o trabalho ao longo dum percurso $P_0 P$,

$$\tau = 2\int_{P_0 P} I\,\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2},$$

ou, em coordenados polares

$$\tau = 2I\int_{P_0 P} d\theta \qquad z = \rho\, e^{i\theta}\,.$$

Se a trajectória, porém, é fechada, preferível se torna empregar a expressão

$$\tau = \oint_c dU = -2Ii \oint_c d\log\left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= -2Ii\oint_c d\log\frac{z}{\rho} = -2Ii\oint_c \frac{dz}{z}.$$

O teorema dos resíduos diz-nos que, se a trajectória c não compreende no seu interior nenhuma singularidade da função integranda, $\frac{1}{z}$, o trabalho total é nulo.

Se, porém, compreende a origem — única singularidade — como

$$\oint_c \frac{dz}{z} = 2\pi i\,\Sigma R = 2\pi i$$

será

$$\tau = -2Ii\cdot 2\pi i$$
$$= 4\pi I$$

expressão conhecida pelo nome de Equação de Ampère.

Não conhecíamos a expressão analítica da função de forças correspondente ao fenómeno.

Por outro lado, a semelhança da equação de Ampère com a expressão corrente do teorema dos resíduos sugere o emprego da teoria das funções analíticas como processo expedito de dedução da mesma Equação.

Um Teorema da Metamatemática

por Maria Teodora Alves

Dado o teorema

$$H \supset T \qquad (1),$$

o teorema

$$T' \supset H' \qquad (2),$$

em que T' e H' são respectivamente as negações de T e de H, chama-se *teorema contrapositivo do teorema* [1]. A equivalência entre estes dois teoremas encontra-se em qualquer tratado de Lógica Moderna.

Em geral, a hipótese e a tese de um teorema são respectivamente decomponíveis em hipóteses e teses parciais. Haverá, nesse caso, um só teorema contrapositivo ou, à semelhança dos teoremas recíprocos, em caso análogo, haverá mais de um teorema contrapositivo? Como obtê-los? Qual será a sua lei de formação?

Por aplicação do método dos quadros lógicos está demonstrado em «Método de redução ao absurdo, aspecto lógico e pedagógico» à pág. 15, que, dado o teorema

$$(H_1 \cap H_2) \supset T \qquad (3),$$

de hipótese decomponível em H_1 e H_2 e de tese indecomponível, os teoremas

$$(H_1 \cap T') \supset H'_2 \qquad (4)$$
$$(H_2 \cap T') \supset H'_1 \qquad (5)$$

(H'_1, H'_2 e T' são as negações de H_1, H_2 e T) são equivalentes entre si e ao teorema proposto (3).

Como vemos estes teoremas têm uma lei de formatão análoga à formação do teorema (2).

A equivalência dos teoremas (3), (4) e (5) permitirá, dado um teorema do tipo (3), formar os outros dois teoremas e escolher aquele que mais cómoda ou mais elegante demonstração tiver. Uma vez demonstrado o teorema escolhido os outros dois ficam implícitamente demonstrados.

Na bibliografia indicada em «Método de redução ao absurdo» e em muita outra que não foi indicada mas que consultàmos, não há referência às conclusões que acabamos de citar. Ignoramos, portanto, se essas conclusões — embora de importância insignificante — têm qualquer originalidade.

A crítica oficial, a que a nossa dissertação foi submetida, apreciou-a entrincheirando-se no reduto da gramática e do vocabulário, e nada informou sobre os assuntos nela versados e, muito menos, naquele a que nos estamos a referir.

Neste artigo vamos apresentar a mesma questão — teoremas contrapositivos de um dado teorema do tipo (3) — tratando-a pela Algebra de Boole e vamos generalizar as conclusões.

(1) Dissertação apresentada, pela autora deste artigo, em repetição de exame de estado, para o magistério do ensino liceal.

Demonstraremos, por exemplo, a *equivalência do teorema* (3) *ao teorema.* (4).

Com efeito,

$$(H_1 \cap H_2) \supset T \equiv (H_1 \cap H_2)' \cup T$$

(definição de $\supset$)

$$\equiv (H'_1 \cup H'_2) \cup T$$

(lei da dualização)

$$\equiv (H'_1 \cup T) \cup H'_2$$

(propriedade comutativa e associativa)

$$\equiv (H_1 \cap T')' \cup H'_2$$

(lei da dualização e da involução)

$$\equiv (H_1 \cap T') \supset H'_2$$

e, finalmente, (definição de $\supset$).

Anàlogamente demonstraríamos a equivalência entre os teoremas (3) e (5).

Generalização.

Se o teorema proposto fosse do tipo

$$(H_1 \cap H_2 \cap \cdots H_n) \supset T \qquad (6)$$

poder-se-iam obter, por uma lei análoga, os teoremas contrapositivos seguintes em número de n:

$$(H_1 \cap H_2 \cap \cdots \cap H_{n-1} \cap T') \supset H'_n$$

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

$$(H_2 \cap \cdots \cap H_n \cap T') \supset H'_1$$

A demonstração da equivalência entre estes teoremas entre si e ao teorema proposto, far-se-ia anàlogamente à demonstração anterior, para a caso de $n=2$.

Demonstremos a *equivalência entre os teoremas* $(H_1 \cap H_2 \cap \cdots \cap H_n) \supset T$ e $(H_2 \cap \cdots \cap T') \supset H_1'$.

Temos

$$\begin{aligned}(H_1 \cap H_2 \cap \cdots \cap H_n) \supset T &\equiv (H_1 \cap \cdots \cap H_n)' \cup T \\ &\equiv H'_1 \cup H'_2 \cup \cdots \cup H'_n \cup T \\ &\equiv (H'_2 \cup \cdots \cup H'_n \cup T) \cup H'_1 \\ &\equiv (H_2 \cap \cdots \cap H_n \cap T')' \cup H'_1 \\ &\equiv (H_2 \cap \cdots \cap H_n \cap T') \supset H'_1 .\end{aligned}$$

Anàlogamente demonstraríamos a equivalência entre o teorema (6) e os restantes teoremas que dele deduzimos e também a equivalência desses teoremas entre si.

Podemos pois, formular o seguinte teorema de teoremas:

Se num terema, de hipótese decomponível em hipóseses parciais e de tese indecomponível, permutarmos a negação da tese sucessivamente com a negação de cada uma das hipóteses parciais, obteremos teoremas equivalentes entre si e ao teorema proposto.

Este teorema de teoremas é do domínio da Metamatemática e poderá ter aplicação na matemática elementar ou superior, em especial, na Geometria Analítica.

Indicamos agora algumas aplicações:

Geometria

TEOREMA: *Se uma recta, conduzida pelo centro de uma circunferência,* (H_1), *divide ao meio uma corda,* (H_2), *essa recta é perpendicular à corda* (T).

Tipo: $(H_1 \cap H_2) \supset T$

1.º Contrapositivo:

Se uma recta, conduzida pelo centro de uma circunferência, (H_1), não for perpendicular a uma corda da circunferência (T'), essa recta não divide essa corda ao meio (H'_2).

Tipo: $(H_1 \cap T') \supset H'_2$

2.º Contrapositivo:

Se uma recta divide uma corda de uma circunferência ao meio (H_2) e se não for perpendicular à corda (T'), essa recta não passa pelo centro da circunferência (H'_1).

Tipo: $(H_2 \cap T') \supset H'_1$

O teorema proposto e os dois teoremas contrapositivos dele deduzidos são, pelo estudo anteriormente feito, equivalentes entre si.

Demonstrado que um deles é verdadeiro os outros dois também são verdadeiros.

Aritmética

TEOREMA: *Se* N *for divisível por* a *e por* b, (H_1), *e se* m. d. c. (a, b) = 1, (H_2), N *é divisível por* a b.

1.º Contrapositivo:

Se N for divisível por a e por b (H_1) e se N não for divisível por $a\,b$ (T'), então $m.\,d.\,c.\,(a,b) \neq 1$, (H'_2).

2.º Contrapositivo:

Se o *m. d. c.* $(a, b) = 1$ (H_2) e N não for divisível por $a b$ (T'), então N não é divisível por a e por b (H'_1), (simultâneamente).

Demonstrado um qualquer destes 3 teoremas, os outros dois são verdadeiros.

Álgebra

Teorema: *Dado* $f(x)$ *que admita derivada em* x_1, *se* $f'(x_1)=0, (H_1)$, *e* $f''(x_1)<0, (H_2)$, $f(x)$ *tem um máximo em* $x_1\,(T)$.

1.º teorema contrapositivo:

Dado $f(x$ que admita derivada em x_1, se $f'(x_1)=0$, (H_1), e se $f(x)$ não tem um máximo em x_1, (T'), então $f''(x_1)\geqslant 0$ (não é menor do que zero), (H'_2).

2.º teorema contrapositivo:

Dado $f(x)$ que admita derivada em x_1, se $f''(x_1)<0$, (H_2), e se $f(x)$ não tem um máximo em x_1, (T'), então $f'(x_1)\neq 0$ (não é igual a zero), (H'_1).

Estes três teoremas são equivalentes e a verdade de um deles arrasta necessàriamente a verdade dos outros dois.

PEDAGOGIA

O PROGRAMA DE MATEMÁTICA DA ACTUAL REFORMA DO ENSINO LICEAL

II

por ***Maria Teodora Alves***

As considerações que farei neste artigo referem-se ao 2.º ciclo liceal e, em especial, ao programa de Matemática.

A idade dos alunos, no 2.º ciclo da escola secundária, vai dos 13 aos 16 anos. É o período mais delicado da vida dos alunos.

O aluno, neste período da sua vida, é um mixto constantemente variável das qualidades da criança e do adulto. A evolução da sua mentalidade e do seu carácter não é gradual. Pelo contrário, é caracterizadamente oscilante. O aluno, que hoje se mostra atento e disciplinado, amanhã será desatento e insubmisso. Se hoje revela vivacidade de espírito e interesse, amanhã estará bronco e desinteressado.

Neste período da sua vida, o aluno é o joguete de uma emotividade que ainda não se disciplinou.

Não é necessário que o professor tenha grandes qualidades de observação ou longa experiência profissional — é o meu caso — para que possa produzir estas afirmações.

E não é sòmente o professor que tem de atender a este período crítico da vida dos alunos e no qual cada aluno pode dizer-se que é um caso particular. A escola, se quizer evitar a falência da sua missão, não pode organizar-se, ignorando este período crítico da vida dos alunos.

Ora, os principais objectivos da escola secundária, consistem na formação do carácter e mentalidade do aluno e, se é certo, como afirma Burloud, que «o passado que se conserva e se transmite na hereditariedade, não é o passado sob a forma de recordações, mas de hábitos específicos, aptidões e disposições para agir deste ou daquele modo», as responsabilidades que impendem sobre a escola são enormes.

A escola tem que organizar-se, tendo em vista que o aluno não é um motor cujo rendimento possa ser forçado. E, mesmo os próprios motores, precisam de repouso. O aluno é um ser vivo em evolução e que, se está sujeito à acção da escola, não deve ser subtraído à vida familiar que tem também a sua função educativa a qual é insubstituível. Há pois que contar com o tempo destinado à vida familiar do aluno, ao tempo para as suas distracções e para o repouso. As 24 horas do dia têm que ser distribuídas pela escola, pela vida familiar, pelas distracções e repouso do aluno.

Se não houver o justo equilíbrio entre todos estes factores, o regime de educação do aluno entrará em deficit. Se houver a tendência para cobrir esse deficit à custa do repouso, especialmente do sono, então o caso assumirá, em breve, proporções de catástrofe.

Estou a lembrar-me que o genial Cervantes apresenta, aos seus leitores, D. Quixote a ler muito e a dormir pouco, antes de o apresentar enlouquecido.