O primeiro membro tem pois como zeros: -1, $2-\sqrt{3}, 1/2$ *e* $2+\sqrt{3}$. *A inequação é verificada para* $-1<x<2-\sqrt{3}$ *e* $1/2<x<2+\sqrt{3}$.

3282 — Faça o desenvolvimento do binómio

$$\left[2x+\left(\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]^7$$

e diga o coeficiente do termo em x. R: *Tem-se para o desenvolvimento:*

$$\sum_{p=0}^{7}\binom{7}{p}(2x)^{7-p}(x/2)^{-p/2}=\sum_{p=0}^{7}2^{7-p/2}\binom{7}{p}x^{7-3p/2}.$$

O coeficiente pedido corresponde a $7-3p/2=1$, *ou* $p=4$, *e é portanto:* $2^5\binom{7}{4}=\frac{2^5\cdot 7!}{4!\,3!}=1120$.

3283 — Qual o valor da razão do número de arranjos para o número de combinações de n objectos p a p e como se chama?

3284 — Qual o menor valor de m que dá à equação

$$x^4+2x^2+9=0$$

quatro raízes reais, diferentes de zero, e quais são elas? R: *No enunciado há manifesto erro tipográfico visto o parâmetro* m *não figurar na equação apresentada.*

3285 — Dada a equação $x^2+bx+c=0$, determine b e c de modo que uma das raízes seja tripla da outra e que o produto dos seus quadrados seja igual a 144. R: *Representemos por* x_1 *e* x_2 *as raízes da equação e suponhamos, por exemplo,* $|x_2|>|x_1|$. *Então:* $x_2=3x_1$, *e* $(x_1x_2)^2=144$. *Logo* $x_1x_2=\pm 12=c$ *e* $x_1+x_2=4x_1=-b$, *donde:* $x_1'=2$, $x_2'=6$ *e* $x_1''=-2$, $x_2''=-6$, *ou* $c'=12$, $b'=-8$ *e* $c''=12$ *e* $b''=8$. *A hipótese* $c=-12$, *conduz a raízes complexas não conjugadas e a* b *imaginário.*

Soluções dos n.os 3281 a 3285 de Manuel Zaluar

MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAMES DE FREQUÊNCIA E FINAIS

ÁLGEBRA SUPERIOR — MATEMÁTICAS GERAIS

F. C. L. — Álgebra Superior — 1.º exame de frequência — 1949-1950.

3286 — Defina sucessão de Rolle de $f(x)$ em (a, b) e descreva, justificando, o seu préstimo na separação das raízes de $f(x)$ num intervalo. Faça a aplicação à equação $x^2e^x-k=0$. (Discussão com apresentação dos diferentes casos possíveis, consoante o valor de k).

3287 — Enuncie e demonstre a condição necessária e suficiente de desenvolvibilidade de $f(x)$ em série de Taylor referida ao ponto a. Dê e justifique alguma condição suficiente. Pode o conhecimento do desenvolvimento de $f'(x)=\sum \alpha_n(x-a)^n$ permitir escrever o de $f(x)$? Sob que hipótese? Qual é esse desenvolvimento? Faça a aplicação à determinação do desenvolvimento em série de Mac-Laurin de $f(x)=\log(4+x)$. (Intervalo de convergência do desenvolvimento).

3288 — Enuncie o teorema de Euler sobre funções homogéneas. É a recíproca exacta? Escreva a equação da tangente à imagem da função y implícitamente definida pela equação $f(x, y)=0$ num ponto genérico, pondo-a sob a forma $AX+BY+C=0$. Dê as expressões de A, B e C em $f(x, y)$ e suas derivadas. Mostre, servindo-se do teorema de Euler, que A, B e C são funções homogéneas, na hipótese de $f(x, y)$ ser homogénea de grau α. De que grau?

3289 — Sendo $f'''_{x^2y}(a, b)$ finita e $f'''_{x^3}(x, y)$ limitada no ponto $P(a, b)$, pode afirmar-se a continuidade de $f''_{x^2}(x, y)$ no ponto P? Justifique o teorema em que baseia a resposta. Supondo verificadas as condições anteriores e admitindo a continuidade de $f''_{y^2}(x, y)$ em $P(a, b)$, justifique a igualdade $f''_{xy}(a, b)=f''_{yx}(a, b)$, supondo que estas últimas derivadas são finitas.

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 1.º Exame de frequência — 30/1/1951.

3290 — Determine a derivada em ordem a x de:

$$y=e^{1-x^2}\cdot \operatorname{tg}^4(x^3+1)+(1-x)\cdot \operatorname{sen}\frac{1}{x-1}\quad x\neq 1.$$

Justifique a regra operatória que usou para o cálculo da derivada da 2.ª parcela de y. Podia utilizar essa regra para achar essa derivada no ponto de abcissa 1? Porquê? Indique algum ponto onde se torne fácil o cálculo da derivada de y. Justifique. R:

$$y' = -2xe^{1-x^2}\cdot tg^4(x^3+1) + 12x^2\cdot e^{1-x^2}\cdot tg^3(x^3+1) - \\ -\operatorname{sen}\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-1}\cdot\cos\frac{1}{x-1}.$$

A regra operatória usada foi a do produto que não se pode utilizar no ponto de abcissa 1 *visto que neste ponto a função* $\operatorname{sen}\frac{1}{x-1}$ *não está definida. No ponto de abcissa* -1 *torna-se particularmente simples o cálculo da derivada de* y, *porque neste ponto* $tg(x^3+1)$ *se anula e portanto para o cálculo da derivada basta achar a derivada de* $(1-x)\cdot\operatorname{sen}\frac{1}{x-1}$ *no ponto* -1.

3291 — Determine a equação da circunferência C que passa pelos pontos $A(-2,1)$, $B(-4,-1)$ e cujo centro se encontra sobre a recta de equação $x-y+1=0$.

Ache a equação do logar geométrico dos pontos médios dos segmentos $\overline{MP}$ sabendo que M é um ponto de coordenadas $(5,0)$ e P é um ponto móvel da circunferência C. R: *Seja* $C(\alpha,\beta)$ *o centro da circunferência pedida. Então, temos:* $(\alpha+2)^2+(\beta-1)^2=(\alpha+4)^2+(\beta+1)^2$ *e* $\alpha-\beta+1=0$, *isto é,* $\alpha+\beta+3=0$ *e* $\alpha-\beta+1=0$. *Resolvendo o sistema formado por estas duas equações, obtemos* $\alpha=-2$ *e* $\beta=-1$ *que são as coordenadas do centro. O raio da circunferência será* $r=\sqrt{(-2+2)^2+(-1-1)^2}=2$. *Portanto, a equação da circunferência será* $(x+2)^2+(y+1)^2=4$.

Sejam X *e* Y *as coordenadas dum ponto qualquer do lugar pedido. Então, temos* $X=\frac{x+5}{2}$ *e* $Y=\frac{y}{2}$ *onde* x *e* y *são as coordenadas dum ponto corrente da circunferência* $(x+2)^2+(y+1)^2=4$. *Eliminando* x *e* y *entre estas três últimas igualdades resulta:* $(2X-3)^2+(2Y+1)^2=4$ *que é a equação do lugar pedido.*

3292 — Que entende por limite de uma sucessão de termo geral u_n? Qual a condição necessária e suficiente para que essa sucessão tenha limite finito? Prove que a condição é necessária e suficiente.

Se a sucessão de termo geral u_n converge para um número k, diga como é constituida essa sucessão no caso de k não ser ponto de acumulação do conjunto (u_n). Satisfaz essa sucessão a condição necessária e suficiente atrás referida? Razão disso. R: *A sucessão é constituida, a partir de certa ordem, pelo elemento* k *indefinidamente repetido. Satisfaz a condição necessária e suficiente como é simples de ver.*

3293 — Prove que as séries, de termos positivos, Σu_n e Σv_n são da mesma natureza se $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=l>0$ (l finito). O que pode concluir se for l igual a zero? E se for l igual a infinito? Justifique.

Verificando-se a condição $n^\alpha\cdot u_n\to l>0$, quando converge a série Σu_n? Neste caso qual o limite da sucessão de termo geral u_n? Porquê? R: *De* $u_n:\frac{1}{n^\alpha}\to l>0$ *e pelo anterior se conclui que* Σu_n *converge se* $\Sigma\frac{1}{n^\alpha}$ *convergir. Ora, sabemos que* $\Sigma\frac{1}{n^\alpha}$, *série de Dirichelet ou harmónica generalizada, só converge para* $\alpha>1$. *Portanto, nas condições enunciadas,* Σu_n *converge se* $\alpha>1$. *Se* Σu_n *converge então* $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

3294 — Quando se diz que a função $f(x)$ é crescente no intervalo aberto (a,b)? Indique o limite inferior de tal função na vizinhança $I(b-\varepsilon,b)$, ($\varepsilon>0$ e arbitràriamente pequeno) e o limite superior destes limites inferiores quando ε tende para zero. Se esse limite for finito diga o que é necessário para que essa função $f(x)$ seja contínua no ponto b [relativamente ao intervalo fechado (a,b)].

Mostre que $f(x)$ é contínua no intervalo fechado (a,b), se aí for crescente e tomar todos os valores entre $f(a)$ e $f(b)$.

Dê a imagem de uma função $f(x)$ crescente no *intervalo aberto* (a,b), que assume nesse *intervalo* todos os valores entre $f(a)$ e $f(b)$ e, finalmente, não seja contínua no intervalo *aberto* (a,b). R: *Descreva-se, por exemplo, a imagem duma função crescente no intervalo aberto* (a,b), *que apresente uma descontinuidade finita num ponto interior* c, *tal que* $f(b)<f(c-0)$, *e com* $f(a)=f(a+0)$.

Soluções dos n.os 3290 a 3294 de José J. Laginha.

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 30 de Junho de 1951 — 2.º exame.

3295 — Desenvolver em série de potências de $x+1$ a função $y=\frac{2}{(x+2)^2}$ e determinar o intervalo de convergência. Demonstre que toda a série de potências é derivável termo a termo. R:

$$Py = -\frac{2}{x+2} = -2\frac{1}{1+(x+1)} = \\ = -2[1-(x+1)+(x+1)^2-(x+1)^3+\cdots+ \\ +(-1)^n(x+1)^n+\cdots] = \sum_0^\infty(-1)^{n+1}\cdot 2(x+1)^n,$$

desenvolvimento válido para $|x+1|<1$, *ou* $-2<x<0$.

A série das derivadas $\sum\limits_1^\infty(-1)^{n-1}\cdot 2n\cdot(x+1)^{n-1}$ *é* *também convergente no mesmo intervalo e a sua soma é a derivada de* Py*, aonde* y *for uniformemente convergente, isto é, em qualquer intervalo fechado interior ao intervalo de convergência. Vem pois:*

$$\frac{2}{(x+2)^2}=\sum_1^\infty(-1)^{n-1}\cdot 2n\cdot(x+1)^{n-1}.$$

Para demonstrar que toda a série de potências é derivável termo a termo basta ver que $\sum_0 a_n x^n$ *e* $\sum_1 n\,a_n x^{n-1}$ *têm o mesmo intervalo de convergência e que, sendo a segunda uniformemente convergente em qualquer intervalo fechado interior ao intervalo de convergência, a primeira é aí sua primitiva.*

3296 — Defina função regular e veja se $\log t$ é ou não regular no intervalo $(0, T)$. Enuncie o teorema de Cauchy sobre as funções regulares.

Seja $\widehat{OA}$ um arco de curva plana cujas equações paramétricas são $y=\varphi(t)$ e $x=\psi(t)$ com as funções φ e ψ regulares no intervalo (t_0, t_1); prove que o arco $\widehat{OA}$ admite uma tangente ordinária paralela à corda $\overline{OA}$.

Se $y=t^{-2}$ e $x=\log t$, calcule o verdadeiro valor de y/x para $t=0$. Justifique. R: f(x) *é regular em* (a, b) *se for contínua em* (a, b) *e admitir derivada finita ou infinita de sinal determinado em cada ponto interior. A função* logt *não é regular porque não é contínua para* $t=0$*; como para* $t>0$ *admite derivada* $=1/t$ *finita, ela será regular em qualquer intervalo finito fechado por mais próximo que o extremo esquerdo esteja da origem.*

Demonstrar que $\widehat{OA}$ *tem tangente ordinária paralela à corda* $\overline{OA}$*, é demonstrar que: se* $\varphi(t)$ *e* $\psi(t)$ *são regulares no intervalo* (t_0, t_1) *com derivadas não conjuntamente nulas ou infinitas em pontos interiores, existe* t' *entre* t_0 *e* t_1 *que faz* $\frac{\varphi(t_0)-\varphi(t_1)}{\psi(t_0)-\psi(t_1)}=\frac{\varphi'(t')}{\psi'(t')}$ *(caso não seja ao mesmo tempo* $\varphi(t_0)=\varphi(t_1)$ *e* $\psi(t_0)=\psi(t_1)$*). É o teorema de Cauchy.*

Com $y=t^{-2}$ *e* $x=\log t$ *vem* $\frac{y}{x}=\frac{t^{-2}}{\log t}$ *e o verdadeiro valor para* $t=0$ *é* $\lim\limits_{t=0+}\frac{t^{-2}}{\log t}=\lim\limits_{t=0}\frac{-2t^{-3}}{t^{-1}}=\lim\limits_{t=0}-2t^{-2}=-\infty$. *A justificação está na regra de Cauchy para as indeterminações de tipos* $\frac{0}{0}$ *e* $\frac{\infty}{\infty}$.

3297 — Se $z=f(x, y)$ é uma função com derivadas parciais limitadas no interior dum rectângulo de lados h e k centrado em $P(a, b)$, demonstre que f é contínua em P. Além das hipóteses anteriores, se f'_y é contínua em P demonstre que f é diferenciável em P.

Com $z=(x-2y)^2+y-1$ e $P(2,1)$ a equação $z=0$ define alguma função $y(x)$ na vizinhança de $x=2$? Porquê? Em caso afirmativo, qual o sentido da concavidade da curva repesentativa de $y(x)$ no ponto $x=2$? Justifique. R: *A primeira questão demonstra-se com a fórmula dos acréscimos finitos. Quanto à segunda questão basta notar que as derivadas parciais limitadas são finitas e as correspondentes funções parciais são regulares. Como uma derivada é contínua resulta a diferenciabilidade.*

A equação $(x-2y)^2+y-1=0$ *define uma curva contínua passando por* P(2, 1) *porque as derivadas parciais do primeiro membro são contínuas em* P *e* $f'_y(P)\neq 0$. *A função* z *é diferenciável em* P *e portanto a curva representativa de* y(x) *tem tangente em* P *de coeficiente angular dado por*

$$y'=\left[-\frac{2(x-2y)}{-4(x-2y)+1}\right]_{(2,1)}=0.$$

Mas,

$$y''=-\frac{[-4(x-2y)+1]2(1-2y')-2(x-2y)[-4(1-2y')]}{[-4(x-2y)+1]^2}$$

calculada em P *dá* $y''=-2$; *o sentido da concavidade é o dos* yy *negativos. A curva para baixo da tangente.*

3298 — Enuncie o teorema de d'Alembert e, supondo-o demonstrado, prove que o polinómio $f(z)$ de grau n admite precisamente n raízes reais ou complexas, iguais ou distintas. Deduza as fórmulas de Girard e diga como as utiliza para conseguir eliminar o segundo termo de um polinómio.

O que é um zero real isolado? Demonstre que um zero real inteiro simples é um zero isolado.

Poderia reproduzir a demonstração anterior para um polinómio $f(z)$ no caso de zeros complexos? Porquê? R: *Teorema de* d'Alembert: *o polinómio inteiro de grau* $n>0$ *tem pelo menos um zero* a_1. *Dividindo* f(z) *por* $(z-a_1)$ *o resto é* $f(a_1)=0$ *e o cociente é* $f_1(z)$ *de grau* $(n-1)$ *que admite um zero* a_2: $f(z)=(z-a_1)f_1(z)$, $f_1(z)=(z-a_2)f_2(z),\cdots$ *chega-se então a:* $f(z)=p_0(z-a_1)(z-a_2)\cdots(z-a_n)$.

As fórmulas de Girard *óbtêm-se identificando os coeficientes na identidade:*

$$p_0\left(z^n+\frac{p_1}{p_0}z^{n-1}+\cdots\right)=p_0(z-a_1)(z-a_2)\cdots(z-a_n).$$

A primeira das fórmulas de Girard *é* $\frac{-p_1}{p_0}=a_1+a_2\cdots+a_n$ *e se de um polinómio dado passarmos a outro com as raizes aumentadas de* h*, esse novo poli-*

nómio terá $\frac{-p'_1}{p'_0}=a_1+a_2+\cdots+a_n+nh$ *ou seja* $\frac{p'_1}{p'_0}=$ $=\frac{p_1}{p_0}-nh=0$ *donde* $h=\frac{p_1}{np_0}$. *Faz-se então a transformada de* $z'=z+h=z+\frac{p_1}{np_0}$.

Para demonstrar que zero real simples é zero isolado, faz-se $f(x)=(x-a)\varphi(x)$ *com* $\varphi(a)\neq 0$ *e* $\varphi(x)$ *contínua para* $x=a$. *Existe pois uma vizinhança de* $\varphi(a)$ *sem a origem e devido à continuidade de* $\varphi(x)$ *existe uma vizinhança de* a *onde* x *faz* $\varphi(x)\neq 0$ *e portanto* $f(x)\neq 0$. *A demonstração reproduz-se nos mesmos termos para um zero complexo, porque se consideram as vizinhanças circulares dos pontos do plano complexo.*

3299 — Defina termo de uma matriz e defina determinante. Diga o que é menor de classe k, e deduza o número de menores de classe k de um determinante de ordem $n>k$.

Calcule o valor de um determinante de 4.ª ordem com todos os elementos iguais: demonstre os teoremas em que se baseou para o cálculo. R: *Termo de matriz* quadrada *é o produto de* n *elementos da matriz tomado um e só um em cada fila. Só para matriz quadrada vale a definição. Sinal de um termo é dado por* $(-1)^{\varphi+\psi}$ *onde* φ *e* ψ *são os números de inversões das permutações superior e inferior dos índices.*

Determinante é a soma dos termos da matriz afectados dos respectivos sinais. Menor de classe k *e de ordem* n−k *é qualquer determinante contido em* n−k *linhas e* n−k *colunas: o número de menores de classe* k *é evidentemente* $\binom{n}{k}\cdot\binom{n}{k}$. *Aquele determinante é igual a zero: deve demonstrar,* a) *a troca de duas filas muda o sinal ao determinante;* b) *determinante com duas filas iguais é nulo.*

Soluções dos n.os 3295 a 3299 de J. Ribeiro de Albuquerque

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 6 de Julho de 1951 — 2.º exame.

3300 — Defina extremos absolutos e locais de $f(x)$ no intervalo fechado (a,b). Seja $f(x)$ uma função com derivada positiva no interior do intervalo (a,b); $f(x)$ é contínua nos extremos: prove que $f(x)$ é monótona no intervalo fechado (a,b). Precise o resultado.

Encare a hipótese de $f'(x)$ ser nula num conjunto de pontos, finito ou numerável, interiores ao intervalo. Considere por último a hipótese de $f'(x)$ ser identicamente nula no interior de (a,b). R: *Seja* Y *o conjunto dos valores de* f(x) *para* x *no conjunto* X: *existe sempre um limite excedente dos valores da função em* X, *menor que todos os outros: este limite superior dos valores da função em* X, *se for assumido por* f(x) *em* X, *chama-se máximo absoluto. Dualmente se tem um mínimo absoluto de* f(x) *em* X. *Os dois designam-se por extremos absolutos. Máximos e mínimos ou extremos locais são os máximos e mínimos relativos; são sempre assumidos.*

Para provar a monotonia da função parte-se de $\frac{f(x)-f(c)}{x-c}>0$ *e vem* $f(c-h)<f(c)<f(c+h)$; *função pontualmente crescente (pròpriamenee) é crescente (pròpriamente); a continuidade nos extremos estende a conclusão ao intervalo fechado. Nas mesmas hipóteses (derivada finita ou infinita de sinal determinado) a função é regular e o teorema de Lagrange dá imediatamente a conclusão. Nesta segunda demonstração deverá precisar-se que, não se anulando a derivada, a função é pròpriamente crescente. Se em ponto isolado a derivada é nula a função não deixa de ser pròpriamente crescente e um conjunto finito ou numerável de pontos é sempre isolado (todos os seus pontos são isolados); a função é pròpriamente crescente mas com inflexões de tangente horisontal. Na última hipótese a função é constante no intervalo fechado. Todas as afirmações deveriam ser provadas como é óbvio.*

3301 — Faça o estudo da concavidade de uma curva por meio da fórmula de Taylor.

Prove que se $f'(x)-f'(d)$ tem sinal fixo para $|x-d|<k$, o arco $\widehat{AM}$ tem inflexão para $x=d$.

Estude a concavidade e pontos de inflexão de $y=2-(1-x)^{1/3}$ e represente a função nas vizinhanças do ponto $x=1$. R: *A concavidade em ponto da curva de tangente não paralela a* $\overline{OY}$ *é estudada por meio de* $\varphi(x)=f(x)-f(c)-(x-c)f'(c)$; *desenvolvendo* f(x) *com a fórmula de Taylor vem para* x *na vizinhança de* c, $f(x)=f(c)+(x-c)f'(c)+\frac{(x-c)^2}{2!}f''(c_1)$; *para pontos* x *vizinhos de* c *tem-se pois* $\varphi(x)=$ $=\frac{(x-c)^2}{2!}f''(c_1)$ *com* c_1 *vizinho de* c. *Isto reduz o estudo da concavidade ao estudo da segunda derivada.*

Em $\varphi(x)=f(x)-f(d)-(x-d)f'(d)$ *faça-se* $f(x)-$ $-f(d)=(x-d)f'(d_1)$ *e teremos* $\varphi(x)=(x-d)[f'(d_1)-$ $-f'(d)]$; *com* x *à esquerda ou à direita de* d, *vem* d_1 *à esquerda ou à direita mas sempre na vizinhança onde o segundo factor mantém sinal; então* $\varphi(x)$ *varia de sinal com* (x−d) *e haverá inflexão.*

As derivadas $y'=\frac{1}{3}(1-x)^{-2/3}$ *e* $y''=\frac{2}{9}(1-x)^{-5/3}$ *são infinitas, a primeira sem mudar de sinal ao passar* x *por* 1, *a segunda mudando de sinal. Há, para* x=1, *inflexão com tangente paralela a* $\overline{OX}$. *A concavidade é positiva para* x<1 *e negativa para* x>1

3302 — Que entende por derivadas parciais de $z=f(x,y)$ num ponto $P(a,b)$ interior à região $\mathfrak{M}$ em que f vem definida.

Deduza a fórmula dos acréscimos finitos supondo que aquelas derivadas são finitas numa vizinhança do ponto $P(a,b)$.

Calcule a derivada da função composta de $f(x,y)$ e $x=e^u$ e $y=\operatorname{sen} u$ no ponto $u=\pi/6$. Indique as condições em que pode fazer esse cálculo. R: *Como as derivadas parciais são finitas as funções parciais são regulares e pode aplicar-se o teorema de* LAGRANGE *a cada uma delas; o contorno deverá estar mergulhado na vizinhança dada de* P.

$$\left[\frac{dz}{du}\right]_{u=\pi/6}=f'_x\left(e^{\pi/6},\operatorname{sen}\pi/6\right)e^{\pi/6}+ \\ +f'_y\left(e^{\pi/6},\operatorname{sen}\pi/6\right)\cos\pi/6\,;$$

para o cálculo deverá ser dada a função $f(x,y)$; *como* x *e* y *são funções diferenciáveis em* $\pi/6$, *falta apenas que a função* $f(x,y)$ *seja diferenciável no ponto corcorrespondente* $P\left(e^{\pi/6},\operatorname{sen}\pi/6\right)$.

3303 — Demonstre o teorema de D'ALEMBERT ou o lema que o precede. Prove que os zeros do polinómio $f(z)$ são todos isolados.

Decomponha em fracções simples a razão $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$.

R: $f(z)=(z-a)^p\varphi(z)$ *onde* $\varphi(a)\neq 0$ *e* $\varphi(z)$ *contínua para* $z=a$. *Devido à continuidade de* $\varphi(z)$ *existe um círculo centrado em* a *onde* $\varphi(z)$ *tal como* $\varphi(a)$ *é diferente de zero, e com* z *nesse círculo tambem* $f(z)\neq 0$. *O ponto* a *é zero isolado.*

Seja: $f(z)=p_0(z-a)^{\alpha}(z-b)^{\beta}\cdots(z-l)^{\lambda}$ *donde* $\log f(z)=\log p_0+\alpha\log(z-a)+\beta\log(z-b)+\cdots$ *e derivando*

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{\alpha}{z-a}+\frac{\beta}{z-b}+\cdots+\frac{\lambda}{z-l}.$$

3304 — Diga o que entende por composição linear de filas de uma matriz. Defina dependência e independência linear, e característica.

Descreva o conhecido processo de cálculo da característica e prove que: a característica conserva-se invariante com a operação de JACOBI.

Se A é uma matriz quadrada (por exemplo de ordem 3) com o determinante $|A|=0$ mas em que um elemento (por exemplo a_1^1) tem complemento algébrico significativo, prove a dependência linear das filas. R. *O processo de cálculo da característica é o da condensação da matriz. Do determinante da matriz* A *tiram-se com os teoremas de* LAPLACE

$$a_1^1A_1^1+a_2^1A_2^1+a_3^1A_3^1=|A|=0\,;\ a_1^2A_1^1+a_2^2A_2^1+ \\ +a_3^2A_3^1=0\,;\ \ a_1^3A_1^1+a_2^3A_2^1+a_3^3A_3^1=0$$

e somando convenientemente tem-se a igualdade matricial

$A_1^1[a_1^1,a_1^2,a_1^3]+A_2^1[a_2^1,a_2^2,a_2^3]+A_3^1[a_3^1,a_3^2,a_3^3]=[0,0,0]$ *ou* $\lambda_1L_1+\lambda_2L_2+\lambda_3L_3=\Theta$ *e por hipótese* $\lambda_1\neq 0$.

Soluções dos n.os 3300 a 3304 de J. Ribeiro de Albuquerque

I. S. C. E. F. — MATEMÁTICAS GERAIS — Exame final — 18-7-1954.

3305 — Determine k de modo que a equação $3x^4+4x^3-6x^2-12x+k=0$ admita uma raiz dupla. Calcule as raízes dessa equação. R: *Determine-se o* m. d. c. *entre* $P(x)=3x^4+4x^3-6x^2-12x+k$ *e* $P'(x)/12=x^3+x^2-x-1$, *utilizando para isso, o algoritmo usado na determinação da sucessão de* STURM, *até um resto independente de* x. *Então, temos*

$$\begin{array}{rccccc}
P(x)\cdots & 3 & 4 & -6 & -12 & k \\
P'(x)/12\cdots & 1 & 1 & -1 & -1 & (0) \\ \hline
 & -1 & 3 & 9 & -k & \\
-R\cdots & 4\,(1) & 8 & -k-1 & (0) & \\ \hline
 & 4\,(1) & -k+3 & 4 & & \\
-R_1\cdots & -k-5 & k+5 & & & \\
\dfrac{-1}{k+5}R_1\cdots & -1 & 1 & (0) & & \\ \hline
 & 12 & -k-1 & & & \\
-R_2\cdots & k-11 & & & &
\end{array}$$

Fazendo $k-11=0$ *vem* $k=11$. *O* m. d. c. $(P,P')=-x+1$ *dá-nos a raíz dupla* $x=1$, *de* $P(x)$. *Abaixando o grau de* $P(x)$ *pela regra de* RUFFINI *vem o polinómio* $3x^2+10x+11$, *que admite as raízes complexas* $x=-\dfrac{5}{3}\pm\dfrac{2\sqrt{2}}{3}i$.

3306 — Com um simples determinante resolve-se o seguinte problema: Determine a equação do plano que passa pelo ponto $P(1,-1,1)$ e que é perpendicular ao plano $\pi\equiv 2x+3y-4z=1$ e paralelo à recta $r\equiv\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z+1}{1}$. R: *Nas condições do enunciado temos o sistema:*

$$\begin{cases} A(x-1)+B(y+1)+C(z-1)=0 \\ 2A+3B-4C=0 \\ A+2B+C=0. \end{cases}$$

A condição para que este sistema (de equações homogéneas) tenha soluções não simultâneamente nulas é:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=0,$$

donde $11x-6y+z-18=0$, *que é a equação do plano pedido.*

3307 — Calcule um polinómio de grau não superior a 4 que represente aproximadamente a função $y = \cos x$ no intervalo $(-\pi, \pi)$. Ampliando a tabela das diferenças, qual o valor do polinómio correspondente a $-3\pi/2$? R: *Construamos a tabela das diferenças finitas:*

x	P (x)	Δ P (x)	Δ² P (x)	Δ³ P (x)	Δ⁴ P (x)
$-\pi$	-1	1	0	-2	4
$-\pi/2$	0	1	-2	2	
0	1	-1	0		
$\pi/2$	0	-1			
π	-1				

A fórmula de Gregory-Newton *dá-nos:*

$$P(x) = -1 + (x+\pi)\frac{1}{\pi/2} + \frac{(x-\pi)(x+\pi/2)\,x}{3!}\cdot$$

$$\cdot\frac{(-2)}{(\pi/2)^3} + \frac{(x+\pi)(x+\pi/2)\,x\,(x-\pi/2)}{4!}\cdot\frac{4}{(\pi/2)^4}$$

donde, $P(x) = \frac{8}{3\pi^4}x^4 - \frac{14}{3\pi^2}x^2 + 1$.

Note-se que este polinómio é só constituído por termos de grau par, o que era de esperar visto a função $\cos x$ *ser uma função par.*

Para calcular o valor de $P(-3\pi/2)$, *escreve-se na tabela o valor* $\Delta^4 P(-3\pi/2) = \Delta^4 P(-\pi) = 4$ *e determinam-se em seguida os valores:* $\Delta^3 P(-3\pi/2) = -6$, $\Delta^2 P(-3\pi/2) = 6$, $\Delta P(-3\pi/2) = -5$ *e finalmente* $P(-3\pi/2) = 4$.

Soluções dos n.os 3305 a 3307 de José J. Laginha

I. S. T. — Matemáticas Gerais — 2.º Exame de frequência ordinário — 10-6-1951.

I

3308 — Estudar e representar gràficamente a função: $y = x^2 \cdot e^{-x}$.

3309 — Calcule a soma da série: $\sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$.

R: *Note-se que o termo geral* u_n *é da forma:*

$$u_n = \log\frac{n(n+2)}{(n+1)^2} = \log\left(\frac{n}{n+1} : \frac{n+1}{n+2}\right) = \log\frac{n}{n+1} -$$

$$-\log\frac{n+1}{n+2} = \varphi(n) - \varphi(n+1).$$

Como $\lim_{n\to\infty}\varphi(n) = 0$ *tem-se* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \varphi(1) = \log\frac{1}{2} = -\log 2$.

3310 — Uma recta é tangente à curva $y = x^3 + x$ num ponto A e corta-a num ponto B. Determine o lugar geométrico dos pontos P que dividem o segmento $\overline{BA}$ segundo a razão de secção: $\frac{\overline{PB}}{\overline{PA}} = -2$.

R: *Seja a a abcissa de* A. *Tem-se então:* $A(a, a^3+a)$, $y'_a = 3a^2+1$ *e por equação da tangente* AB: $Y - a^3 - a = (3a^2+1)(X-a)$ *ou* $Y = (3a^2+1) \cdot X - 2a^3$. *As abcissas dos pontos de encontro de* AB *com a curva dada são as raizes da equação* $x^3 + x = (3a^2+1)x - 2a^3$, $x^3 - 3a^2x + 2a^3 = 0$, *ou ainda* $(x-a)^2(x+2a) = 0$. *É pois* $B(-2a, -8a^3-2a)$.

Seja $P(\xi, \eta)$. *O lugar dos pontos* P *tais que* $\frac{\overline{PB}}{\overline{PA}} = -2$ *é o de equação* $\frac{\sqrt{(\xi+2a)^2+(\eta+8a^3+2a)^2}}{\sqrt{(\xi-a)^2+(\eta-a^3-a)^2}} = -2$ *que representa uma circunferência.*

II

3311 — Defina e estude a função seno hiperbólico de variável real e complexa. Verifique, em particular, para variável complexa, se a função é analítica.

3312 — Desenvolva em série inteira a exponencial neperiana, determine o seu raio de convergência e diga como poderia fazer o cálculo numérico de e^3 com uma aproximação dada.

Que resulta da série exponencial por derivação ou integração?

3313 — Averigue em que condições o adjunto dum determinante completamente hemisimétrico é simétrico ou também completamente hemisimétrico.

3314 — Indique os principais tipos de equações reduzidas das cónicas e mostre qual o papel desempenhado pelos invariantes para o estabelecimento daquelas.

Interprete os diferentes casos de anulamento dos invariantes: cada um por si, e dois a dois, simultâneamente. Poderão anular-se, ao mesmo tempo, os três invariantes fundamentais?

Soluções dos n.os 3309 e 3310 de Manuel Zaluar.

CÁLCULO INFINITESIMAL

F. C. P. — Cálculo Infinitesimal — 3.º Exercício de revisão — 1950-51.

3315 — Integrar a equação

$$sh^2 x\, ch\, x \cdot y'' + sh\, x \cdot y' + 4\, ch^3 x \cdot y = 0$$

fazendo a mudança $t = sh\, x$. R:

$$\frac{dy}{dx} = \mathrm{ch}\, x \cdot \frac{dy}{dt}\,; \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \mathrm{sh}\, x \cdot \frac{dy}{dt} + \mathrm{ch}^2 x \frac{d^2 y}{dt^2}.$$

Substituindo, vem

$$t^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + t \frac{dy}{dt} + 4y = 0 \quad (\textit{Eq. de Euler}).$$

Fazendo $t = e^z$ *vem:*

$$(1) \qquad \frac{d^2 y}{dz^2} + 4y = 0.$$

Equação característica: $k^2 + 4 = 0$ *de raizes* $\begin{cases} k_1 = 2\,i \\ k_2 = -2\,i \end{cases}$.

Integral geral de (1)*:*

$$y = C_1 \operatorname{sen} 2\,z + C_2 \cos 2\,z\,.$$

Retomando a primitiva variável independente:

$$y = C_1 \operatorname{sen} 2 \log \mathrm{sh}\, x + C_2 \cos 2 \log \mathrm{sh}\, x$$

3316 — Integrar a equação $y = -xy' + \log y'$ e determinar a linha integral que passa na origem. R: *É uma equação de Lagrange. Fazendo* $y' = z$ *e derivando vem* $z = -z - xz' + z'/z$ *ou, tomando* z *para variável independente*

$$(1) \qquad 2\,zx' + x = 1/z \quad (\textit{eq. linear}).$$

Integral geral da equação sem 2.º membro: $x = cz^{-1/2}$. *Fazendo a variação da constante, vem*

$$\frac{dc}{dz} = \frac{1}{2} z^{-3/2} \textit{ donde } c = -z^{-1/2} + k$$

Integral geral de (1)*:* $x = -1/z + k/\sqrt{z}$. *O integral geral da equação dada fica definido por*

$$\begin{cases} x = -1/z + k/\sqrt{z} \\ y = -xz + \log z \end{cases}.$$

A linha integral pedida corresponde a $k = 1$.

3317 — Integrar $\begin{cases} y' + y + z = 0 \\ y + z + z' = -3\, sh\, x \end{cases}$.

R: *Eliminando* z *e* z' *entre estas duas equações e a que resulta por derivação da primeira vem:*

$$(1) \qquad y'' + 2\,y' = 3\,\mathrm{sh}\, x\,.$$

Integral geral da equação sem 2.º membro:

$$y = C_1 + C_2 e^{-2x}.$$

A equação completa admite uma solução particular da forma $y_1 = A\,\mathrm{sh}x + B\,\mathrm{ch}x$.

Por substituição em (1) *obtem-se* $A = -1$ *e* $B = 2$. *Donde*

$$\begin{cases} Y = C_1 + C_2 e^{-2x} - \mathrm{sh}\, x + 2\,\mathrm{ch}\, x \\ Z = -C_1 + C_2 e^{-2x} - \mathrm{sh}\, x - \mathrm{ch}\, x \end{cases}$$

esta última obtida da primeira equação do sistema dado.

A linha integral pedida, corresponde a $C_1 = -3/2$ *e* $C_2 = -1/2$.

Soluções dos n.os 3315 a 3317 de Rogério Nunes

I. S. T. — Cálculo Infinitesimal — 2.º Exame de frequência — Julho de 1951.

3318 — As duas curvas torsas

$$R \begin{cases} x = t^2 + 1 \\ y = t^2 + 2 \\ z = t^3 + 3 \end{cases} \qquad R' \begin{cases} x_1 = -2t^2 + 4 \\ y_1 = -2t^2 + 5 \\ z_1 = -2t^3 + 5 \end{cases}$$

têm um ponto comum P, para $t = 1$. Compare, nesse ponto, os respectivos triedros de Frénet e as curvaturas de flexão e torsão das duas curvas. R:

$$R \begin{cases} x = t^2 + 1 & x' = 2t & x'' = 2 \\ y = t^2 + 2 & y' = 2t & y'' = 2 \\ z = t^3 + 2 & z' = 3t^2 & z'' = 6t \end{cases}$$

$$R' \begin{cases} x_1 = -2t^2 + 4 & x_1' = -4t & x_1'' = -4 \\ y_1 = -2t^2 + 5 & y_1' = -4t & y_1'' = -4 \\ z_1 = -2t^3 + 5 & z_1' = -6t^2 & z_1'' = -12t \end{cases}.$$

1.º) *As tangentes em cada ponto das curvas correspondentes a um valor do parametro* t *são paralelas e de sentidos opostos. Como para* $t = 1$ *as curvas* R *e* R' *tem um ponto comum, segue-se que as tangentes são coincidentes em direcção e de sentidos opostos.*

2.º) *Os planos osculadores das curvas num ponto genérico são dados pelas equações*

$$\begin{vmatrix} X - (t^2 + 1) & Y - (t^2 + 2) & Z - (t^3 + 2) \\ 2t & 2t & 3t^2 \\ 2 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} X - (-2t^2 + 4) & Y - (-2t^2 + 5) & Z - (-2t^3 + 5) \\ -4t & -4t & -6t^2 \\ -4 & -4 & -12t \end{vmatrix} = 0$$

equações que simplificadas dão $X-Y+1=0$ *tanto para a 1.ª curva* R *como para a 2.ª curva* R' *donde se conclui que as curvas são planas e estão no mesmo plano*

$$X-Y+1=0.$$

Sendo as curvas planas, os seus triedros de Frénet *tem binormal constante que será* $(I-J)/\sqrt{2}$ *tanto para* R *como para* R'.

A torsão é nula para as 2 curvas, e a curvatura de flexão no ponto $(t=1)$ *comum às duas curvas é*

$$\frac{1}{\rho}=\frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{17^3}} \text{ para R, e } \frac{1}{\rho_1}=\frac{24\sqrt{2}}{\sqrt{17^3}} \text{ para R'}.$$

N. B. — *Também se poderia ver que as curvas eram planas por simples análise das equações das curvas: sendo para* R $x=t^2+1$ $y=t^2+2$ *tira-se por subtracção que* $y-x=1$ *que é a equação dum plano e identicamente para* R' $y-x=1$.

3319 — Mostrar que, se o volume V é limitado por uma superfície regular S, será

$$3V=\iint_S (x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\,dS$$

sendo α,β,γ os ângulos directores da normal exterior.

Verificar esta fórmula num cubo de aresta a e de faces paralelas aos planos coordenados. R: *Considere-se o vector* $\alpha=xI+yJ+zK$ *e aplique-se o teorema de* Ostrogradsky *para esse vector e para a superfície* S *em questão.*

Teremos:

$$\int_V \operatorname{div}\alpha\, dV-\int_S (\alpha\,|\,n)\, dS=$$
$$=\iint (x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\, dS$$

e como $\operatorname{div}\alpha=3$ *será*

$$3\int dV=3V=\iint (x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\, dS.$$

Considerando o cubo definido pelas equações das faces: $x=0, y=0, z=0, x=a, y=a, z=a$, *teremos, por exemplo, para as faces paralelas ao plano dos* yz

1.ª face $\begin{matrix} x=0\\ \cos\alpha=-1\\ \cos\beta=0\\ \cos\gamma=0\end{matrix}$ $\displaystyle\int_0^a\int_0^a x\cos\alpha\, dy\, dz=0$

2.ª fase $\begin{matrix} x=a\\ \cos\alpha=1\\ \cos\beta=0\\ \cos\gamma=0\end{matrix}$ $\displaystyle\int_0^a\int_0^a x\cos\alpha\, dy\, dz=a^3$

e para as 3 faces será $3V=3a^3$, *o que verifica a proposição do enunciado.*

3320 — Como se sabe, o integral completo da equação

1) $$z=px+qy+f(p,q)$$

é

2) $$z=ax+by+f(a,b)$$

sendo a e b constantes arbitrárias. Obtenha este mesmo resultado, aplicando à equação 1) o método de Charpit-Lagrange. R: *Do sistema das características da equação* $z=px+qy+f(p,q)$ *tira-se*

$$\frac{dx}{\dots}=\frac{dy}{\dots}=\frac{dz}{\dots}=\frac{dp}{0}=\frac{dq}{0}$$

donde $p=Cte=a$ *e* $q=Cte=b$.

Substituindo os valores de a *e* b *na equação proposta, porque* p, q *não são independentes mas sim ligados pela equação* 1) *tem-se* $z=ax+by+f(a,b)$ *que é o integral completo.*

Outro processo:

Querendo recorrer à integração da diferencial total ter-se-ia

$$dz=a\,dx+b\,dy$$

donde

$$z=ax+by+C$$

e essa constante C, *atendendo as relações*

$$p=\frac{\partial z}{\partial x}=a \quad q=\frac{\partial z}{\partial y}=b$$

e à equação proposta, só pode ser $C=f(a,b)$ *donde o integral completo*

$$z=ax+by+f(a,b).$$

3321 — Porque é que, na teoria da representação conforme, feita à custa do conceito de função analítica, são excepcionais os pontos z em que a derivada $f'(z)$ é nula? R: *Considerando 2 curvas* u *e* v *descritas pelo afixo de* z *no plano de* Argand, *curvas que tem um ponto comum* z_0 *em que as tangentes às curvas fazem os angulos* α_1 *e* α_2 *com o eixo dos* x, *o ângulo entre as duas curvas no ponto* z_0 *será* $\alpha_1-\alpha_2$.

Se $f(z)$ *é uma função analítica tal que* $f'(z_0)\neq 0$ *verifica-se, como se sabe:*

$$f(z)-f(z_0)=(z-z_0)\,f'(z_0)+\varepsilon$$

e ter-se-á

1) $$\lim_{z\to z_0}\arg\,[(f(z)-f(z_0)]=$$
$$=\lim\arg(z-z_0)+\arg f'(z_0)$$

2) $$\lim\frac{\operatorname{mod}[f(z)-f(z_0)]}{\operatorname{mod}[z-z_0]}=\operatorname{mod} f'(z_0)$$

De (1) *se tira para as curvas transformadas de* u *e* v *estão rodadas dum ângulo* $f'(z_0)$ *em relação a* u *e* v *e o ângulo que as curvas transformadas fazem no ponto* $f(z_0)$ *será igual ao de* u *e* v *no ponto* z_0 *e igual ainda a* $\alpha_1-\alpha_2$.

2.º) *Na vizinhança do ponto* $f(z_0)$ *as curvas transformadas são obtidas por homotetia das curvas* u *e* v, *homotetia de razão* $\operatorname{mod} f'(z_0)$

Anulando-se $f'(z_0)$ *e sendo* n *a ordem da derivada que não se anula no ponto* z_0, *ter-se-á pela fórmula de* TAYLOR

$$f(z)-f(z_0)=\frac{(z-z_0)^n}{n!}f^{(n)}(z_0)+\varepsilon,$$

donde

$$\lim_{z\to z_0}\arg|f(z_0)=f(z_0)|=$$
$$=n\lim\arg(z-z_0)+\arg f^{(n)}(z_0)$$

donde se conclui

1.º $$\lim_{z\to z_0}\arg[f(z)-f(z_0)]=$$
$$=n\lim\arg(z-z_0)+\arg f^{(n)}(z_0)$$

2.º $$\lim\frac{\operatorname{mod}[f(z)-f(z_0)]}{\operatorname{mod}(z-z_0)}=0$$

Portanto o ângulo das curvas transformadas será n *vezes o ângulo das curvas* u *e* v *e portanto* $n(\alpha_1-\alpha_2)$ *e a representação não é* conforme *nesse ponto.*

Resumindo: *Como a «conformidade» da transformação resulta da analiticidade da função* $f(z)$, *nos pontos onde* $f'(z)=0$ *será* $f'(z)$ *um complexo de módulo nulo e argumento indeterminado, e dessa indeterminação resulta a impossibilidade de tirarmos conclusões da igualdade* 1).

Soluções dos n.os 3318 a 3321 de J. do Quadros e Costa

MECÂNICA RACIONAL

I. S. A. — MECÂNICA RACIONAL E TEORIA GERAL DE MÁQUINAS — Alguns exercícios dos exames de frequência — 1950-1951.

3322 — Em relação ao triedro $0ijk\equiv 0xyz$, com $P(x,y,z)$, considere-se o campo vectorial $(\mathbf{v})$ definido pela função $\mathbf{v}(P)=y\,\mathrm{i}-z\,\mathrm{j}$. Calcular a circulação de $\mathbf{v}$ ao longo de um circuito λ traçado sobre o plano π que passa pelo ponto $Q=0+\mathrm{i}+\mathrm{j}+\mathrm{k}$ e é perpendicular ao vector $Q-0$. R: *Pelo teorema de* STOKES *a circulação é igual ao fluxo do rotacional de* $\mathbf{v}$ *através da área* σ *de que* λ *é o contorno total. Sendo* $\mathbf{N}=\operatorname{vers}(Q-0)=(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})/\sqrt{3}$ *o versor normal a* π *e* $\operatorname{rot}\mathbf{v}=\mathbf{i}-\mathbf{k}$ *vem* $\operatorname{rot}\mathbf{v}\,|\,\mathbf{N}=0$. *Logo a circulação é nula.*

3323 — Em relação ao triedro $0ijk\equiv 0xyz$, com $P(x,y,z)$, o campo vectorial $(\mathbf{v})$ é definido pela função $\mathbf{v}(P)=-xy^2\,\mathrm{i}+(y+z)\,\mathrm{k}$. Calcular o fluxo de $\mathbf{v}$ divergente do cubo, centrado em 0, de faces paralelas aos planos coordenados e com comprimento de aresta igual a 2. R: *Pelo teorema de* OSTROGRADSKI *o fluxo divergente do cubo de volume* τ *é igual a*

$$\int_\tau \operatorname{div}\mathbf{v}\,d\tau=\int_{-1}^{1}dx\int_{-1}^{1}dy\int_{-1}^{1}(1-y^2)\,dz=\frac{16}{3}.$$

3324 — Em relação ao triedro $0\,e_1\,e_2\,e_3$, considere-se a recta R de equação $P=0+\gamma(e_1-e_2)$ e os cursores: $A_1\mathbf{v}_1=(1,2,0)\,(2e_2+e_3)$ e $A_2\mathbf{v}_2=(0,1,1)\,(e_1+e_2)$. Determinar $A_3\mathbf{v}_3$, tendo R por suporte e tal que o torsor $T=A_1\mathbf{v}_1+A_2\mathbf{v}_2+A_3\mathbf{v}_3$ seja equivalente a um vector deslizante. R: *Sendo* R *o suporte de* $A_3\mathbf{v}_3$ *podemos escrever* $A_3\mathbf{v}_3=(1,-1,0)[k(e_1-e_2)]$. *As coordenadas de* T *em relação a* A_1 *são*

$$\begin{cases}\mathbf{v}=(1+k)\,e_1+(3-k)\,e_2+e_3\\ \mathbf{u}_{A_1}=-e_1+e_2+3k\,e_3.\end{cases}$$

Para que T *satisfaça ao enunciado terá de ser* $\mathbf{N}\,|\,\mathbf{u}_{A_1}=0$, *com* $\mathbf{v}\neq 0$. *Donde* $k=-2$ e $A_3\mathbf{v}_3=(1,-1,0)\,(-2e_1+2e_2)$.

3325 — O ponto P tem movimento rectilíneo. Sabe-se que a velocidade algébrica está relacionada com o tempo pela equação $v=(at+b)\,t$, que o espaço percorrido entre os instantes $t_1=1s$ e $t_2=3s$ vale 2m e que a aceleração é nula no instante t_1. Calcular a velocidade no instante t_2. R: *Sendo* $v=\frac{ds}{dt}=(at+b)\,t$ *vem* $s=\frac{a}{3}t^3+\frac{b}{2}t^2+s_0$ *e, como o movimento é rectilíneo,* $j=\frac{dv}{dt}=2at+b$. *Atendendo às condições do enunciado teremos:*

$$\begin{cases}s(t_2)-s(t_1)=\frac{a}{3}(t_2^3-t_1^3)+\frac{b}{2}(t_2^2-t_1^2)=2\\ j(t_1)=2a\,t_1+b=0.\end{cases}$$

Donde

$$\begin{cases}a=3\\ b=-6\end{cases}\quad e\quad v(t_2)=9\,\mathrm{m/s}.$$

3326 — Sobre o plano fixo $0xy\equiv 0ij$ move-se uma figura invariável plana, cujos pontos A e B têm por trajectórias respectivas o eixo $0x$ e a recta de equação vectorial $Q=0+\gamma(\mathrm{i}+\mathrm{j})$. Sabe-se que, em determinado instante, a abcissa da posição B_0 de B vale 3m e a da posição A_0 de A é igual a 4m. Se B passar por B_0 com a velocidade de 1,414 m/s, com que velocidade passará A por A_0? R: *Determina-se o* c. i. r., I, *procurando o ponto de encontro das rectas* $P=0+4\mathrm{i}+u\,\mathrm{j}$ e $Q=0+(3+\lambda)\,\mathrm{i}+(3-\lambda)\,\mathrm{j}$, *normais às trajectórias de* A *e* B *correspondentes às suas posições no instante considerado. Vem* I(4,2). *Sabendo que*

$$\frac{V(A_0)}{V(B)_0}=\frac{\overline{IA_0}}{\overline{IB_0}}\quad teremos\quad V(A_0)=\frac{\overline{IA_0}}{\overline{IB_0}}\,V(B_0)=2\,\mathrm{m/s}.$$

3327 — Demonstrar que o centro de gravidade de 3 pontos materiais — A, B e C —, de massas iguais, coincide com o baricentro da superfície homogénea do triângulo ABC.

3328 — As coordenadas vectoriais do torsor velocidade do sólido S, em relação ao triedro fixo $0\,\mathbf{e}_1\,\mathbf{e}_2\,\mathbf{e}_3$, são

$$\Omega = (t+1)\,\mathbf{e}_1 + (t^2-1)\,\mathbf{e}_2 + (t^3+1)\,\mathbf{e}_3$$
$$\text{e} \quad \mathrm{O}' = (t-1)\,\mathbf{e}_1 - (t^3+1)\,\mathbf{e}_2 + (t^2-1)\,\mathbf{e}_3\,.$$

Determinar os instantes em que o acto do movimento é de translação e aqueles em que ele é de rotação. Para os primeiros, achar a velocidade de translação. Para os segundos, escrever as equações dos respectivos eixos instantâneos de rotação. R: *O movimento é de translação se o torsor velocidade instantânea for redutivel a um conjugado; de rotação se for redutivel a um vector deslizante. Em qualquer caso será* $\Omega \mid \mathrm{O}' = 0$, *o que se verifica nos instantes* $t = \mp 1$. *Para* $t = -1$ *vem* $\begin{cases} \Omega = 0 \\ \mathrm{O}' = -2\,\mathbf{e}_1\,; \end{cases}$ *o movimento é uma translação de velocidade* $\mathbf{v} = -2\,\mathbf{e}_1$. *Para* $t = 1$ *vem* $\begin{cases} \Omega = 2\,\mathbf{e}_1 + 2\,\mathbf{e}_3 \\ \mathrm{O}' = -2\,\mathbf{e}_2\,; \end{cases}$ *o movimento é de rotação e a equação vectorial do correspondente eixo instantâneo de rotação é* $\mathrm{Q} = 0 + (\lambda + 1)\,\mathbf{e}_1 + \lambda\,\mathbf{e}_3$.

3329 — Sabendo que o momento de inércia em relação a um diâmetro do círculo homogéneo (densidade ρ) de raio r vale $\rho\pi r^4/4$, determinar o momento quadrático em relação ao eixo do tronco de cilindro de revolução homogéneo de densidade ρ, raio da base r e altura h. R: $\rho\pi h r^4/2$.

Soluções dos n.os 3322 a 3329 de Zozimo Pimenta de Castro do Rego

PROBLEMAS

Com o próximo n.º 50, completa a Gazeta de Matemática 12 anos de existência.

É já longa e rica a experiência adquirida; impõe-se, porém, mais do que nunca, uma atitude retrospectiva, afim de se evitar de futuro, e o melhor possível, certos erros cometidos.

Assim, já no n.º 1 se definiu o objectivo da Gazeta de Matemática: — «pretende ser ela um instrumento de trabalho e um guia para os estudantes de Matemática das Escolas Superiores portuguesas num campo onde eles encontram, por ventura, as maiores dificuldades — o campo da preparação prática».

Se em parte este objectivo foi atingido, o que é verdade é que existem lacunas que é necessário preencher. Estas lacunas são provenientes, segundo parece à Redacção, de:

1.º — Resultados imcompletos do inquérito aos leitores, aberto nos n.os 10 e 11, sobre, «O Que Pensa da Gazeta de Matemática?».

2.º — Desinteresse da parte de muitos professores de matemática pela Gazeta de Matemática.

Realmente, para a G. M. se aproximar do objectivo atraz recordado, é necessário haver uma permanente colaboração entre leitores e Redacção, principalmente no sentido daqueles manifestarem a esta os seus desejos, as suas necessidades.

Além disso, a existência de professores de matemática dos Ensinos Secundário e Superior que não acompanham a única revista portuguesa dedicada ao ensino da matemática, como conviria e desejaria a G. M., prova:

Ou a não realização da parte da G. M. dos objectivos em vista;

Ou o desinteresse desses professores por um aspecto importante do mesmo ensino.

Qualquer destas duas alternativas revela uma situação que urge melhorar.

Mais do que nunca se torna necessário que esses professores apontem qual o caminho a seguir, quais as modificações a fazer na nossa revista.

Tenciona a Redacção, a partir do próximo número de Janeiro abrir duas secções permanentes:

Inquérito aos Leitores, baseado nos termos expostos no n.º 11, pág. 29.

Concurso de Problemas.

O concurso constará de 3 secções:

Elementar — com problemas ao nível do ensino secundário.

Média — com problemas ao nível da disciplina de Cálculo Infinitesimal.

Superior — destinado a alunos com a cadeira de Análise Superior, licenciados e professores de matemática.

A seguir apresenta-se um projecto de regulamento do concurso e dois problemas tipos de cada secção com sugestões para a sua resolução.

Projecto de regulamento

1 — É aberto um concurso, entre os leitores da G. M., de problemas propostos pela Redacção, dividido em 3 secções: *a*) Elementar, *b*) Média e *c*) Superior.

2 — Cada solucionista poderá concorrer a uma ou a todas as secções.

3 — O concurso, em cada secção, consistirá na resolução de 8 problemas publicados em números sucessivos da G. M., dois em cada número.