

gente à curva). R: *Se a tangente for*  $Y - y = m(X - x)$ , será  $p = Y - mX$ . Mas dos focos podem tirar-se tangentes de coeficientes angulares  $\pm i$ . Então

$$p = Y - iX = -iz.$$

**3335** — Faz-se a projecção estereográfica duma esfera de raio unidade sobre o plano ( $z$ ) do equador, tomando como centro de projecção um dos polos; a origem de  $z$  é o centro da esfera. Provar que os afixos  $z_1$  e  $z_2$  das projecções de dois pontos diametralmente opostos sobre a esfera verificam a relação  $z_2 \bar{z}_1 = -1$ . R: *Sejam*  $M_1 (\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$  e  $M_2 (\xi_2, \eta_2, \zeta_2)$

os pontos e  $z_1 (x_1, y_1)$  e  $z_2 (x_2, y_2)$  as respectivas projecções,

$$x = \frac{\xi}{1-\zeta} \quad y = \frac{\eta}{1-\zeta};$$

de  $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$  temos

$$\xi_1 = \frac{2x}{\Delta_1 + 1} \quad \eta_1 = \frac{2y}{\Delta_1 + 1} \quad (\Delta_1 = x_1^2 + y_1^2).$$

Então

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1} = -\frac{\Delta_2 + 1}{\Delta_1 + 1} = \rho \quad \text{donde} \quad \Delta_1^2 \rho^2 + (\Delta_1 + 1)\rho + 1 = 0.$$

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1} = \frac{-1}{x_1^2 + y_1^2} \quad \frac{z_2}{z_1} = \frac{1}{x_1^2 + y_1^2} \quad \text{e} \quad z_2 \bar{z}_1 = -1.$$

## BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de Matemática de que os Autores ou Editores enviarem dois exemplares à Redacção.

**89** — STIGANT, S. AUSTEN — **Modern Electrical Engineering Mathematics** — Hutchinson's Scientific and Technical Publications, 1946.

O desenvolvimento extraordinário que têm tomado nos últimos anos numerosas aplicações da Electricidade levanta problemas cuja solução exige o recurso a técnicas de Matemática cada vez mais dedicadas. E nem só a obtenção de resultados num ou noutro problema impõe a utilização de novas técnicas de cálculo: assiste-se também a uma revisão dos métodos por que eram abordadas até aqui muitas questões de electrotecnia com o objectivo de procurar tratá-las com mais simplicidade, mais elegância e mais generalidade.

Tal objectivo tem sido atingido de várias formas: simplificando a tradução analítica dos problemas; uniformizando o tratamento de questões com estruturas semelhantes (quer dentro da electrotecnia quer pertencendo a domínios diferentes); simplificando os cálculos numéricos.

E assim, vemos a teoria das matrizes, a teoria dos grupos e a topologia aplicadas no estudo das redes; o cálculo tensorial e a geometria dos espaços de RIEMANN, no estudo das máquinas rotativas e das redes; o cálculo simbólico de Heaviside, no estudo de todos os regimes transitórios; o cálculo das probabilidades e a teoria das funções aleatórias, nos problemas de telecomunicações e na recente teoria da informação; a geometria do espaço de HILBERT, na interpretação de certas propriedades dos regimes periódicos não sinusoidais e dos regimes impulsivos (onde a teoria das distribuições de SCHWARTZ poderá vir a prestar relevantes serviços); etc., etc.

O livro de S. STIGANT contém a exposição elementar de algumas das aplicações menos vulgarizadas da matemática a problemas de electrotecnia.

Trata-se duma obra muito acessível, sem preocupações de rigor, constituindo uma excelente introdução a trabalhos mais especializados.

Não queremos deixar, contudo, de lhe fazer alguns reparos de caracter geral.

Assim, a insistência no enunciado de regras torna-se por vezes desagradável. Também se exagerou na apresentação de muitos resultados dum ponto de vista estritamente formal, pondo de parte quaisquer considerações de natureza crítica e demonstrativa.

Parecem-nos ainda deslocados, num livro do género deste, os capítulos de análise dimensional e aquele em que o Autor expõe o que chama «the per-unit method», que consiste em referir as grandezas físicas a uma unidade convenientemente escolhida em cada caso. É bem conhecida a utilidade deste último método em certas questões de electrotecnia, nomeadamente no estudo dos defeitos assimétricos nas redes trifásicas, mas afigura-se-nos desproporcionado dedicar-lhe um capítulo numa obra como esta.

No entanto o caracter de inovação que informa todo o livro compensa largamente os pequenos defeitos que lhe acabamos de apontar, tornando-o francamente recomendável aos estudantes de física e de electrotecnia.

Segue-se a lista dos nomes dos capítulos: Plane vector operators; Complex angles; Determinants; Matrices; Engineering examples of matrice theory; Dyadics; Tensors; The index notation in electrical engineering tensors; Tensor concepts in electrical

engineering; The mechanism of tensor equations; Typical three-phase mesh network transformations tensors; Symmetrical components; The Heaviside operational calculus; Dimensional analysis; The per-unit method; The tensor calculus; The method of dimensions and the per-unit method; The steady state and transient responses of a network to excitation; Transient phenomena in switching parallel-connected capacitors.

O livro contém numerosas referências bibliográficas.

Fernando Soares David

### 90 — RIO NOGUEIRA — Contribuição à Teoria da Capitalização — Rio de Janeiro, 1949.

Constitui este trabalho a «tese de inscrição ao concurso para a cadeira de Complementos de Matemática e Matemática Financeira» na Faculdade de Ciências Económicas do Rio de Janeiro.

O objectivo essencial desta tese é, segundo o autor, «o estudo dos planos de capitalização em moldes mais gerais». É também da Introdução àquele trabalho o seguinte período: «Reconhecendo indispensável ao tratamento geral, a extensão das ideias básicas da Matemática Financeira, aborda nas duas primeiras partes questões centrais da Teoria da Capitalização e dos Empréstimos Aleatórios, onde são introduzidas probabilidades na exigibilidade de valores». E ainda: «Desde o início, conceitos e proposições compreendem os habituais e simplificam os múltiplos casos particulares; por serem aplicados a problemas mais gerais, as demonstrações seguem linha original...».

A leitura destes períodos deixa a impressão de que o autor vai apresentar uma generalização de conceitos básicos ou a introdução de conceitos novos com vista a uma mais perfeita estruturação teórica das matérias versadas. Porém, a leitura dos diferentes capítulos não confirma aquela impressão inicial. Com efeito, no Capítulo I, em que é abordada a Teoria da Capitalização, o autor define capitalização certa nos mesmos moldes em que tem sido definida e define capitalização aleatória pela mesma forma que em seguros se define, limitando-se apenas a não concretizar o acontecimento fortuito que pode importar a exigibilidade do capital. Dentro desta linha considera a segunda como mais geral do que a primeira por conter esta quando for igual a 1 a probabilidade do acontecimento que torna exigível o capital.

Desta forma temos de concluir que o trabalho não corresponde à orientação definida pelo autor na Introdução. O que há, sim, é uma exposição com uma característica pessoal, pois nos capítulos seguintes,

que decorrem como consequência natural do primeiro, também se não introduz matéria nova; apenas se fazem aplicações à resolução de problemas.

É ainda da Introdução esta passagem: «A deficiência quase completa de bibliografia, a importância prática do problema que impõe actualmente a competição entre os actuários, levou o autor a explorar este campo de um ângulo mais elevado». Esta passagem é infeliz, pois os Boletins das Associações de actuários publicados em diversos países (Suíça, Itália, Países Bálticos, Tchecoslováquia, etc.) negam o que nela se contém. Isto para não falarmos já em livros da especialidade.

Feita em termos acessíveis e com um fim didático que o autor lhe quiz imprimir, a exposição não é isenta de imperfeições, quer em esclarecimento de conceitos quer mesmo do ponto de vista de análise. Só a título de exemplo mencionaremos as seguintes:

Para justificar o uso da expressão *força de juros* limita-se a dizer que é imprópria a denominação *taxa instantânea de capitalização*. Da mesma forma dá preferência a *força de ocorrência* e *força de mortalidade*. É muito possível que o autor tenha para isso as suas razões, mas em trabalho com um fim didático tais razões deveriam ser apresentadas...

É frequente, quanto a rendas, o uso e abuso do termo *antecipado*, imprópriamente usado dado o seu significado próprio internacionalmente aceite. Assim, por exemplo, o autor fala em rendas antecipadas por tal forma que parece excluir a existência de rendas imediatas. Vai mesmo ao ponto de qualificar de *antecipado* o seguro vitalício (vida inteira) e o seguro temporário. Porquê?

O autor define valor de uma renda (antecipada) por

$$R_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\infty} k_{0, \theta - \varepsilon} dS(\theta)$$

onde  $S(\theta)$  é a soma dos termos da renda vencíveis no intervalo  $(0, \theta)$  e considera as hipóteses  $S(\theta) = 0$  se  $\theta < 0$  e  $S(\theta) > 0$  se  $\theta > 0$ . Mas nada diz quando  $\theta = 0$ .

Diz o autor que sendo  $p_{\varepsilon, t}$  a probabilidade de um acontecimento se dar no intervalo  $(\varepsilon, t)$  e sendo neste derivável, é  $\mu_{\varepsilon}(t) = -p'_{\varepsilon, t}/p_{\varepsilon, t}$  a força de ocorrência. E a seguir: «Se é descontínua nos pontos de uma sucessão crescente  $t_1 < t_2 < t_3 < \dots < t_i < \dots$ , a força média de ocorrência em  $[t_i, t_{i+1})$  pode ser definida pela fórmula

$$\mu_{\varepsilon}(t_i) = -\Delta p_{\varepsilon, t_i} / p_{\varepsilon, t_i} \Delta t_i.$$

Não esclarece, porém que esta mesma definição é válida se  $p_{\varepsilon, t_i}$  for contínua.

Louvamos o autor pelas intenções que teve; mas o resultado do seu trabalho ficou longe delas, e muito especialmente tratando-se de uma tese para admissão a um concurso universitário e dos fins didáticos que se pretendeu imprimir-lhe.

Embora em face da bibliografia existente não se veja motivo especial que o recomende aos que por estes assuntos se interessam, não consideramos inútil a sua leitura.

A. da Costa Miranda

**91** — HASSE, HELMUT — *Höhere Algebra*, Dritte verbesserte Auflage, I (Lineare Gleichungen), II (Gleichungen höhere Grades); Sammlung Göschen, Bände 93, 1932, Walter de Gruyter & C.º, Berlin, 1951.

Estes dois volumes da muito conhecida e acessível colecção alemã de livrinhos de algibeira contém a 3.ª edição «melhorada» dum livro modelo de organização, detalhe e escrupuloso rigor. É aparente que este livro influenciou decididamente muitas das melhores exposições dos capítulos fundamentais da álgebra que subsequentemente têm sido publicadas — e ainda hoje ele constitui um excelente texto a usar num primeiro ensino sério do assunto. Os melhoramentos introduzidos nesta 3.ª edição não são expressamente indicados. Porém uma comparação com a 2.ª edição pode ser feita página a página através das 150 páginas que cada volume aproximadamente contém, e assim se verifica que os resultados incluídos são os mesmos e as demonstrações as mesmas. Os melhoramentos que encontramos limitam-se a detalhes de redacção (I pp. 8, 49 ou 53 onde «...  $(E A^{-1})^{-1} = A$ . Daher ist einerseits auch  $EA = E(A^{-1})^{-1} = A$ , d. h.  $E$  ist auch vorderes  $E$  Einselement, und andererseits somit  $(A^{-1})^{-1} = A$ , also  $A^{-1}A = E$ , d. h.  $A^{-1}$  ist auch vorderes Reziprokes zu  $A$ » substituí «...  $(A^{-1})^{-1} = A$ . Daher ist also  $A^{-1}A = E$ , d. h.  $A^{-1}$  ist auch vorderes Reziprokes zu  $A$ », II p. 61) que a aperfeiçoam ou introduzem novas observações de detalhe, ou então ao desaparecimento de gralhas (I p. 74). (Assim, a indicação «verbesserte Auflage», do frontespício, aparece-nos um pouco forçada, inadequada). Esperamos que o, terceiro, volume de problemas em forma de exercícios (com sugestões para os resolver) *Aufgabensammlung zur Höheren Algebra*, Band 1082) seja também reeditado.

Estas informações são porventura bastantes para quem conheça a 2.ª edição. Porém é provável que

não haja, ao todo, meia dúzia de leitores portugueses incluídos nesta categoria, não só entre os responsáveis pelo ensino da Matemática no nosso país, mas também entre os estudiosos do nosso país. Por isto incluímos aqui os títulos dos vários capítulos: Anéis, Corpos, Domínios de integridade; Grupos; Álgebra linear livre de determinantes [com detalhada exposição do método de Toeplitz]; Álgebra linear com determinantes; Os primeiros membros das equações algébricas; As raízes das equações algébricas; Os corpos das raízes das equações algébricas; A estrutura dos corpos das raízes das equações algébricas; Solubilidade por radicais das equações algébricas. Mas desistimos de apontar, nesta necessariamente breve notícia, outros detalhes que contribuem para valorizar esta obra; porque duvidamos poder fazê-lo de modo que os leitores para os quais eles são novidades possam acompanhar-nos. Fica-nos a vaga esperança de que o estudo orientado por obras como esta de HASSE ajudará a formar uma mentalidade adulta no nosso país através da influência que venha a ter nos nossos futuros professores de matemática, conscientes da responsabilidade (que sobretudo a eles cabe) de ensinar a pensar correctamente; e fica-nos também a esperança de que uma ulterior e madura reflexão sobre a leitura do livro ajude a extirpar da nossa terra preconceitos que, em nossa opinião, têm sido extremamente perniciosos. Um destes preconceitos subestima o papel da língua alemã na difusão de obras de matemática. A leitura destas em língua alemã é ainda hoje (mesmo depois do deslocamento do centro de gravidade dos estudos para fora da Alemanha e da actual profusão de traduções) um requerimento necessário a uma bem equilibrada cultura matemática. A falta deste requerimento não terá sido a responsável pelo atraso imenso dos nossos estudos de Análise, um capítulo que a existência da brilhante escola francesa deixara acessível; mas foi já, decerto, uma das causas do atraso, provavelmente ainda maior, dos nossos estudos de Álgebra, Fundamentos e Geometria. A escola de Göttingen (conhecida como a Alexandria dos tempos modernos) onde HASSE foi professor, floriu e decaiu (com o nazismo) sem em Portugal quase darmos por isso. Assim, quanto ao livro de HASSE, não nos recordamos de o ter visto citado no nosso país excepto nos trabalhos do professor A. ALMEIDA E COSTA.

Hugo Ribeiro (Univ. of Nebraska, U. S. A.)

**DIVULGAR A «GAZETA DE MATEMÁTICA» É CONTRIBUIR PARA O DESENVOLVIMENTO DA CULTURA MATEMÁTICA PORTUGUESA**