ANO XII—N.º 48 GAZETA DE MATEMÁTICA JUNHO — 1951

REDACTOR PRINCIPAL: *M. Zaluar* • EDITOR: *Gazeta de Matemática, Lda.* • ADMINISTRADOR: *A. Sá da Costa*

REDACTORES ADJUNTOS: *J. Gaspar Teixeira, J. Morgado e J. da Silva Paulo*

Composto na Tipografia Matemática, Lda. — R. Almirante Barroso, 20, r/c — LISBOA-N

# *Kurt Gödel e os problemas dos fundamentos da Matemática e a teoria dos conjuntos*

por *Luís Neves Real*

A recente comemoração, a 4 de Março passado, do 72.º aniversário de ALBERT EINSTEIN assinalada pela entrega de prémios com o seu nome a dois professores de Universidades norteamericanas, KURT GÖDEL, de Princeton e JULIAN SCHINGER, de Harvard, fez convergir naturalmente sobre ambos a curiosidade do mundo inteiro, espicaçada pelos telegramas admirativos das agências noticiosas. Entre aqueles que se interessam pèla Matemática e dentro dela tem seguido, ou procurado seguir, a evolução do estudo dos fundamentos desta ciência, a distinção conferida agora ao lógico-matemático austríaco KURT GÖDEL tem um profundo significado. Ela representa a consagração mundial duma disciplina olhada por muito tempo com desconfiança pelas matemáticas oficiais: têm pouco mais de cincoenta anos as atitudes de certas revistas científicas recusando-se a prosseguir em debates sobre o axioma de ZERMELO, ou precedendo a publicação de artigos tratando da problemática da teoria dos conjuntos, de cùidadosas prevenções sobre a natureza de têmas que não eram tidos ainda com direito de admissão na Matemática. Ainda hoje em centros de estudos da Europa, são estes trabalhos sobre os Fundamentos de certo modo desdenhados; em Portugal, segundo creio, os nossos cursos oficiais de Matemáticas Superiores desconhecem-nos; e só com um esforço autodidacta imperfeito e dificílimo alguns portugueses têm procurado aproximar-se de tão inacessíveis como fascinantes têmas de estudo.

*

O interesse pelo estudo dos Fundamentos da Matemática surgiu com a crise suscitada na teoria dos conjuntos pela descoberta no final do século passado das antinomias de BERTRAND RUSSEL e BURALLI-FORTI, revelando ambos os perigos que se escondem sob o uso desacautelado dos quantificadores lógicos «todo» ($\forall$) e «existe um $\cdots$» ($\exists$).

Tal descoberta não sòmente vinha pôr em causa a estruturação lógica da Matemática coroada pela demonstração dada em 1887 por DEDEKIND (no seu ensaio *Was sind und was sollen die Zahlen?*) do princípio de indução finita, fundamentando-o nos quantificadores $\forall$ e $\exists$ e na noção de *cadeia*. Mas o próprio edifício clássico da Análise matemática aparecia ameaçado. De facto se repararmos, por exemplo, no enunciado base de todo estudo da variável real, — o enunciado da condição necessária e suficiente dada por CAUCHY para a convergência das sucessões de números reais — que se traduz, graças ao simbolismo lógico, por

$$\forall\delta\,\{\delta>0\rightarrow\exists N\,[\forall n\forall p\,((n>N \text{ e } p>0\rightarrow$$
$$\rightarrow|u_{n+p}-u_n|<\delta))]\}$$

o seu caracter transfinito, pela consideração das *totalidades* dos números naturais e reais, é bem aparente.

Não podia tal situação de desconfiança relativamente à solidez das bases da mais exacta das ciências deixar de impressionar os melhores espíritos da Filosofia e da Matemática e interessá-los na tentativa da reconstrução dos Fundamentos da Matemática. Três sentidos foram apontados e têm sido seguidos nessa tentativa de reconstrução: o logístico de BERTRAND RUSSELL, o intuicionistata de BROWER e o formalista de DAVID HILBERT. Precisamente KURT GÖDEL adquire notoriedade internacional pelo significado dos resultados que obteve em 1930 e 1931, pondo em causa a possibilidade de serem atingidos os objectivos do programa formalista preconizado por HILBERT.

Propunha-se a escola hilbertiana, em primeiro lugar, a axiomatização das diversas disciplinas matemáticas; em seguida, e mercê de apropriado simbolismo, a formalização dessa axiomática; e, finalmente, através dum estudo crítico dessas disciplinas, conduzido num plano metamatemático, fazer a demonstração da compatibilidade dos axiomas adoptados, da sua não contradição, provando que é impossível, partindo dos axiomas e subordinando-se às regras de transformação dos enunciados permitidas pela axiomática, deduzir simultâneamente um enunciado e o seu contrário. Pela redução das diversas disciplinas matemáticas à Aritmética, o problema fundamental da *teoria da demonstração* (designação por que é conhecida a disciplina matemática que teve origem no programa formalista de HILBERT) é a demonstração da não contradição da Aritmética com um formalismo, que utiliza os símbolos:

Não, e, ou, $\forall$, $\exists$, $0 \rightarrow$ (Se $\cdots$ então $\cdots$), $'x$ (sucessor de $x$) $\mathfrak{N}(x)$ ($x$ é um número), $\mathfrak{A}(x)$ ($x$ tem a propriedade $\mathfrak{A}$), etc $\cdots$

e se subordina aos axiomas:

I — da lógica, como

$$x \rightarrow (y \rightarrow x)\,;\ (x \rightarrow y) \rightarrow [(z \rightarrow x) \rightarrow (z \rightarrow y)]\,;\ [x \rightarrow \text{não } x] \rightarrow$$
$$\rightarrow \text{não } x\,;\ [x \rightarrow y] \rightarrow [\text{ não } y \rightarrow \text{não } x]\,;\ \mathfrak{A}(b) \rightarrow \exists x\, \mathfrak{A}(x)\,;$$
$$\forall x\, \mathfrak{A}(x) \rightarrow \mathfrak{A}(b)$$

II — da igualdade

$$x = x\,;\ y = z \rightarrow (\mathfrak{A}(y) \rightarrow \mathfrak{A}(z))$$

III — da aritmética finita:

$$\mathfrak{N}0\,;\ \mathfrak{N}\, b \rightarrow \mathfrak{N}('b)\,;\ ('x = 'y) \rightarrow (x = y)\ ;\ \text{não } ('x = 0)\,.$$

É a este formalismo assim constituido que designaremos por $\mathcal{B}$.

O resultado surpreendente obtido por GÖDEL pode enunciar-se com relativo rigor nos termos seguintes: «É impossível dentro do formalismo $\mathcal{B}$ demonstrar a compatibilidade de $\mathcal{B}$».

E o próprio caminho seguido para chegar a este enunciado está recheado de conclusões imprevistas e interessantíssimas (1).

Para apreendermos duas delas, façamos uma numeração dos símbolos usados no formalismo, pondo em correspondência os números da forma $5n+1$ (a partir de $n=0$) respectivamente com os símbolos $0$, *não*, $\rightarrow$, *e*, *ou*, etc.; os números da forma $5n+2$ (desde $n=0$) com as variáveis $x, y, z, u, \cdots$; os números da forma $5n+3$ (desde $n=0$) para as quantificações: $\exists x$, $\exists y, \cdots$; os números da forma $5n+4$ (desde $n=0$) para $\forall x, \forall y, \cdots$; etc.

O objectivo desta numeração é fazer corresponder a cada enunciado de $\mathcal{B}$ um número natural. Para o conseguir porém não basta a numeração feita; é preciso ainda qualificar o papel que os diferentes símbolos desempenham na constituição dum enunciado. Com esse fim daremos ao enunciado uma escrita *arboriforme*, tendo como raíz o símbolo ou operador lógico fundamental no enunciado de que se trate. Tome-se como exemplo o axioma:

$$x \rightarrow (y \rightarrow x)$$

Escrevamo-lo da maneira seguinte

$y$ $x$

$x$ $\rightarrow$

$\rightarrow$

Atribuamos à *raiz* o número 1; numeremos os dois ramos que dela saem com 10 o da esquerda e 11 o da direita; e o mesmo façamos a partir daquele que por sua vez dá origem a novos ramos.

Assim se chega a um esquema onde os números ficarão indicando a ordem que no enunciado corresponde aos símbolos que nele ocupam a posição desses números:

110 111

10 11

1

Compreende-se que este procedimento é absolutamente geral pois os operadores lógicos só operam sobre uma ou quando muito duas variáveis (ou enunciados já formados à custa das variáveis e dos operadores *não, e, ou*, etc..., que as ligam).

Vendo agora nos números intercalados nos diversos ramos da árvore anterior, a escrita na *base dois* de números naturais, passaremos para uma árvore equivalente onde porém os números de ordem dos símbolos do enunciado estão escritos já na base 10:

6 7

2 3

1

Estabelecendo como regra que aos números de ordem dos símbolos se fazem corresponder sucessivamente os números primos, ordenados pela sua grandeza relativa, a partir de dois, no enunciado ante-

(1) HERMANN WEYL — *Philosophy of Mathematics and Natural Science*, Princeton University Press, 1949, Apendix A, p. 219.

BARKLEY ROSSER — *An informal exposition of proops of Gödel's theorems and Church theorem*, The Journal of Symbolic Logic, 1939, p. 53.

rior, aos seus números de ordem, correspondem os números primos: primeiro, segundo, terceiro, sexto e sétimo, isto é:

$$2\,,\,3\,,\,5\,,\,13 \text{ e } 17\,.$$

Posto isto e finalmente o número de Gödel do enunciado $x \to (y \to z)$ será, por definição, o número dado pelo produto $2^{11} \times 3^2 \times 5^{11} \times 13^7 \times 17^2$, resultado da multiplicação de cinco factores (tantos quantos, com repetição, os símbolos que no enunciado entram) cada um deles uma potência, cuja base é o número primo que simboliza a ordem, que no enunciado cabe ao respectivo símbolo, e cujo expoente é o número adoptado para esse mesmo símbolo.

Assim se vê que cada enunciado de $\mathcal{G}$ corresponde a um número. Inversamente, se pretende verificar-se que um dado número corresponde a um enunciado de $\mathcal{G}$ proceder-se-á da maneira seguinte. Seja por exemplo o número 460800; faça-se a sua decomposição em factores primos:

$$2^{11} \times 3^2 \times 5^2$$

que mostra ser o enunciado constituido pelos símbolos de números 11, 2 e 2, isto é respectivamente $\to$, $x$ e $x$, colocados respectivamente nas *casas* de ordem 1, 2 e 3. O enunciado há-de ser da forma

$$\begin{array}{ccc} x & & x \\ & \searrow\swarrow & \\ & \to & \end{array}$$

ou seja finalmente $x \to x$.

Por outro lado também às demonstrações se podem fazer corresponder números; de facto sendo elas um encadeamento arboriforme de silogismos: «Se «$b$» e «*se* «$b$» *então* «$c$»» então «$c$» »:

$$\begin{array}{ccc} b & & b \to c \\ & \searrow\swarrow & \\ & c & \end{array}$$

e, uma vez que já sabemos como calcular os números relativos aos enunciados «$a$», «$b$» e «$c$», etc..., uma técnica semelhante à anteriormente usada permite determinar igualmente números correspondentes às demonstrações de $\mathcal{G}$. Compreende-se que o conjunto dos números que podem ser *imagens* de enunciados de $\mathcal{G}$ não compreende números que sejam imagens das demonstrações de $\mathcal{G}$. Todo o simbolismo $\mathcal{G}$ aparece como uma imagem duma parte da aritmética: os símbolos, os enunciados que os combinam, os axiomas e as demonstrações da matemática—instrumento para análise crítica da Metamatemática — têm como imagens determinados números com determinadas propriedades; e às propriedades dos símbolos ou dos enunciados metamatemáticos correspondem propriedades aritméticas: a metamatemática, na concepção de Hilbert, disciplina segura para o estudo crítico da matemática é abraçada afinal por um domínio particular da matemática: a Aritmética. *Assim, por um lado, o pensamento que deve fundamentar as matemáticas é ele mesmo matemático; e, por outro, se tem de dominar teorias infinitas, terá que ultrapassar essa infinidade.* (1) .

Um outro aspecto chocante desses trabalhos de Gödel é a distinção que obriga a fazer entre *enunciados verdadeiros* e *enunciados demonstráveis* (entendendo-se por *demonstrável* o deduzível dos axiomas pelo *jôgo* imposto pelos próprios axiomas).

Simbolize-se, por «não-Dem. ($x$)» que «o enunciado de número $x$ não é demonstrável (em $\mathcal{G}$)» (e por «Dem. ($x$)» que «o enunciado de número $x$ é demonstrável)». Demonstra-se que «não-Dem. ($x$)» é formalizável em $\mathcal{G}$; e que se «Dem. ($x$)» é um enunciado verdadeiro, a sua formalização em $\mathcal{G}$ é deduzível. Gödel mostra então como se pode determinar um enunciado $\varepsilon$ de $\mathcal{G}$ com o número $e$ e exprimindo que «o enunciado de número $e$ não é demonstrável», ou com os símbolos escolhidos: «não-Dem. ($e$)». Prova seguidamente o chamado *Primeiro Teorema* de Gödel: «$\varepsilon$ não é demonstrável», por outras palavras: «*não é demonstrável que o enunciado de número* e *não é demonstrável*». Se isto fosse falso, era verdadeiro «*é demonstrável que*» o enunciado de número $e$ não é demonstrável»; mas como por hipótese é também $e$ o número do enunciado «*o enunciado de número* e *não é demonstrável*», posso dizer antes: «*é verdadeiro o enunciado* «Dem ($e$)». Mas se é verdadeiro tem que ser demonstrável. E como «Dem ($e$)» corresponde à negação de $\varepsilon$, concluo que a hipótese de ser verdadeiro que «$\varepsilon$ *é demonstràvel*» implica que também é verdadeira a sua negação: «$\varepsilon$ *não é demonstrável*». Sendo $\mathcal{G}$ não contraditório, é isto absurdo.

Este teorema exprime afinal que «Se $\mathcal{G}$ *é não contraditório*», então «$\varepsilon$ *não é demonstrável*». Gödel mostrando que se pode formalizar o enunciado «$\mathcal{G}$ *não é contraditório*», conclui que se fosse demonstrável em $\mathcal{G}$ o enunciado «$\mathcal{G}$ *não é contraditório*», a transitividade de «ser demonstrável» e o seu *Primeiro Teorema* obrigavam a dizer: «é demonstrável» que «$\varepsilon$ *não é demonstrável*» o que é equivalente pela formação do próprio $\varepsilon$ a dizer «$\varepsilon$ *é demonstrável*». Mas pelo teorema isto só é possível se $\mathcal{G}$ for contraditório: a possibilidade de demonstrar a compatibilidade da teoria $\mathcal{G}$ implicava a sua incompatibilidade (2).

*

É o próprio Herman Weyl quem tira destes resultados a conclusão seguinte: *Desde que* Gödel *nos*

(1) Jean Cavaillés — *Transfini et Continu*, Paris, 1947, Hermann et Cie.

(2) Barkley Rosser, loc. cit.

*deixou com muito pouca esperança de que qualquer formalismo, suficientemente vasto para abarcar as matemáticas clássicas, pudesse fundamentar-se numa prova de não contradição, ganharam um interesse renovado os sistemas axiomáticos desenvolvidos sem sonhos ambiciosos, anteriormente a* Hilbert. E também neste domínio das axiomáticas da teoria dos conjuntos Kurt Gödel enriqueceu a Matemática com um resultado que em certo sentido se pode considerar como fecho dum vivíssimo debate que desde o princípio do século se estabeleceu a propósito do axioma da escolha, enunciado por Zermelo em 1904.

É sabido que, a partir de 1873, Cantor, nas suas tentativas de *numeração* dos conjuntos infinitos, estabeleceu a noção de potência ou número cardinal $\overline{\overline{A}}$ dum conjunto $A$ por abstração, da ordem e natureza dos elementos desse conjunto, e com base na *equivalência* de conjuntos (dois conjuntos dizendo-se *equivalentes*, se entre os seus elementos se puder estabelecer uma correspondência biunívoca). Foram as potências do numerável e do contínuo, respectivamente números cardinais do conjunto dos números naturais e do conjunto dos números reais, as primeiras a serem *exploradas* por Cantor, que desde logo demonstrou a sua *desigualdade*, entendendo-se, por tal a impossibilidade de escrever todos os números reais numa sucessão infinita, prova deduzida com base na densidade e compacidade dos números reais.

O estabelecimento da ordem de grandeza entre os números cardinais é feito através das convenções seguintes:

a) $\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{B}}$ significa que $A$ é equivalente a um sub-conjunto de $B$;

b) $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}$ significa que é $\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{B}}$ e que não é $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$ ($A$ e $B$, não têm a mesma potência);

e do chamado teorema de Bernstein:

«Se $\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{B}}$ e $\overline{\overline{B}} \leqslant \overline{\overline{A}}$, então $A = B$.»

Postas estas noções e designando, como é habitual por $2^A$ o conjunto de todos os sub-conjuntos do conjunto $A$, e por $(\overline{\overline{2^A}})$ o seu número cardinal, resulta que para qualquer conjunto $A$ se tem sempre $\overline{\overline{A}} < (\overline{\overline{2^A}})$.

Assim a *exponenciação* dos conjuntos (entendendo-se por tal a passagem dum dado conjunto $A$ ao conjunto $2^A$ de todos os seus sub-conjuntos) fornece-nos a possibilidade de construir uma escala crescente e sem fim de números cardinais infinitos, partindo do numerável; designando por $\aleph_0$ e $\mathsf{C}$ respectivamente o numerável e o contínuo, teremos

$$\aleph_0 < 2^{\aleph_0} = \mathsf{C} < 2^{\mathsf{C}} = \mathsf{C}_1 < 2^{\mathsf{C}_1} = \mathsf{C}_2 < 2^{\mathsf{C}_2} \cdots$$

Este critério de ordenação faz surgir naturalmente, na teoria dos conjuntos, o problema, denominado da tricotomia e que consiste em saber se, dados dois conjuntos $A$ e $B$, de números cardinais respectivamente $\overline{\overline{A}}$ e $\overline{\overline{B}}$, será necessàriamente verdadeira uma e só uma das três proposições seguintes: $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$; $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}$ e $\overline{\overline{B}} < \overline{\overline{A}}$. Cantor sem o demonstrar optou pela afirmativa que veio a ser provada mais tarde, em 1904, indirectamente, a partir da teoria dos números ordinais.

Considera-se ordenado todo conjunto entre cujos elementos está definida uma relação de ordem ou de precedência, simbolizada por $\prec$, possuindo as propriedades de ser completa, antisimétrica e transitiva. Consideram-se como *semelhantes* dois conjuntos ordenados entre cujos elementos é possível estabelecer uma correspondência biunívoca, respeitando as relações de ordem estabelecidas em cada um dos conjuntos. Da mesma forma que a equivalência foi a base do processo de abstração que conduziu à definição de número cardinal, também a semelhança levou Cantor a uma nova abstração: a de *tipo de ordem*; de dois conjuntos semelhantes diz-se que têm o *mesmo tipo de ordem* É evidente que dois conjuntos com o mesmo tipo de ordem têm o mesmo número cardinal; não é porém verdadeiro o recíproco. Mostra-o o exemplo do conjunto dos números naturais $1, 2, 3, \cdots$ que pode ordenar-se ou pela relação *menor que*, como pela relação *maior que*; pondo respectivamente $1 \prec 2 \prec 3 \prec \cdots \cdots \prec n \prec \cdots$ e $\cdots \prec n \prec \cdots \prec 3 \prec 2 \prec 1$, constituem-se dois conjuntos ordenados com o mesmo número cardinal, mas não semelhantes.

Observemos no tipo de ordem, que será designado por $\omega_0$, do conjunto ordenado

$$1 \prec 2 \prec 3 \prec \cdots \prec n \prec \cdots$$

uma propriedade de grande importância na estruturação da teoria dos números ordinais: tem o conjunto *um primeiro elemento* (isto é um elemento que precede todos os demais) e todos os seus subconjuntos têm igualmente um primeiro elemento. É esta propriedade que se toma como definição de *conjunto bem ordenado*, e reserva-se a designação de *números ordinais* para os tipos de ordem dos conjuntos bem ordenados. Todo conjunto finito com $n$ elementos é equivalente ao conjunto dos $n$ primeiros números naturais e pode ordenar-se semelhantemente a este mesmo conjunto, que é bem ordenado, se tomarmos como relação ordenadora a grandeza relativa dos números. Adjectivando de *finitos* os números cardinais e ordinais dos conjuntos finitos a observação anterior mostra que entre os números cardinais e ordinais finitos há uma estreita relação, de tal modo que a cada conjunto finito corresponde um número cardinal e um único número ordinal, fundindo-se assim, por natural convenção, com o número $n$ dos seus elementos tanto o número cardinal como o número ordinal desse conjunto. Já não sucede o mesmo com os conjuntos infinitos.

Vimos acima como do conjunto dos números naturais se podiam formar dois conjuntos ordenados de tipos de ordem diferentes enquanto o de tipo $\omega_0$ é um número ordinal, o segundo já o não é.

*

É possível ordenar os números ordinais, uns em relação aos outros, com a definição de «menor que», baseada no teorema seguinte:

«Se $A$ e $B$, são dois conjuntos, que, ordenados por uma certa relação $\prec$ resultam bem ordenados, é sempre verdadeira uma e só uma das três proposições seguintes:

a) $A$ é semelhante a $B$; b) Existe $b \in B$ tal que $A$ é semelhante ao sub-conjunto de $B$, contituído por todos os seus elementos que precedem $b$; c) existe $a \in A$ tal que $B$ é semelhante ao sub-conjunto de $A$ constiuído pelos seus elementos que precedem $a$.

Designando por $\overline{A}$ e $\overline{B}$ os números ordinais respectivamente de $A$ e $B$, o teorema anterior sugere que por definição se diga na hipótese b) que o número ordinal de $A$ é menor que o número ordinal de $B$, e que se escreva $\overline{A} < \overline{B}$, e que na hipótese c) se diga $\overline{B} < \overline{A}$.

Desta definição resulta serem todos os números ordinais finitos menores que $\omega_0$, que, por sua vez, é o menor dos números ordinais transfinitos.

Esta comparabilidade universal dos números ordinais pela relação *menor que*, assim transposta para os números ordinais transfinitos, induz uma *bôa ordenação* no conjunto $\Theta$ dos números ordinais. Duas propriedades essenciais se demonstram para este conjunto:

1) Todo número ordinal $\theta$ tem um sucessor imediato, que se representa por $\theta+1$ — proposição que significa que não há número ordinal algum $\theta'$ que satisfaça a $\theta < \theta' < \theta+1$;

2) Todo conjunto $\Theta'$ de números ordinais é imediatamente seguido por um número ordinal $\theta'$, querendo dizer-se com isto que: i) para todo $\theta \in \Theta'$ é $\theta < \theta'$; e ii) não há qualquer número ordinal $\theta''$ tal que seja possível encontrar um elemento $\theta$ de $\Theta'$ de modo a serem satisfeitas simultâneamente as relações $\theta \prec \theta''$ e $\theta'' \prec \theta'$.

Estas propriedades justificam dois *princípios de geração* dos números ordinais, princípios que se enunciam da seguinte forma: $G.\ 1$ «Todo número ordinal gera um novo número que se lhe segue imediatamente» (do qual ele é o predecessor *imediato*); $G.\ 2$ «Todo conjunto de números ordinais gera um novo número que segue imediatamente esse conjunto». Desta forma o ordinal $0$, — número ordinal correspondente ao conjunto vazio — dá lugar, pela aplicação de $G.\ 1$, ao número ordinal $1$; este ao $2$; etc. $\cdots$ e o conjunto de todos os números ordinais que se obtêm a partir de $0$, graças a $G.\ 1$, cria por força de $G.\ 2$, um novo número ordinal, precisamente o número ordinal $\omega_0$, acima definido. Por sua vez a aplicação de $G.1$, a partir de $\omega_0$ leva à geração duma nova sucessão de números que simbolizaremos com $\omega_0+n$, onde $n$ representa um ordinal finito.

Desta sucessão e por intermédio de $G.\ 2$ se chega a um outro número ordinal que será representado por $\omega_0+\omega_0$ ou $\omega_0 \cdot 2$. De $\omega_0\, 2$ pode partir-se, em forma análoga para obter novos números ...

Considere-se seguidamente o conjunto de todos os números ordinais que se obtêm de $\omega_0$: a) ou pela aplicação de $G.1$; b) ou pela aplicação de $G.2$ a conjuntos numeráveis de números ordinais formados por (a); c) ou pela aplicação de $G.1$ e $G.2$ aos números já obtidos por (a) e (b). A este conjunto de números ordinais chama-se usualmente a *classe II* dos números ordinais reservando a denominação de *classe I* para o conjunto dos números ordinais finitos.

Tomando agora a classe II, o princípio $G.\ 2$ a ela aplicado gera um novo número ordinal, representado por $\omega_1$. Note-se que, contràriamente ao que sucede com os ordinais finitos, que correspondem estreitamente (e com eles se identificando) aos cardinais finitos, todos os números da classe II correspondem a um mesmo cardinal: o númerável $\aleph_0$. Mas exactamente como a classe I tem um número cardinal *maior* que cada número cardinal finito, também o conjunto de todos os números ordinais da classe I e da classe II (isto é todos os números ordinais inferiores a $\omega_1$) possui um número cardinal maior que todos os finitos e que o númerável. Representa-se este novo número cardinal transfinito por $\aleph_1$.

Com base agora em $\omega_1$ e utilizando alternada e sucessivamente ora o primeiro princípio de geração ora o segundo, aplicado a conjuntos de números ordinais de potência $\aleph_0$ ou $\aleph_1$ gera-se uma *III classe* de números ordinais, que será anàlogamente superada por um novo número, inicial da *classe IV*, representado por $\omega_2$ e a que corresponde um novo número cardinal $\aleph_2$, podendo dispor-se os números ordinais e cardinais assim obtidos em sucessão crescente (transfinita):

$$1 < 2 < \cdots < n < \cdots \omega_0 < \cdots < \omega_1 < \cdots < \omega_2$$

$$\text{e} \quad 1 < 2 < \cdots < n < \ldots \aleph_0 < \qquad \aleph_1 \qquad < \aleph_2 .$$

Por seu turno os números $\omega_2$ e $\aleph_2$ nos levariam a novos números $\omega_3$ e $\aleph_3$; e o processo poderia repetir-se indefinidamente (1).

*

O *problema do contínuo* consiste em encontrar na escala crescente dos alephs, isto é $\aleph_1, \aleph_2, \cdots$, o lugar ocupado pelo número cardinal $2^{\aleph_0}$, potência do contínuo, isto é número cardinal do conjunto dos números reais. CANTOR supunha que ele deveria ser o primeiro aleph não numerável, isto é $\aleph_1$. Daí o designar-se a igualdade $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ por *hipótese do contínuo*. Embora esta igualdade, em cincoenta anos de pesquisas, nunca tivesse sido demonstrada, baldados foram igualmente todos os esforços feitos para dela deduzir qualquer enunciado matemático contraditório.

O destino desta hipótese tem corrido paralelamente ao do chamado *axioma da escolha*, que desempenha, um papel imprescindível na teoria dos conjuntos, onde enunciados há que se não podem demonstrar sem a utilização de certos conjuntos, cuja existência resulta da aplicação desse axioma: a demonstração de que: «de dois números cardinais transfinitos diversos, um é necessàriamente menor que o outro» assenta na tese «todo conjunto pode ser bem ordenado» cuja prova foi dada em 1904 com base na hipótese que ficou conhecida na literatura matemática como *axioma de* ZERMELO ou *da escolha*: *Para todo conjunto $M$, cujos elementos são conjuntos $P$ não vazios e sem elementos comuns dois a dois, existe pelo menos um conjunto $N$, que contém um elemento e um só de cada conjunto $P$ de $M$*».

Com base neste axioma podemos afirmar que na sucessão crescente dos alephs $\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \cdots$ estão todos os números cardinais possíveis e portanto o número cardinal do contínuo, e todos os que a partir deste se podem atingir pela aplicação repetida do processo de exponenciação. Mas «Qual dos alephs é o número cardinal do contínuo?» é problema que permanece sem resposta, ainda que se utilize o axioma da escolha.

Este axioma originou logo que foi utilizado, uma polémica, feita em termos frequentemente vivíssimos, recusando-se muitos matemáticos a trabalhar com as *puras virtualidades* afirmadas pelo seu enunciado; tais reservas suscitaram um movimento de crítica aos fundamentos da matemática, que, na variedade de caminhos em que veio a subdividir-se, abriu novas perspectivas à investigação matemática.

Neste debate universal estabelecido á volta da teoria dos conjuntos, há que destacar a posição, estritamente científica, assumida pelo matemático polaco WACLAW SIERPINSKI — «l'homme qui a le plus et le mieux su utiliser l'axiome du choix», no justo dizer de LEBESGUE — frente ao axioma de ZERMELO e à hipótese de CANTOR, atitude de persistente e minucioso exame crítico e cuja soma de resultados se encontra no trabalho apresentado em 1918 à Academia de Ciências de Cracóvia, subordinado ao título «*L'axiome de* MR. ZERMELO *et son rôle dans la théorie des Ensembles et l'Analyse*» e na monografia «*Hypothèse du Continu*», Warsaw, 1934. Pacientemente SIERPINSKI dedicou-se por um lado ao trabalho de assinalar as demonstrações fundamentais da teoria dos conjuntos e da análise real que utilizam *escolhas*, e por outro, a deduzir proposições variadas tanto do axioma de ZERMELO como da hipótese de CANTOR. Entre os enunciados equivalentes às duas tão discutidas proposições destaquem-se (1):

a) para o axioma da escolha: a equivalência à proposição: «dados dois conjuntos quaisquer, um deles tem um subconjunto com o mesmo número cardinal do outro»; o que revela bem quam intimamente está ligado o axioma ao problema da tricotomia nos números cardinais.

b) para a hipótese do contínuo, a equivalência à afirmação conjunta dos dois seguintes enunciados:

*L*) existe um conjunto linear com a potência do contínuo que não possui qualquer subconjunto infinito não numerável e não denso; *S*) existe um conjunto linear com a potência do contínuo e que não possui qualquer sub-conjunto infinito não numerável e de medida nula. Proposições que reflectem uma espécie de dualidade, que a hipótese do contínuo implica na recta real, entre conjuntos de primeira categoria e conjunto de medida $L$ nula.

A hipótese do contínuo, $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, é um caso particular da chamada hipótese generalizada de CANTOR, segundo a qual todo número cardinal infinito $m$ *é imediatamente* seguido pelo número cardinal $2^m$. A esta hipótese pode dar-se, com o auxílio do axioma da escolha, a forma equivalente: «para todo ordinal $\theta$, $\aleph_{\theta+1} = 2^{\aleph_\theta}$.

*

Quase simultaneamente com as objecções feitas ao axioma da escolha, indispensável para certos desenvolvimentos das teorias ordinal e cardinal, a criação de CANTOR viu-se ameaçada por paradoxos, que nada dentro dela impedia que se formassem. A exposição sumária que acima fizemos das propriedades essenciais dos conjuntos bem ordenados e dos números

(1) HANS HAHN — *Reelle Functionen*, 1932; BEPPO LEVI, *Mathematicae Notae*, F. 1-2; VIII, 1948.

(1) *Les Entretiens de Zurich*, Zurich, 1941.

ordinais, permite apercebermo-nos fàcilmente da mais antiga dessas antinomias — a de Buralli-Forti, enunciada em 1897 e que Cantor parece ter entrevisto já em 1895. Consiste ela na consideração do conjunto $\mathcal{O}$ de todos os números ordinais, que, por ser bem ordenado, gera um novo número ordinal, que sendo *novo* se não encontra ainda em $\mathcal{O}$ — o que contradita a hipótese de ser $\mathcal{O}$ o conjunto de *todos* os números ordinais.

Esta situação gerada na utilização descuidada da noção *ingénua* de *conjunto* forçou à passagem a uma nova fase da teoria dos conjuntos: a fase axiomática, caracterizada por deixar a noção de *conjunto* de ser o que a intuição nos sugere para passar a ser um termo primitivo num quadro de axiomas, escolhidos de forma a permitir obter toda teoria abstracta dos conjuntos, mas exorcizando as antinomias conhecidas.

Pertence a Zermelo (1) e é de 1908 a primeira axiomática da teoria dos conjuntos. Os axiomas adoptados regulam as propriedades da relação $x \in X$ (o elemento $x$ pertence ao conjunto $X$):

Ze. 1 São iguais dois conjuntos com os mesmos elementos.

Ze. 2 São conjuntos: o conjunto vazio, o conjunto $\{x\}$ cujo único elemento é $x$, o conjunto $\{x, y\}$ cujos únicos elementos são $x$ e $y$.

Ze. 3 Sendo $P(x)$ uma proposição construida segundo as leis da Lógica e dependente da variável $x$ (símbolo dum elemento dum conjunto $X$) existe um conjunto constituído por todos aqueles elementos de $X$ que tornam verdadeira a proposição $P(x)$ (Axioma da formação dos subconjuntos dum conjunto).

Ze. 4 Existe um conjunto infinito, isto é: existe um conjunto, que contém o conjunto vazio, como um dos seus elementos, e que, com cada elemento $a$, contém igualmente como elemento o conjunto $\{a\}$ cujo único elemento é $a$.

Ze. 5 Para cada conjunto, existe um conjunto (conjunto potência) cujos elementos são os subconjuntos daquele.

Ze. 6 Para cada conjunto, existe um conjunto (conjunto reunião) cujos elementos são os elementos dos elementos do conjunto dado.

Ze. 7 O axioma da escolha.

O axioma Ze. 3, com o critério de definição dum sub-conjunto dum conjunto dado, por meio duma proposição, que deveria subordinar-se às leis da Lógica, — aquela Lógica clássica posta em cheque, simultâneamente com a teoria dos conjuntos, pela antinomia de Buralli-Forti, como pelas que se lhe seguiram — impeliu naturalmente à formulação de novas axiomatizações, menos contestáveis. Fraenkel (*Einleitung in die Mengenlhere*, Berlin, 1928), Von Neumann (*Die Axiomatisierung der Mengenlhere*, Math. Zeit. 1928) e Bernays (*A system of axiomatic set theory*, Journal of Symbolic Logic, 1937, 1941, 1943) estabeleceram quadros de axiomas, dentro dos quais, como no sistema de Zermelo, o axioma da escolha ocupa um lugar especial.

A maneira de remediar nessas axiomáticas a forma discutível como Zermelo caracteriza uma legítima formulação da propriedade $P(x)$, que permite *separar* num conjunto $X$ um seu sub-conjunto $P$, tem um caracter finitista e inductivo. Só podem ser *predicados:* 1.º aquelas proposições da forma $x \in A$; 2.º aquelas que se obtêm de predicados já formados pelas operações lógicas: negação, e conjunção; 3.º as que resultam de predicados já formados pela quantificação: «para todo ...».

Assim a ciência matemática possui hoje em dia *uma fundamentação satisfatória da Teoria dos Conjuntos de* Cantor, *em toda a integridade da sua creação original* (1).

Precisamente uma segunda contribuição sensacional de Gödel para a história da Matemática situa-se no domínio da teoria dos conjuntos, não na forma ingénua de Cantor, mas na sua estruturação axiomática. A revelação deste resultado teve qualquer coisa de espectacular. Em Zurich, no mês de Dezembro de 1938 reuniram-se algumas das primeiras figuras europeias da Lógica e da Matemática, entre os quais Skolem, Fréchet, Lukasiewikz, Lebesgue, Sierpinski, Bernays e Finsler, para o confronto das suas opiniões divergentes relativamente aos *Fundamentos e Método das Ciências Matemáticas.* Foi após a intervenção de Sierpinski, que se ocupara do axioma da escolha e da hipótese do contínuo, e imediatamente antes da discussão que a propósito se estabeleceu, que Gonseth, o presidente dos debates, comunicou o trecho seguinte duma carta que lhe fôra enviada por Kurt Gödel: *Num curso professado em Viena durante o verão de 1937 fiz a demonstração da não contradição do axioma da escolha. A seguir e pelo mesmo método, consegui provar igualmente a não contradição da hipótese generalizada do contínuo.*

No ano seguinte, Gödel, já então no *Institute for Advanced Study* de Princeton, renovou essa demonstração, realizando um curso, depois publicado nos *Annals of Mathematics Studies* (N.º 3, Princenton University Press, 1940), com o título *The consistency of the axiom*

(1) Jean Cavailles — *Dedekind, les Axiomatisations*, Paris, 1938.

(1) Kurt Gödel: *What is Cantor's Continuum problem?* in «The American Mathematical Monthly», Nov. 1947.

*of choice and of the generalised continuum-hypothesis with the axioms of the set-theory.*

Se nos recordarmos que a grande objecção contra o axioma da escolha, por parte dos matemáticos que se recusavam a utilizá-lo, era a desconfiança de que ele poderia conduzí-los a antinomias, concluiremos após este resultado de GÖDEL, que não há motivo para considerar o axioma da escolha com um receio que se não tem em relação aos restantes axiomas da teoria. Como o próprio GÖDEL diz: *pode agora afirmar-se que, no estado presente dos nossos conhecimentos, o axioma da escolha está tão bem fundamentado como todos os outros.*

Junta de Investigação Matemática — Porto, 1951, Abril.

# A função de Dirac — Sua interpretação matemática — III

por **Ruy Luís Gomes**

## Derivada de uma distribuição

Para maior facilidade de dedução suponhamos que se trata de uma função com derivada no sentido ordinário:

$$f'(x) = \lim_{h=0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Ora, como cada função $f(x)$ é identificada com a respectiva distribuição $\int f(x)\,\varphi(x)\,dx$, somos levados a considerar a nova razão incremental

$$(1) \qquad \frac{\int f(x+h)\,\varphi(x)\,dx - \int f(x)\,\varphi(x)\,dx}{h},$$

a que ainda se pode dar a forma

$$(1') \qquad \int f(y) \frac{\varphi(y-h) - \varphi(y)}{h}\,dy,$$

mediante a substituição $x = y - h$.

Como a razão incremental afecta agora a função $\varphi$ e não $f$, bastará sujeitar $\varphi$ a uma hipótese suplementar para ficar assegurado o limite de (1) para $h = 0$.

Concretamente, se $\varphi$ admitir derivada, contínua, sobre todo $R^1$, tem-se

$$(2) \qquad \lim_{h=0} \frac{\int f(x+h)\,\varphi(x)\,dx - \int f(x)\,\varphi(x)\,dx}{h} = $$

$$= -\int f(x)\,\varphi'(x)\,dx.$$

Na verdade com a hipótese formulada, (1′) transforma-se em

$$-\int f(y)\,\varphi'(y)\,dy - \int f(y)\,[\varphi'(y+\theta h) - \varphi'(y)]\,dy$$

ou efectivamente em

$$-\int f(y)\,\varphi'(y)\,dy - \int_K f(y)\,[\varphi'(y+\theta h) - \varphi'(y)]\,dy,$$

sendo $K$ o suporte compacto de $\varphi$.

Ora, como, por hipótese, $\varphi'$ é contínua sobre $R^1$, resulta uniformemente contínua sobre $K$ donde

$$\left| \int_K f(y)\,[\varphi'(y+\theta h) - \varphi'(y)]\,dy \right|$$

$$\leqslant \delta \int_K |f(y)|\,dy \quad , \quad |h| < \varepsilon(\delta).$$

Finalmente, atendendo a que $f(y)$ e portanto $|f(y)|$ têm integral finito em qualquer compacto, vem

$$\left| \int f(y)\,[\varphi'(y+\theta h) - \varphi'(y)]\,dy \right| < \delta \quad |h| < \varepsilon(\delta),$$

donde (2). Em resumo

$$\int f'(x)\,\varphi(x)\,dx = -\int f(x)\,\varphi'(x)\,dx,$$

conforme a regra de integração por partes.

No caso de uma função $f(x)$, localmente somável, evidentemente, mas sobre a qual nada acrescentamos a respeito da existência de derivada ordinária, tomamos $-\int f(x)\,\varphi'(x)\,dx$ para sua distribuição derivada, baseados nos desenvolvimentos (1), (1′), (2).

Numa palavra: $f'(\varphi) = -f(\varphi')$.

Ampliando a hipótese suplementar sobre $\varphi$ de maneira a assegurar a existência de derivada contínua $\varphi^n(x)$, para $n$ qualquer, escreveremos

$$f^{(n)}(\varphi) = (-1)^n f(\varphi^n),$$

o que nos permite afirmar — *uma função localmente somável admite derivadas de todas as ordens, que coincidem com as derivadas ordinárias quando estas tiverem efectivamente sentido.*

De um modo ainda mais geral, se designarmos por $\tau(\varphi)$ toda a funcional linear contínua no espaço $(D)$ das funções contínuas, de suporte compacto, com derivadas contínuas de todas as ordens, temos

$$\tau^{(n)}(\varphi) = (-1)^n\,\tau(\varphi^{(n)}).$$