3327 — Demonstrar que o centro de gravidade de 3 pontos materiais — A, B e C —, de massas iguais, coincide com o baricentro da superfície homogénea do triângulo ABC.

3328 — As coordenadas vectoriais do torsor velocidade do sólido S, em relação ao triedro fixo $0\,\mathbf{e}_1\,\mathbf{e}_2\,\mathbf{e}_3$, são

$$\Omega = (t+1)\,\mathbf{e}_1 + (t^2-1)\,\mathbf{e}_2 + (t^3+1)\,\mathbf{e}_3$$
$$\text{e} \quad O' = (t-1)\,\mathbf{e}_1 - (t^3+1)\,\mathbf{e}_2 + (t^2-1)\,\mathbf{e}_3 .$$

Determinar os instantes em que o acto do movimento é de translação e aqueles em que ele é de rotação. Para os primeiros, achar a velocidade de translação. Para os segundos, escrever as equações dos respectivos eixos instantâneos de rotação. R: *O movimento é de translação se o torsor velocidade instantânea for redutivel a um conjugado; de rotação se for redutivel a um vector deslizante. Em qualquer caso será* $\Omega \mid O' = 0$, *o que se verifica nos instantes* $t = \mp 1$. *Para* $t = -1$ *vem* $\begin{cases} \Omega = 0 \\ O' = -2\,\mathbf{e}_1 \end{cases}$; *o movimento é uma translação de velocidade* $\mathbf{v} = -2\,\mathbf{e}_1$. *Para* $t = 1$ *vem* $\begin{cases} \Omega = 2\,\mathbf{e}_1 + 2\,\mathbf{e}_3 \\ O' = -2\,\mathbf{e}_2 \end{cases}$; *o movimento é de rotação e a equação vectorial do correspondente eixo instantâneo de rotação é* $Q = 0 + (\lambda + 1)\,\mathbf{e}_1 + \lambda\,\mathbf{e}_3$.

3329 — Sabendo que o momento de inércia em relação a um diâmetro do círculo homogéneo (densidade ρ) de raio r vale $\rho\pi r^4/4$, determinar o momento quadrático em relação ao eixo do tronco de cilindro de revolução homogéneo de densidade ρ, raio da base r e altura h. R: $\rho\pi h r^4/2$.

Soluções dos n.os 3322 a 3329 de Zozimo Pimenta de Castro do Rego

PROBLEMAS

Com o próximo n.º 50, completa a Gazeta de Matemática 12 anos de existência.

É já longa e rica a experiência adquirida; impõe-se, porém, mais do que nunca, uma atitude retrospectiva, afim de se evitar de futuro, e o melhor possível, certos erros cometidos.

Assim, já no n.º 1 se definiu o objectivo da Gazeta de Matemática: — «pretende ser ela um instrumento de trabalho e um guia para os estudantes de Matemática das Escolas Superiores portuguesas num campo onde eles encontram, por ventura, as maiores dificuldades — o campo da preparação prática».

Se em parte este objectivo foi atingido, o que é verdade é que existem lacunas que é necessário preencher. Estas lacunas são provenientes, segundo parece à Redacção, de:

1.º — Resultados imcompletos do inquérito aos leitores, aberto nos n.os 10 e 11, sobre, «O Que Pensa da Gazeta de Matemática?».

2.º — Desinteresse da parte de muitos professores de matemática pela Gazeta de Matemática.

Realmente, para a G. M. se aproximar do objectivo atraz recordado, é necessário haver uma permanente colaboração entre leitores e Redacção, principalmente no sentido daqueles manifestarem a esta os seus desejos, as suas necessidades.

Além disso, a existência de professores de matemática dos Ensinos Secundário e Superior que não acompanham a única revista portuguesa dedicada ao ensino da matemática, como conviria e desejaria a G. M., prova:

Ou a não realização da parte da G. M. dos objectivos em vista;

Ou o desinteresse desses professores por um aspecto importante do mesmo ensino.

Qualquer destas duas alternativas revela uma situação que urge melhorar.

Mais do que nunca se torna necessário que esses professores apontem qual o caminho a seguir, quais as modificações a fazer na nossa revista.

Tenciona a Redacção, a partir do próximo número de Janeiro abrir duas secções permanentes:

Inquérito aos Leitores, baseado nos termos expostos no n.º 11, pág. 29.

Concurso de Problemas.

O concurso constará de 3 secções:

Elementar — com problemas ao nível do ensino secundário.

Média — com problemas ao nível da disciplina de Cálculo Infinitesimal.

Superior — destinado a alunos com a cadeira de Análise Superior, licenciados e professores de matemática.

A seguir apresenta-se um projecto de regulamento do concurso e dois problemas tipos de cada secção com sugestões para a sua resolução.

Projecto de regulamento

1 — É aberto um concurso, entre os leitores da G. M., de problemas propostos pela Redacção, dividido em 3 secções: *a*) Elementar, *b*) Média e *c*) Superior.

2 — Cada solucionista poderá concorrer a uma ou a todas as secções.

3 — O concurso, em cada secção, consistirá na resolução de 8 problemas publicados em números sucessivos da G. M., dois em cada número.

4 — As soluções devem ser apresentadas até ao fim do trimestre a que respeita o número da G. M. em que saíram os problemas, afim de serem publicadas as melhores no mais próximo número em que for possível (em geral no segundo número posterior à publicação do problema).

5 — As soluções deverão ser apresentadas em folhas soltas e escritas de um só lado e cada folha só conterá um problema, e indicará o nome do solucionista.

a) Os símbolos deverão ser escritos à mão.

b) Os desenhos deverão ser apresentados em folhas separadas e cobertos a tinta da China, com indicação do problema a que se referem e o nome do autor da solução.

6 — Serão atribuídos prémios, estabelecidos no início de cada concurso, aos melhores solucionistas que, em cada secção, apresentem pelo menos 6 soluções certas.

Serão indicados em cada número todos os solucionistas dos problemas anteriores.

A G. M. desejaria que os seus leitores se manifestassem sobre este regulamento e enviassem também à Redacção as suas sugestões, quanto à natureza e grau de dificuldade dos problemas, de que damos junto exemplos.

PROBLEMAS

3330 — *Se* $b+c>a>0$ e $b^2+c^2=a^2$, prove que $a^3>b^3+c^3$. R: *Como* $b+c>0$, *então, e sem perda de generalidade, podemos supor que*

$$b>0 \quad e \quad c>0 \qquad (1)$$

ou

$$b>0 \quad e \quad c<0 \qquad (2)$$

Como $(a-b)(a+b)=c^2$ *qualquer que seja* c *será sempre*

$$a-b>0 \quad ou \quad a>b \qquad (3)$$

Se $c>0$ *conclue-se anàlogamente*

$$a>c \qquad (4)$$

relação que se verifica ainda quando $c<0$.

Em qualquer caso é portanto $a>b$ *e* $a>c$, *donde* $a\cdot b^2>b^3$, *e* $a\cdot c^2>c^3$, *ou* $a(b^2+c^2)>b^3+c^3$, *e, finalmente* $a^3>b^3+c^3$.

É fácil ver que b *e* c *são diferentes de zero.*

3331 — Considere três esferas cujos raios medem respectivamente 4, 5 e 6 cm., tangentes entre si duas a duas e todas tangentes ao mesmo plano α. Considere ainda uma quarta esfera, tangente às três anteriores, cujo raio mede 3 cm. Determine a distância do centro da quarta esfera ao plano α. R: *Considere-se um sistema de eixos ortogonais sendo* α *o plano dos* xy *e passando o eixo dos* zz *pelo centro da esfera de raio 4 cm. As coordenadas dos centros das esferas serão:* $P_1(0,0,4)$, $P_2(x_1,0,5)$, $P_3(x_2,y_2,6)$ $Q(x_3,y_3,z_3)$, *se o plano dos* xz *passar pelos centros das esferas de raios 4 e 5 cm.*

A distância pedida será $|z_3|$.

Como as distâncias entre os centros das três primeiras esferas são respectivamente:

$$\overline{P_1P_2}=9;\quad \overline{P_1P_3}=10 \quad e \quad \overline{P_2P_3}=11$$

conclue-se que $x_1^2+1=81$, $x_1=4\sqrt{5}$; $x_2^2+y_2^2+4=100$, $x_2^2+y_2^2=96$; *e* $(x_2-4\sqrt{5})^2+y_2^2+1=121$, *o que dá* $x_2=7:\sqrt{5}$ *e* $y_2=\sqrt{431:5}$

Por outro lado como é $\overline{P_1Q}=7$; $\overline{P_2Q}=8$ *e* $\overline{P_3Q}=9$ *conclue-se que*

$$x_3^2+y_3^2+(z_3-4)^2=49$$

$$(x_3-4\sqrt{5})^2+y_3^2+(z_3-5)^2=64$$

$$(x_3-7:\sqrt{5})^2+(y_3-\sqrt{431:5})^2+(z_3-6)^2=81$$

sistema que resolvido dá o valor de $|z_3|$.

3332 — Determinar as raízes da equação cúbica $f(x)=0$ para a qual as duas áreas limitadas por $y=f(x)$ e pelo eixo dos xx são números inteiros. R: *Sejam* $\alpha_1<\alpha_2<\alpha_3$ *as raízes da equação e ponhamos* $\alpha_1+h=\alpha_2$ *e* $\alpha_2+k=\alpha_3$.

Por outro lado a equação da cúbica poderá escrever-se: $\quad y=a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)$

e as áreas pedidas A_1 *e* A_2 *serão dadas por*

$$A_1=\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x)\,dx = a(\alpha_1-\alpha_2)(2\alpha_3-\alpha_1-\alpha_2)/12 = a\,h^3(h+2k)/12$$

e

$$A_2=\int_{\alpha_2}^{\alpha_3} f(x)\,dx = -a\,k^3(2h+k)/12 .$$

Para que A_1 *e* A_2 *sejam números inteiros é necessário que* $a\,h^3(h+2k)$ *e* $-a\,k^3(2h+k)$ *sejam múltiplos de 12. Se for* $a=1$, h *e* k *devem ser inteiros e ambos da mesma forma* $6m$, $6m+2$ *ou* $6m+4$, *e nestes casos as raízes de* $f(x)=0$ *serão:*

$$\begin{array}{lll} b-6p, & b, & b+6q \\ b-6p-2, & b, & b+6q+2 \\ b-6p-4, & b, & b+6q+4, \end{array}$$

onde b *é real e* p *e* q *são inteiros.*

3333 — Dá-se à recta $x=az+p$, $y=bz+q$ uma rotação θ, no sentido positivo, em torno de Oz. Determinar θ de modo que as direcções primitiva e final sejam perpendiculares.

3334—Provar que as raízes da equação $f(i,-iz)=0$ são os afixos dos focos reais da curva de equação tangencial $f(m,p)=0$ ($y=mx+p$ equação da tangente à curva). R: *Se a tangente for* $Y-y=m(X-x)$, *será* $p=Y-mX$. *Mas dos focos podem tirar-se tangentes de coeficientes angulares* $\pm i$. *Então*

$$p=Y-iX=-iz.$$

3335 — Faz-se a projecção estereográfica duma esfera de raio unidade sobre o plano (z) do equador, tomando como centro de projecção um dos polos; a origem de z é o centro da esfera. Provar que os afixos z_1 e z_2 das projecções de dois pontos diametralmente opostos sobre a esfera verificam a relação $z_2\bar{z}_1=-1$. R: *Sejam* $M_1(\xi_1,\eta_1,\zeta_1)$ *e* $M_2(\xi_2,\eta_2,\zeta_2)$ *os pontos e* $z_1(x_1,y_1)$ *e* $z_2(x_2,y_2)$ *as respectivas projecções,*

$$x=\frac{\xi}{1-\zeta}\qquad y=\frac{\eta}{1-\zeta};$$

de $\xi^2+\eta^2+\zeta^2=1$ *temos*

$$\xi_i=\frac{2x}{\Delta_i+1}\qquad \eta_i=\frac{2y}{\Delta_i+1}\qquad (\Delta_i=x_i^2+y_i^2).$$

Então

$$\frac{x_2}{x_1}=\frac{y_2}{y_1}=-\frac{\Delta_2+1}{\Delta_1+1}=\rho \quad \textit{donde} \quad \Delta_1^2\rho^2+(\Delta_1+1)\rho+1=0.$$

$$\frac{x_2}{x_1}=\frac{y_2}{y_1}=\frac{-1}{x_1^2+y_1^2}\qquad \frac{z_2}{z_1}=\frac{1}{x_1^2+y_1^2}\qquad e \qquad z_2\bar{z}_1=-1.$$

BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de Matemática de que os Autores ou Editores enviarem dois exemplares à Redacção.

89 — STIGANT, S. AUSTEN — **Modern Electrical Engineering Mathematics** — Hutchinson's Scientific and Technical Publications, 1946.

O desenvolvimento extraordinário que têm tomado nos últimos anos numerosas aplicações da Electricidade levanta problemas cuja solução exige o recurso a técnicas de Matemática cada vez mais dedicadas. E nem só a obtenção de resultados num ou noutro problema impõe a utilização de novas técnicas de cálculo: assiste-se também a uma revisão dos métodos por que eram abordadas até aqui muitas questões de electrotecnia com o objectivo de procurar tratá-las com mais simplicidade, mais elegância e mais generalidade.

Tal objectivo tem sido atingido de várias formas: simplificando a tradução analítica dos problemas; uniformizando o tratamento de questões com estruturas semelhantes (quer dentro da electrotecnia quer pertencendo a domínios diferentes); simplificando os cálculos numéricos.

E assim, vemos a teoria das matrizes, a teoria dos grupos e a topologia aplicadas no estudo das rêdes; o cálculo tensorial e a geometria dos espaços de Riemann, no estudo das máquinas rotativas e das rêdes; o cálculo simbólico de Heaviside, no estudo de todos os regimes transitórios; o cálculo das probabilidades e a teoria das funções aleatórias, nos problemas de telecomunicações e na recente teoria da informação; a geometria do espaço de Hilbert, na interpetação de certas propriedades dos regimes periódicos não sinusoidais e dos regimes impulsivos (onde a teoria das distribuições de Schwartz poderá vir a prestar relevantes serviços); etc., etc.

O livro de S. Stigant contém a exposição elementar de algumas das aplicações menos vulgarizadas da matemática a problemas de electrotecnia.

Trata-se duma obra muito acessível, sem preocupações de rigor, constituindo uma excelente introdução a trabalhos mais especializados.

Não queremos deixar, contudo, de lhe fazer alguns reparos de caracter geral.

Assim, a insistência no enunciado de *regras* torna-se por vezes desagradável. Também se exagerou na apresentação de muitos resultados dum ponto de vista estritamente formal, pondo de parte quaisquer considerações de natureza crítica e demonstrativa.

Parecem-nos ainda deslocados, num livro do género deste, os capítulos de análise dimensional e aquele em que o Autor expõe o que chama «the per-unit method», que consiste em referir as grandezas físicas a uma unidade convenientemente escolhida em cada caso. É bem conhecida a utilidade deste último método em certas questões de electrotecnia, nomeadamente no estudo dos defeitos assimétricos nas redes trifásicas, mas afigura-se-nos desproporcionado dedicar-lhe um capítulo numa obra como esta.

No entanto o caracter de inovação que informa todo o livro compensa largamente os pequenos defeitos que lhe acabamos de apontar, tornando-o francamente recomendável aos estudantes de física e de electrotecnia.

Segue-se a lista dos nomes dos capítulos: Plane vector operators; Complex angles; Determinants; Matrices; Engineering examples of matrice theory; Dyadics; Tensors; The index notation in electrical engineering tensors; Tensor concepts in electrical