A primeira definição impõe-se categòricamente, uma vez que a segunda, como vimos, corresponde a escrúpulos de lógica que não têm qualquer sentido nesta fase do ensino.

* * *

A *origem* do conceito de limite conhece-a já o aluno, através dos exemplos da geometria. Mas a vantagem, a *finalidade*, daquela delicada rede de definições e de teoremas não lhe surgirá tão claramente ao espírito — se logo em seguida não se passar ao estudo das derivadas, única aplicação que se faz da teoria dos limites no ensino secundário[1]. De contrário, essa construção lógica, assim suspensa a meio do 6.º ano, há-de parecer-lhe um bizantinismo, uma daquelas caturrices que se sofrem, mas não se compreendem. Eu estou certo de que o autor ou os autores do programa já se convenceram de que o capítulo das derivadas não foi colocado no lugar conveniente. De resto, o estudo das derivadas deve ser feito em estreita conexão com o dos movimentos, na física.

Introduzir o conceito matemático de derivada sem ter partido do conceito mecânico de velocidade, e sem depois apresentar as múltiplas concretizações da mesma ideia na geometria e na física — é um erro grave de pedagogia.[2] Com tal orientação abstracta, o aluno ficará perplexo e frio, como diante dum corpo sem alma; ao passo que tudo se ilumina, e o espírito se povoa de belas ressonâncias criadoras, apenas se estabelece o contacto com o mundo externo.

Todos os que, desde os bancos do liceu, se têm interessado pela matemática, hão-de recordar-se do prazer intelectual que se experimenta, por exemplo, ao conhecer a maneira elegante por que, da lei dum movimento, se consegue deduzir a velocidade e a aceleração em função do tempo, e portanto a força que determina o movimento. Qualquer coisa de novo, de potente, de exaltante! É a aragem vigorosa do racionalismo científico que começa a percutir o nosso espírito.

* * *

Porque não introduzir no 7.º ano a noção de integral? Pois não é verdade que nos cursos gerais de física e de química se faz uso frequente desta noção?

Não se tratava, evidentemente, de fazer uma *teoria do integral segundo Riemann*... Tratava-se apenas de criar uma intuição, e de logificar essa intuição na medida em que tal fosse possível e oportuno.

Reconstituir a função a partir da derivada — a equação dos espaços a partir da equação das velocidades, o movimento a partir da força — pode haver problema mais sugestivo e que mais prenda a atenção do aluno?

A solução está naturalmente indicada; inesperadamente, o problema surge como equivalente ao do cálculo das áreas — e eis finalmente a noção de integral! Alguns casos de integração imediata, as primeiras regras formais de integração, podiam e deviam ser ensinadas nesta altura.

Haveria certamente que suprimir partes da matéria que tivessem menor interesse. Estou a lembrar-me da equação de Diofanto, que se tem venerado como um tabú através dos tempos. Todos os anos, pacientemente, os alunos vão aplicando aquele processo maquinal que permite obter *soluções inteiras e positivas*. Com que finalidade, pode saber-se? Para resolver problemas de Almanach, cuja subtileza está em atender a que não existem fracções de homem ou números negativos de cavalos?

Seja-me permitida uma última observação a respeito do programa (a cujos méritos não recuso homenagem). No 6.º ano está indicada, como abertura, uma teoria sintética dos números reais, construída com largo apêlo à intuição. Sem isso, tudo o resto está condenado a cair pela base — e não são os frágeis alicerces lançados em anos anteriores que viriam salvar a situação.

(1) É claro que consideramos incluídos na teoria dos limites o estudo da continuidade e o das indeterminações.

(2) Continuo a referir-me à fase de iniciação.

A Função de Forças e a Equação de Ampère

por José Gaspar Teixeira

O conceito de *função de forças* é dos mais fecundos em Física; no entanto há certos fenómenos para cujo esclarecimento não é, regra geral, empregado tal conceito.

Whittaker no seu «A Treatise on the Analytical Dynamics» define campo de forças conservativas do modo seguinte:[1] «Certain fields of force have the property that the work done by the forces of the field in a displacement of a dynamic system from one configuration to another depends only on the

(1) cf. pág. 38.

initial and final configuration of the system...».

Isto significa, como se sabe, a existência duma *função de forças*, $U(x,y,z)$, de que se obtêm, por derivações parciais, as componentes X, Y, Z da força do campo:

$$X=\frac{\partial U}{\partial x} \qquad Y=\frac{\partial U}{\partial y} \qquad Z=\frac{\partial U}{\partial z}$$

ou

$$F=\operatorname{grad} U.$$

Evidentemente, se a função $U(x,y,z)$ é uniforme, finita, contínua e derivável até a ordem segunda, a equação

$U(x,y,z)=c$ (c — parâmetro arbitrário)

representa uma família de superfícies — *superfícies equipotenciais* — regulares, contínuas e sem pontos comuns.

O trabalho da força do campo ao longo dum arco de trajectória

$$\tau=\int_{P_0}^{P} F/dP=\int_{P_0}^{P}\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy+\frac{\partial U}{\partial z}dz=$$
$$=\int_{P_0}^{P} dU=\left[U\right]_{P_0}^{P}$$

depende apenas dos extremos P_0 e P do arco dessa trajectória; e o seu valor não se altera quando os pontos P_0 e P percorrem arbitràriamente as respectivas superfícies equipotenciais.

Por outros termos, o trabalho ao longo de uma trajectória fechada é nulo.

Se a função $U(x,y,z)$ não é, porém, uniforme, [1] duas quaisquer das suas determinações U_1 e U_2 diferem, no mesmo ponto P, apenas por uma constante aditiva; para calcular o trabalho da força relativo a um deslocamento P_0P, basta tomar uma determinação arbitrária em P_0 e seguir essa determinação com continuidade no deslocamento até P. Em particular, quando P volta ao ponto de partida, P_0, o trabalho é nulo, ou não, consoante se volte, ou não, a P_0 com a mesma determinação.

Por outros termos, o trabalho ao longo de uma trajectória P_0P não se altera, quando a trajectória, com os extremos P_0 e P fixos, sofre uma deformação contínua sem passar por pontos de descontinuidade das derivadas parciais da função de forças,

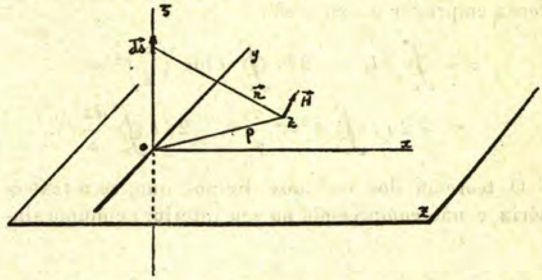
$$\frac{\partial U}{\partial x},\ \frac{\partial U}{\partial y},\ \frac{\partial U}{\partial z}.$$

São tudo considerações vulgares dos vulgares tratados de Mecânica Racional.

(1) *Cours de Mécanique* — Painlevé — pág. 176.

Não encontramos, porém, nos mesmos tratados um exemplo simples que mostre ser este um caso fundamental e corrente em Electromagnetismo; nem nos respectivos tratados de Electricidade referência à resolução mecânica do mesmo problema, notável pela sua clareza.

Consideremos o plano da variável complexa, $z=x+iy$, e uma recta $o\zeta$ normal ao plano, na origem $z=o$.



Suponhamos que sobre $o\zeta$ se passa um fenómeno — deslocamento de cargas eléctricas, constituindo uma corrente eléctrica, estacionária, de intensidade I.

A lei de Biot-Savart dá-nos a expressão do vector H — *campo magnético* — produzido por uma corrente [1] eléctrica: se for $\vec{ds}$ um elemento da corrente potenciante e $\vec{r}$ o vector do ponto potenciado, será

$$\vec{H}=I\int\frac{\vec{ds}\wedge\vec{r}}{r^3} \quad ^{(1)}$$

o que dá, para o nosso exemplo

$$|H|=\frac{2I}{\rho}{}^{(2)}, \qquad (\rho=|z|)$$

função descontínua no ponto $z=0$.

Este facto mostra-nos que o campo $\vec{H}$ deriva duma função de forças que, no plano z toma a forma

$$U=-Ii\log\frac{z}{\bar{z}}.$$

Ora esta função é multiforme e apresenta na origem um ponto crítico de ramificação: as determinações, em número infinito, encadeiam-se com continuidade umas nas outras, e constituem, em torno da origem, uma superfície de Riemann com uma infinidade de folhetos. As componentes da força [3] do campo (no plano z) são

$$X=\frac{\partial U}{\partial x}=-I\frac{2y}{x^2+y^2} \qquad Y=\frac{\partial U}{\partial y}=I\frac{2x}{x^2+y^2};$$

(1) No caso presente, linear.

(2) No sistema electromagnético c. g. s.

(3) Trata-se pròpriamente duma *excitação* do campo magnético e não duma *força*.

o trabalho ao longo dum percurso $P_0 P$,

$$\tau = 2 \int_{P_0 P} I \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2},$$

ou, em coordenados polares

$$\tau = 2I \int_{P_0 P} d\theta \qquad z = \rho e^{i\theta}.$$

Se a trajectória, porém, é fechada, preferível se torna empregar a expressão

$$\tau = \oint_c dU = -2Ii \oint_c d \log \left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= -2Ii \oint_c d \log \frac{z}{\rho} = -2Ii \oint_c \frac{dz}{z}.$$

O teorema dos resíduos diz-nos que, se a trajectória c não compreende no seu interior nenhuma singularidade da função integranda, $\frac{1}{z}$, o trabalho total é nulo.

Se, porém, compreende a origem — única singularidade — como

$$\oint_c \frac{dz}{z} = 2\pi i \Sigma R = 2\pi i$$

será

$$\tau = -2Ii \cdot 2\pi i$$
$$= 4\pi I$$

expressão conhecida pelo nome de Equação de Ampère.

Não conhecíamos a expressão analítica da função de forças correspondente ao fenómeno.

Por outro lado, a semelhança da equação de Ampère com a expressão corrente do teorema dos resíduos sugere o emprego da teoria das funções analíticas como processo expedito de dedução da mesma Equação.

Um Teorema da Metamatemática

por Maria Teodora Alves

Dado o teorema

$$H \supset T \tag{1},$$

o teorema

$$T' \supset H' \tag{2},$$

em que T' e H' são respectivamente as negações de T e de H, chama-se *teorema contrapositivo do teorema* (1). A equivalência entre estes dois teoremas encontra-se em qualquer tratado de Lógica Moderna.

Em geral, a hipótese e a tese de um teorema são respectivamente decomponíveis em hipóteses e teses parciais. Haverá, nesse caso, um só teorema contrapositivo ou, à semelhança dos teoremas recíprocos, em caso análogo, haverá mais de um teorema contrapositivo? Como obtê-los? Qual será a sua lei de formação?

Por aplicação do método dos quadros lógicos está demonstrado em «Método de redução ao absurdo, aspecto lógico e pedagógico» à pág. 15, que, dado o teorema

$$(H_1 \cap H_2) \supset T \tag{3},$$

de hipótese decomponível em H_1 e H_2 e de tese indecomponível, os teoremas

$$(H_1 \cap T') \supset H'_2 \tag{4}$$
$$(H_2 \cap T') \supset H'_1 \tag{5}$$

(H'_1, H'_2 e T' são as negações de H_1, H_2 e T) são equivalentes entre si e ao teorema proposto (3).

Como vemos estes teoremas têm uma lei de formatão análoga à formação do teorema (2).

A equivalência dos teoremas (3), (4) e (5) permitirá, dado um teorema do tipo (3), formar os outros dois teoremas e escolher aquele que mais cómoda ou mais elegante demonstração tiver. Uma vez demonstrado o teorema escolhido os outros dois ficam implícitamente demonstrados.

Na bibliografia indicada em «Método de redução ao absurdo» e em muita outra que não foi indicada mas que consultàmos, não há referência às conclusões que acabamos de citar. Ignoramos, portanto, se essas conclusões — embora de importância insignificante — têm qualquer originalidade.

A crítica oficial, a que a nossa dissertação foi submetida, apreciou-a entrincheirando-se no reduto da gramática e do vocabulário, e nada informou sobre os assuntos nela versados e, muito menos, naquele a que nos estamos a referir.

Neste artigo vamos apresentar a mesma questão — teoremas contrapositivos de um dado teorema do tipo (3) — tratando-a pela Algebra de Boole e vamos generalizar as conclusões.

(1) Dissertação apesentada, pela autora deste artigo, em repetição de exame de estado, para o magistério do ensino liceal.