeiro entontece, mas depois estimula e avigora. Dá-se o choque inicial — e logo depois começa a lenta, subterrânea germinação de ideias que só o tempo e a sã pedagogia podem levar a bom termo. Há que semear com antecedência as intuições primeiras para que a colheita se possa fazer no momento oportuno. O aluno que compreende fàcilmente é aquele que já meditou sobre o assunto, e para quem os novos ensinamentos são uma resposta luminosa a interrogações que ficaram latentes no espírito. Quando se não faz a sementeira — o que se pode colher? Em pedagogia, como na ciência, é por aproximações sucessivas que se deve proceder, imitando, de certo modo, a evolução histórica da ciência. É preciso que o aluno comece por compreender em primeira aproximação...

*
* *

Reproduzir exactamente a evolução histórica é impossível — já M. de La Palisse era capaz de o dizer. Os criadores do cálculo infinitesimal estão bem longe do rigor lógico exigido nos nossos tempos de crítica inexorável. Veja-se a «Teoria das funções analíticas» de Lagrange: as suas demonstrações fazem sorrir pela ingenuidade dos processos. Percorrer no ensino os mesmos passos vacilantes seria simplesmente uma tolice.

Mas a matemática não é só lógica; a matemática é um produto humano, intimamente ligado às necessidades do homem, à sua existência sobre este planeta. Ensinar matemática sem mostrar a *origem* e a *finalidade* dos conceitos é como falar de cores a um daltónico: é construir no vazio. Especulações matemáticas que, *pelo menos de início*, não estejam sòlidamente ancoradas em intuições, resultam inoperantes, não falam ao espírito, não o iluminam.

O ideal seria conciliar o máximo de intuitividade com o máximo de racionalidade. E por isso mesmo que não há uma fórmula para efectuar esta conciliação é que a pedagogia é mais uma arte da que uma ciência. E é por isso também que se torna tão melindroso escrever livros de matemática para os liceus. Entre nós, agora então, duplamente difícil, por causa daquele interregno de 12 anos, que afastou os professores dos assuntos da análise.

Este afastamento já se traduziu de maneira eloquente nas deficiências do compêndio de álgebra que foi adoptado para os 6.° e 7.° anos dos liceus e que tanto tem dado que falar. Ao lê-lo, fica-se com a impressão de que o autor procurou refazer a sua cultura matemática no prazo de que dispunha para apresentar o livro a concurso — e é muito provável que ele, autor, já se tenha apercebido dos inconvenientes da sua precipitação.

Não quero com isto insinuar que não houvesse entre os actuais professores quem pudesse fazer melhor. O que me parece incontestável é a necessidade de organizar reuniões pedagógicas de professores do ensino secundário e do ensino superior, em colóquios, conferências, etc., à semelhança do que se faz lá fora. Seria oportuno rever o plano que, neste sentido, foi apresentado há quatro anos ao Instituto para a Alta Cultura pelo Professor Hugo Ribeiro, e de que já se tinha falado anteriormente na Gazeta de Matemática (n.° 26).

*
* *

A análise infinitesimal assenta essencialmente sobre os conceitos de função e de limite. E é sobretudo nesta base que reside a delicadeza do problema pedagógico de que nos estamos ocupando. Felizmente, têm-se feito grandes progressos no sentido da clarificação dos fundamentos da análise. E é hoje mais fácil do que outrora aquela conciliação da lógica com a intuição a que já nos referimos. Mas todo o cuidado é pouco para não cair em qualquer dos extremos...

O que desde logo se observa, na teoria dos limites, é que a linguagem se torna mais intuitiva, quando se fala de «limite duma variável» em vez de «limite duma sucessão» ou de «limite duma função». Mas é preciso ter presente que *não faz sentido falar de limite duma variável independente;* na realidade, é de limites de funções que se trata sempre: — funções de variável inteira (sucessões) ou funções de variável real.

Consideremos uma *variável real* x_n *função da variável natural* n: a cada valor de n corresponde um determinado valor de x_n; assim, a 1 corresponde x_1, a 2 corresponde x_2, etc. Os valores de x_n dispostos por ordem crescente dos índices formam uma *sucessão,*

$$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots,$$

de que a variável x_n se diz *o termo geral.*

Matemàticamente, nenhuma distinção pode existir entre «variável x_n» e «sucessão de termo geral x_n», porquanto as duas expressões resultam equivalentes em qualquer proposição da teoria. Mas a verdade é que, psicològicamente, os dois conceitos se distinguem: o primeiro parece ligado à ideia de *tempo,* enquanto o segundo parece ligado à ideia de *espaço* (A x_n poderiamos ainda chamar «variável ordenada», se esta expressão não fosse usada hoje na literatura matemática com um significado muito mais amplo).

Posto isto, a teoria elementar dos limites para as variáveis em questão (isto é, para as sucessões) pode desenvolver-se com uma grande simplicidade. E há toda a vantagem, do ponto de vista pedagógico, em que, ao conceito de limite, se anteponha o conceito de infinitésimo. Cumpre-nos prestar aqui justiça ao programa actual, que coloca o estudo dos infinitésimos antes do estudo dos limites — o que tem provocado críticas injustas da parte de vários professores. O conceito de infinitésimo é formalmente mais simples que o conceito de limite: «Diz-se que a variável x_n é um infinitésimo, quando, dado um número positivo δ, por mais pequeno que este seja, existe sempre uma ordem n_1, tal que se tenha $|x_n| < \delta$, para todos os valores de n superiores a n_1». (A ordem n_1 depende em geral de δ, sendo tanto maior quanto menor for δ). Claro está que, na prática do ensino, esta definição deve ser psicològicamente preparada com exemplos graduados; parece-me até que conviria começar por definir as noções de «variável limitada», de «variável crescente» e de «infinitamente grande», comparando-as entre si.

A definição de limite duma sucessão pode ser dada imediatamente a seguir àquela de infinitésimo: «Diz-se que a variável x_n tem por limite o número a quando $x_n - a$ é um infinitésimo». Nenhum inconveniente em formular a definição directa. É claro que se impõe, nesta altura, recorrer a exemplos concretos fornecidos pela geometria, recordando sumàriamente o uso que desta noção já tinha sido feito em anos anteriores, no cálculo de áreas e volumes (por via intuitiva).

Em seguida, podem estabelecer-se os teoremas relativos à soma de dois ou mais infinitésimos e ao produto dum infinitésimo por uma variável limitada (com os corolários relativos ao produto duma constante por um infinitésimo e ao produto de dois infinitésimos). As demonstrações podem ser feitas, ao mesmo tempo com extrema simplicidade e rigor absoluto.

Após este prévio estudo dos infinitésimos, em que a dificuldade das demonstrações é reduzida a um mínimo, tornando quási insensível a subida — a álgebra dos limites («limite da soma», «limite do produto», «limite do cociente») pode desenvolver-se de maneira bem mais simples e natural do que é uso fazer-se. E esta primeira parte do estudo dos limites deveria terminar com uma análise detalhada dos casos que se podem apresentar, no produto dum infinitamente grande por um infinitésimo, no cociente de dois infinitésimos, etc. — pretexto natural para um primeiro contacto com o símbolo ∞ e com os símbolos de indeterminação.

*
* *

A seguir aos limites de sucessões — os limites de funções (de variável real). E logo aqui surge uma questão delicadíssima. Como se sabe, o conceito de «limite duma função $f(x)$ quando x tende para um número a» pode ser definido pelo menos de duas maneiras diversas: ou partindo da noção já definida de limite duma sucessão (orientação de Heine) ou directamente, com o conhecido jogo dos δ e dos ε (orientação de Cauchy).

A primeira definição é sem dúvida a mais natural. O que se pretende afinal dizer, afirmando que $f(x)$ *tende para b quando x tende para a?* Isto apenas: que quando a variável x passa por uma *sucessão qualquer* de valores tendente para a, a função $f(x)$ passa necessàriamente por uma sucessão de valores tendente para b. Note-se que a sucessão de valores de x considerada pode ser *qualquer,* contanto que tenda para a: o que se pretende afirmar é que $f(x)$ tende para b, *qualquer que seja o modo por que x tende para a*. Ulteriormente, para comodidade da exposição, impõe-se ainda aos valores de x a condição de serem diferentes de a. E assim a definição surge, na sua forma definitiva:

«Diz-se que $f(x)$ *tende para b quando x tende para a*, e escreve-se:

$$\lim_{x\to a} f(x) = b\,,$$

se, a **toda** a sucessão $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ de valores de x (distintos de a) tendente para a, corresponde uma sucessão $f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n), \cdots$ de valores de $f(x)$, tendente para b».

A definição é, como se vê, imediatamente apreensível. Que necessidade há então de utilizar depois uma outra, mais artificiosa, menos intuitiva[1] — com aquele jogo dos δ e dos ε, que tanto desnorteia os rapazes? Só pelo prazer bizarro de dar uma definição pura, em que não intervem o conceito de limite duma sucessão? Não, a razão não é essa.

É que, para demonstrar certos teoremas fundamentais da análise — teorema de Weierstrass, teorema da continuidade uniforme, etc. — a primeira definição obriga a utilizar o axioma de Zermelo, esse fantasma inquietante diante do qual tantos matemáticos escrupulosos empalidecem e recuam.

Mas, senhores, não há aqui motivo para inquietações! O fantasma não aparece no liceu, pela simples razão de que tais teoremas não fazem, nem devem fazer, parte do programa. Há tempo depois, na universidade, para mostrar que as duas definições são equivalentes, *desde que se admita o axioma de Zermelo* — óptima ocasião para dirigir a curiosidade dos alunos sobre uma das mais perturbantes questões de filosofia matemática, em que, inesperadamente, se rasga uma janela sobre o infinito.

As vantagens da primeira definição (no estilo de Heine) não se reduzem à espontaneidade da definição em si: concretizam-se depois nas demonstrações dos teoremas relativos ao «limite da soma», «limite do produto», etc. — já que, por esta via, esses teoremas aparecem como consequências *imediatas* das correspondentes proposições relativas a sucessões. Mais ainda: *a referida definição aplica-se perfeitamente ao caso em que uma das constantes a, b (ou ambas) é um dos símbolos* ∞, $+\infty$ ou $-\infty$. Ora tal não acontece com a definição de Cauchy, que só é válida no caso de a, b serem finitos. Quando esta hipótese não é introduzida, há que formular uma definição para cada uma das 16 modalidades possíveis e fazer as demonstrações dos respectivos teoremas! É certo que bastava definir directamente duas dessas modalidades e reduzir as restantes às primeiras mediante transformações simples. Mas onde está então a unidade, a nitidez doutrinal tão cara aos matemáticos?

Não há portanto que hesitar, no curso dos liceus.

---

[1] Segundo o estilo de Cauchy, a definição pode ser assim formulada: «Diz-se que $f(x)$ tem por limite b quando x tende para a, se, a todo o númereo $\varepsilon>0$, se pode associar um número $\delta>0$, de modo que se tenha $|f(x)-b|<\varepsilon$, sempre que $|x-a|<\delta$». A definição torna-se mais intuitiva quando se usa a linguagem das *visinhanças* (intervalos centrados em a e em b).

A primeira definição impõe-se categòricamente, uma vez que a segunda, como vimos, corresponde a escrúpulos de lógica que não têm qualquer sentido nesta fase do ensino.

* * *

A *origem* do conceito de limite conhece-a já o aluno, através dos exemplos da geometria. Mas a vantagem, a *finalidade*, daquela delicada rede de definições e de teoremas não lhe surgirá tão claramente ao espírito — se logo em seguida não se passar ao estudo das derivadas, única aplicação que se faz da teoria dos limites no ensino secundário[1]. De contrário, essa construção lógica, assim suspensa a meio do 6.º ano, há-de parecer-lhe um bizantinismo, uma daquelas caturrices que se sofrem, mas não se compreendem. Eu estou certo de que o autor ou os autores do programa já se convenceram de que o capítulo das derivadas não foi colocado no lugar conveniente. De resto, o estudo das derivadas deve ser feito em estreita conexão com o dos movimentos, na física.

Introduzir o conceito matemático de derivada sem ter partido do conceito mecânico de velocidade, e sem depois apresentar as múltiplas concretizações da mesma ideia na geometria e na física — é um erro grave de pedagogia.[2] Com tal orientação abstracta, o aluno ficará perplexo e frio, como diante dum corpo sem alma; ao passo que tudo se ilumina, e o espírito se povoa de belas ressonâncias criadoras, apenas se estabelece o contacto com o mundo externo.

Todos os que, desde os bancos do liceu, se têm interessado pela matemática, hão-de recordar-se do prazer intelectual que se experimenta, por exemplo, ao conhecer a maneira elegante por que, da lei dum movimento, se consegue deduzir a velocidade e a aceleração em função do tempo, e portanto a força que determina o movimento. Qualquer coisa de novo, de potente, de exaltante! É a aragem vigorosa do racionalismo científico que começa a percutir o nosso espírito.

* * *

Porque não introduzir no 7.º ano a noção de integral? Pois não é verdade que nos cursos gerais de física e de química se faz uso frequente desta noção?

Não se tratava, evidentemente, de fazer uma *teoria do integral segundo Riemann*... Tratava-se apenas de criar uma intuição, e de logificar essa intuição na medida em que tal fosse possível e oportuno.

Reconstituir a função a partir da derivada — a equação dos espaços a partir da equação das velocidades, o movimento a partir da força — pode haver problema mais sugestivo e que mais prenda a atenção do aluno?

A solução está naturalmente indicada; inesperadamente, o problema surge como equivalente ao do cálculo das áreas — e eis finalmente a noção de integral! Alguns casos de integração imediata, as primeiras regras formais de integração, podiam e deviam ser ensinadas nesta altura.

Haveria certamente que suprimir partes da matéria que tivessem menor interesse. Estou a lembrar-me da equação de Diofanto, que se tem venerado como um tabú através dos tempos. Todos os anos, pacientemente, os alunos vão aplicando aquele processo maquinal que permite obter *soluções inteiras e positivas*. Com que finalidade, pode saber-se? Para resolver problemas de Almanach, cuja subtileza está em atender a que não existem fracções de homem ou números negativos de cavalos?

Seja-me permitida uma última observação a respeito do programa (a cujos méritos não recuso homenagem). No 6.º ano está indicada, como abertura, uma teoria sintética dos números reais, construída com largo apêlo à intuição. Sem isso, tudo o resto está condenado a cair pela base — e não são os frágeis alicerces lançados em anos anteriores que viriam salvar a situação.

(1) É claro que consideramos incluídos na teoria dos limites o estudo da continuidade e o das indeterminações.

(2) Continuo a referir-me à fase de iniciação.

A Função de Forças e a Equação de Ampère

por José Gaspar Teixeira

O conceito de *função de forças* é dos mais fecundos em Física; no entanto há certos fenómenos para cujo esclarecimento não é, regra geral, empregado tal conceito.

Whittaker no seu «A Treatise on the Analytical Dynamics» define campo de forças conservativas do modo seguinte:[1] «Certain fields of force have the property that the work done by the forces of the field in a displacement of a dynamic system from one configuration to another depends only on the

(1) cf. pág. 38.