MATEMÁTICAS ELEMENTARES

PONTOS DE EXAME DO 3.º CICLO DO ENSINO LICEAL E DE EXAMES DE APTIDÃO ÀS ESCOLAS SUPERIORES

Ensino liceal — 3º. ciclo — 1951, Julho.

I

3262 — Determine o limite da função

$$F(x) = \frac{x^2-4}{x^3-5x^2+28}.$$

quando x tende para -2. R: *A função dada pode escrever-se* $F(x) = \frac{(x+2)(x-2)}{(x+2)(x^2-7x+14)}$. *Para* $x \neq -2$ *é* $F(x) = \frac{x-2}{x^2-7x+14}$. *Logo o limite de* $F(x)$, *quando* x *tende para* -2, *é* $-1/8$ *(resultado da substituição de* x *por* -2 *na última expressão).*

3263 — Escreva a equação cartesiana da recta que passa pelo ponto $A(-3,0)$ e é perpendicular à recta cuja equação é $2y+5x=6$. R: *O coeficiente angular da recta dada é* $-5/2$; *o da recta pedida será* $2/5$. *A equação desta recta é* $y = \frac{2}{5}(x+3)$.

3264 — Resolva a seguinte equação trigonométrica: $2\cos x \operatorname{tag} x = \sqrt{3}$. R: *A equação dada é equivalente à equação* $\operatorname{sen} x = \sqrt{3}/2$. *Como* $\operatorname{sen} 60^\circ = \sqrt{3}/2$, *a solução geral da equação é* $x = k\cdot 180^\circ + (-1)^k \cdot 60^\circ$.

3265 — Numa divisão, o dividendo é 162 e o resto 15. Que valores pode ter o divisor? R: $162 = dq + 15$ · *sendo* $d > 15$. *Logo* $147 = dq$, $d > 15$. *Quere dizer* d *é um divisor de* 147, *superior a* 15. *Poderá ser* $d = 21, 49, 147$.

II

3266 — Dada a função

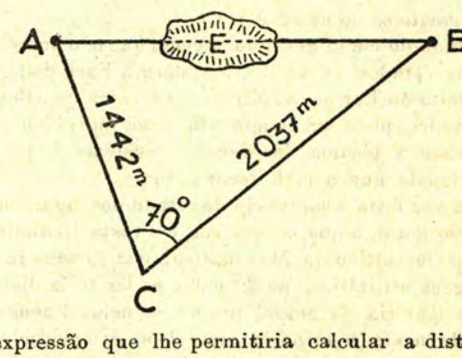
$$F(x) = (4-x)(3x^2+5x-2),$$

determine os valores de x para os quais essa função tem valores negativos. R: *A expressão* $4-x$ *é positiva para* $x<4$ *e negativa para* $x>4$; *a expressão* $3x^2+5x-2$ *é positiva para* $x>1/3$ *ou* $x<-2$ *e negativa para* $-2<x<1/3$. *A função* $F(x)$ *será negativa para os valores de* x *que confiram sinais contrários às duas expressões anteriores; logo* $x>4$ *ou* $-2<x<1/3$.

3267 — Uma parábola tem por vértice a origem das coordenadas e por eixo o eixo dos x. Além disso, passa pelo ponto $(2,-6)$. a) Determine as coordenadas do foco. b) Escreva a equação cartesiana dessa parábola. c) Determine as coordenadas dos pontos em que a parábola é intersectada pela recta $y-x+k=0$. d) Determine k de forma que esses dois pontos coincidam. R: a) e b) *Sendo* $y^2 = 2px$ *a equação da parábola, as coordenadas do foco são* $(p/2, 0)$. *Para determinar* p, *atenda-se ao facto de* $(2,-6)$ *satisfazer à equação* $y^2 = 2px$. *Vem* $p = 9$. c) *Basta resolver o sistema* $\begin{cases} y^2 = 18x \\ y - x + k = 0 \end{cases}$. *Vem* $x = k+9 \pm \sqrt{18k+81}$, $y = 9 \pm \sqrt{18k+81}$. d) *Deverá ser* $18k+81 = 0$ $\quad k = -81/18 = -9/2$.

3268 — Desejava calcular-se a distância entre dois pontos A e B. Como entre esses dois pontos existia uma elevação E, escolheu-se um terceiro ponto C, do qual os pontos A e B fossem visíveis, e fizeram-se as seguintes medições: $\overline{AC} = 1442\,\text{m}$, $\overline{CB} = 2037\,\text{m}$. Ângulo $C = 70^\circ$.

Com esses dados, a) Determine, empregando logarítmos, os ângulos A e B do triângulo; b) Escreva



a expressão que lhe permitiria calcular a distância entre os pontos A e B. R: a) *O sistema* $A+B = 110^\circ$, $\operatorname{tg}\frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b}\cdot \operatorname{cotg}\frac{C}{2}$ *dará* A *e* B. *Temos:*

$$\operatorname{tg}\frac{A-B}{2} = \frac{595}{3479}\operatorname{cotg} 35^\circ;$$

$\log \operatorname{tg}(A-B)/2 = \log 595 + \operatorname{colog} 3479 + \log \operatorname{cotg} 35° =$
$= 2{,}77452 + \bar{4}{,}45855 + 0{,}15477 = \bar{1}{,}38784;$
$(A-B)/2 = 13°\ 43'\ 33''$; *logo* $A-B = 27°\ 27'\ 6''$. *Virá* $A = 68°\ 43'\ 33''$ *e* $B = 41°\ 16'\ 27''$. b) $c^2 = a + b^2 - 2ab\cos C$ (*não logarítmica*); $c = a \operatorname{sen} C / \operatorname{sen} A$ (*logarítmica*).

Soluções dos n.os 3262 a 3268 de Laureano Barros

Exames de aptidão para frequência das licenciaturas em Ciências Matemáticas, Ciências Físico-Químicas e Ciências Geofísicas, preparatórios para as escolas militares e curso de engenheiros geógrafos — Ano de 1951 — Ponto n.º 1.

3269 — Demonstrar que, se os inteiros positivos a e b forem primos entre si, também $a+b$ e a^2+ab+b^2 são primos entre si. R: *De* $a^2+b^2+ab = (a+b)^2 - ab$, *deduz-se que todo o divisor comum* k *de* a^2+b^2+ab *e de* $a+b$, *e portanto de* a^2+b^2+ab *e de* $(a+b)^2$, *é também divisor de* ab.

Mas $a+b$ *e* ab *são primos entre si por o serem* a *e* b. *(Vide por ex. «Gazeta de Matemática» n.os 44-45, exercício n.º 3.060). Logo* k *não pode ser diferente de* 1.

3270 — Demonstrar que, se um número primo p é a diferença entre os quadrados de dois números inteiros positivos, estes números são $\frac{p-1}{2}$ e $\frac{p+1}{2}$. R: *Designemos por* a *e* b $(a > b$, *por ex.*$)$, *os dois inteiros positivos referidos. Em vista da hipótese* $p = a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$. *Mas como* p *é primo a decomposição anterior só é possível quando* $a - b = 1$ *e* $a+b = p$ *donde* $a = \frac{p+1}{2}$ *e* $b = \frac{p-1}{2}$.

3271 — Demonstrar que $3^{2n+3} + 40n - 27$, onde n é inteiro positivo, é sempre divisível por 64. [*N. B.* — Escrevendo $f(n) = 3^{2n+3} + 40n - 27$ calcular $f(1)$, formar a diferença $9f(n) - f(n+1)$ e proceder por indução completa]. R: $f(1) = 3^5 + 40 - 27 = \dot{\overline{64}}$. $9f(n) - f(n+1) = 3^{2n+5} + 360n - 9 \cdot 27 - (3^{2n+5} + 40n + 40 - 27) = 320n - 256 = \dot{\overline{64}}$.

Como f(n) *é por hipótese múltiplo de* 64 *(visto se proceder por indução completa) fica provado que* $f(n+1)$ *também o é. E como* $f(1) = \dot{\overline{64}}$, *fica feita a indução.*

3272 — Decompor de todos os modos possíveis a fracção $\frac{2733}{340}$ em duas parcelas fraccionárias positivas de denominadores 17 e 20 respectivamente. R: $\frac{2733}{340} = \frac{x}{17} + \frac{y}{20}$ *ou* $20x + 17y = 2733$. *A solução do problema exige a determinação das raízes inteiras e positivas desta equação. Utilizando, por exemplo, o método de* Euler, *obtém-se:* $x_0 = 10$ *e* $y_0 = 149$. *As outras soluções são:* (27,129), (44,109), (51,89), (98,69), (115,49), (132,29) *e* (149,9).

3273 — Desenvolver segundo potências de x a função $n(1+x)^{n-1} + n(n-1)x(1+x)^{n-2}$, onde n é inteiro positivo, e do resultado obtido concluir que

$$1^2 \cdot \binom{n}{1} + 2^2 \cdot \binom{n}{2} + \cdots + (n-1)^2 \cdot \binom{n}{n-1} + n^2 \cdot \binom{n}{n} = n(n+1) \cdot 2^{n-2}.$$

R: *Tem-se:*

$$(1+x)^{n-1} = 1 + \binom{n-1}{1}x + \binom{n-1}{2}x^2 + \cdots + \binom{n-1}{k}x^k + \cdots + \binom{n-1}{n-1}x^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^k$$

$$x(1+x)^{n-2} = x + \binom{n-2}{1}x^2 + \cdots + \binom{n-2}{k-1}x^k + \cdots + \binom{n-2}{n-2}x^{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-2}{k-1}x^k.$$

O coeficiente de x^k *no desenvolvimento pedido é pois:*

$$n\binom{n-1}{k} + n(n-1)\binom{n-2}{k-1} = \frac{n!}{k!(n-k-1)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k-1!)} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k-1)!}\left(\frac{1}{k}+1\right) = \frac{n!}{k!(n-k-1)} \cdot (k+1) = (k+1)^2 \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} = (k+1)^2\binom{n}{k+1},$$

vindo então para o desenvolvimento da função dada, segundo potências de x:

$$1^2 \cdot \binom{n}{1} + 2^2\binom{n}{2}x + \cdots + (k+1)^2\binom{n}{k+1}x^k + \cdots + n^2\binom{n}{n} \cdot x^{n-1} = n(1+x)^{n-1} + n(n-1)x(1+x)^{n-2}.$$

Fazendo $x = 1$ *na igualdade anterior, e notando que* $n\,2^{n-1} + n(n-1)\,2^{n-2} = n(n+1)\,2^{n-2}$, *deduz-se, imediatamente, a identidade requerida.*

3274 — Determinar os valores reais de m para os quais uma das raízes da equação

$$x^2 + \frac{3m-5}{m-4}x + 16 = 0$$

é o cubo da outra raíz, e verificar esses valores. R: *Representemos por* x_1 *e* x_2 *as raízes da equação e suponhamos* $x_2 = x_1^3$. *Tem-se* $x_1 x_2 = x_1^4 = 16$, *donde* $x_1 = 2, -2, 2i, -2i$ *e* $x_2 = x_1^3 = 8, -8, -8i, 8i$.

Os valores imaginários de x_1 *e* x_2, *por não serem conjugados, não conduzem a um valor real para o coeficiente de* x *e, portanto, para* m.

Como $x_1 + x_2 = \dfrac{5-3m}{m-4}$ *tem-se*

$$10 = \frac{5-3}{m-4} \quad e \quad -10 = \frac{5-3m}{m-4},$$

donde os valores pedidos de m: 45/13 *e* 5.

Soluções dos n.os 3269 a 3274 de Manuel Zaluar

Exames de aptidão para frequência do Instituto de Ciências Económicas e Financeiras — Ano de 1951 — Ponto nº. 1.

I

3275 — Com uma colecção de pesos de 1, 2, 2^2, $2^3\cdots$ quilogramas, pretende-se fazer uma pesagem de 91 quilogramas, não utilizando na pesagem mais do que um peso de cada espécie. Quais são os pesos a utilizar? Justifique. R: *Basta escrever o número* 91 *no sistema de base* 2. *Tem-se* $91 = 1011011_{(2)} = 2^6 + 2^4 + 2^3 + 2 + 1$.

3276 — Demonstre que se um número de dois algarismos é divisível por 7, a diferença entre os cubos dos seus algarismos é também divisível por 7. R: *A hipótese é* $\overline{ab} = 10a + b = \dot{7}$ *ou* $3a + b = \dot{7}$. *Mas* $(3a+b)^3 = 3^3 a^3 + 3^3 a^2 b + 3^2 ab^2 + b^3 = 3^3 a^3 + b^3 + 3^2 ab(3a+b)$ *donde* $\dot{7} = 27a^3 + b^3 + \dot{7}$ *ou* $27a^3 + b^3 = \dot{7}$.

Se for $b > a$, *como* $28a^3 = \dot{7}$, *vem* $27a^3 + b^3 - 28a^3 = b^3 - a^3 = \dot{7}$; *se* $b < a$ $28a^3 - 27a^3 - b^3 = a^3 - b^3 = \dot{7}$, c. q. p.

II

3277 — Dada a equação $(m-2)x^2 + mx + 2m - 1 = 0$ de raizes x_1 e x_2, calcule a expressão $E = x_1^2 + x_2^2 + 3x_1x_2$ e determine m de modo que E seja negativo. R: $E = x_1^2 + x_2^2 + 3x_1x_2 = (x_1+x_2)^2 + x_1x_2 = \dfrac{m^2}{(m-2)^2} + \dfrac{2m-1}{m-2} = \dfrac{3m^2-5m+2}{(m-2)^2}$.

$E < 0$ *se* $3m^2 - 5m + 2 = 3(m-1)(m-2/3) < 0$ *ou seja, para* $2/3 < m < 1$.

3278 — Demonstre que, sendo T_p o termo do desenvolvimento de $(x+a)^n$ que é precedido de p termos, será

$$\frac{T_{p+1} \times T_{p-1}}{(T_p)^2} = \frac{np-p^2}{np-p^2+n+1}.$$

R: $T_p = \binom{n}{p} x^{n-p} a^p$, $T_{p+1} = \binom{n}{p+1} x^{n-p-1} a^{p+1}$,

$T_{p-1} = \binom{n}{p-1} x^{n-p+1} a^{p-1}$

$$\frac{T_{p+1} \cdot T_{p-1}}{(T_p)^2} = \frac{p!\,p!\,(n-p)!\,(n-p)!}{(p+1)!\,(p-1)!\,(n-p-1)!\,(n-p+1)!} = \frac{p(n-p)}{(p+1)(n-p+1)} = \frac{np-p^2}{np-p^2+n+1}.$$

III

3279 — Sendo $\operatorname{cotg}(x + 5\pi/2) = -\sqrt{2}$ e x do 3.º quadrante calcule $\cos(\pi/3 - x)$. R: $\operatorname{cotg}(x + 5\pi/2) = \operatorname{cotg}(x + \pi/2) = -\operatorname{tg} x$, *logo* $\operatorname{tg} x = \sqrt{2}$, $\cos x = -1/\sqrt{3} = -\sqrt{3}/3$ *e* $\operatorname{sen} x = -\sqrt{6}/3$.

$$\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \cos\frac{\pi}{3} \cdot \cos x + \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} \cdot \operatorname{sen} x = \frac{-\sqrt{3} - 3\sqrt{2}}{6}.$$

3280 — Demonstre que a diferença dos arcos compreendidos entre 0 e $\pi/2$ radianos e que têm, respectivamente, por tangentes

$$\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \quad e \quad \frac{1}{\sqrt{2}}$$

é igual a $\pi/4$ radianos. R: *Designemos por* α *e* β *os arcos do 1.º quadrante tais que* $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$ *e* $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. *Pretende-se provar que* $\alpha - \beta = \pi/4$ *ou* $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = 1$, *o que é imediato:*

$$\frac{\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}}{1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}} = \frac{2+\sqrt{2}-\sqrt{2}+1}{2-\sqrt{2}+\sqrt{2}+1} = 1.$$

Soluções dos n.os 3275 a 3280 de Manuel Zaluar.

Exames de aptidão para frequência dos preparatórios para a Faculdade de Engenharia e Instituto Superior Técnico — Ano de 1951 — Ponto n.º 1.

3281 — Resolva a inequação

$$x^2(2x^2 - 7x + 3) < 6x^2 - 5x + 1.$$

R: *A inequação dada pode sucessivamente escrever-se:*

$$2x^2(x-3)(x-1/2) - 6(x-1/3)(x-1/2) < 0$$
$$(x-1/2)(2x^3 - 6x^2 - 6x + 2) < 0,$$

ou, notando que o 2.º factor tem o zero evidente -1,

$$(x-1/2)(x+1)(2x^2 - 8x + 2) < 0$$
$$2(x-1/2)(x+1)(x-2+\sqrt{3})(x-2-\sqrt{3}) < 0.$$

O primeiro membro tem pois como zeros: -1, $2-\sqrt{3}, 1/2$ *e* $2+\sqrt{3}$. *A inequação é verificada para* $-1<x<2-\sqrt{3}$ *e* $1/2<x<2+\sqrt{3}$.

3282 — Faça o desenvolvimento do binómio

$$\left[2x+\left(\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]^7$$

e diga o coeficiente do termo em x. R: *Tem-se para o desenvolvimento:*

$$\sum_{p=0}^{7}\binom{7}{p}(2x)^{7-p}(x/2)^{-p/2}=\sum_{p=0}^{7}2^{7-p/2}\binom{7}{p}x^{7-3p/2}.$$

O coeficiente pedido corresponde a $7-3p/2=1$, *ou* $p=4$, *e é portanto:* $2^5\binom{7}{4}=\frac{2^5\cdot 7!}{4!\,3!}=1120$.

3283 — Qual o valor da razão do número de arranjos para o número de combinações de n objectos p a p e como se chama?

3284 — Qual o menor valor de m que dá à equação

$$x^4+2x^2+9=0$$

quatro raízes reais, diferentes de zero, e quais são elas? R: *No enunciado há manifesto erro tipográfico visto o parâmetro* m *não figurar na equação apresentada.*

3285 — Dada a equação $x^2+bx+c=0$, determine b e c de modo que uma das raízes seja tripla da outra e que o produto dos seus quadrados seja igual a 144. R: *Representemos por* x_1 *e* x_2 *as raízes da equação e suponhamos, por exemplo,* $|x_2|>|x_1|$. *Então:* $x_2=3x_1$, *e* $(x_1x_2)^2=144$. *Logo* $x_1x_2=\pm 12=c$ *e* $x_1+x_2=4x_1=-b$, *donde:* $x_1'=2$, $x_2'=6$ *e* $x_1''=-2$, $x_2''=-6$, *ou* $c'=12$, $b'=-8$ *e* $c''=12$ *e* $b''=8$. *A hipótese* $c=-12$, *conduz a raízes complexas não conjugadas e a* b *imaginário.*

Soluções dos n.os 3281 a 3285 de Manuel Zaluar

MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAMES DE FREQUÊNCIA E FINAIS

ÁLGEBRA SUPERIOR — MATEMÁTICAS GERAIS

F. C. L. — Álgebra Superior — 1.º exame de frequência — 1949-1950.

3286 — Defina sucessão de Rolle de $f(x)$ em (a, b) e descreva, justificando, o seu préstimo na separação das raízes de $f(x)$ num intervalo. Faça a aplicação à equação $x^2 e^x - k = 0$. (Discussão com apresentação dos diferentes casos possíveis, consoante o valor de k).

3287 — Enuncie e demonstre a condição necessária e suficiente de desenvolvibilidade de $f(x)$ em série de Taylor referida ao ponto a. Dê e justifique alguma condição suficiente. Pode o conhecimento do desenvolvimento de $f'(x)=\sum \alpha_n (x-a)^n$ permitir escrever o de $f(x)$? Sob que hipótese? Qual é esse desenvolvimento? Faça a aplicação à determinação do desenvolvimento em série de Mac-Laurin de $f(x)=\log(4+x)$. (Intervalo de convergência do desenvolvimento).

3288 — Enuncie o teorema de Euler sobre funções homogéneas. É a recíproca exacta? Escreva a equação da tangente à imagem da função y implícitamente definida pela equação $f(x, y)=0$ num ponto genérico, pondo-a sob a forma $AX+BY+C=0$. Dê as expressões de A, B e C em $f(x, y)$ e suas derivadas. Mostre, servindo-se do teorema de Euler, que A, B e C são funções homogéneas, na hipótese de $f(x, y)$ ser homogénea de grau α. De que grau?

3289 — Sendo $f''_{x^2 y}(a, b)$ finita e $f'''_{x^3}(x, y)$ limitada no ponto $P(a, b)$, pode afirmar-se a continuidade de $f''_{x^2}(x, y)$ no ponto P? Justifique o teorema em que baseia a resposta. Supondo verificadas as condições anteriores e admitindo a continuidade de $f''_{y^2}(x, y)$ em $P(a, b)$, justifique a igualdade $f''_{xy}(a, b)=f''_{yx}(a, b)$, supondo que estas últimas derivadas são finitas.

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 1.º Exame de frequência — 30/1/1951.

3290 — Determine a derivada em ordem a x de:

$$y=e^{1-x^2}\cdot \operatorname{tg}^4(x^3+1)+(1-x)\cdot \operatorname{sen}\frac{1}{x-1} \qquad x\neq 1.$$

Justifique a regra operatória que usou para o cálculo da derivada da 2.ª parcela de y. Podia utilizar essa regra para achar essa derivada no ponto de