of choice and of the generalised continuum-hypothesis with the axioms of the set-theory.

Se nos recordarmos que a grande objecção contra o axioma da escolha, por parte dos matemáticos que se recusavam a utilizá-lo, era a desconfiança de que ele poderia conduzí-los a antinomias, concluiremos após este resultado de GÖDEL, que não há motivo para considerar o axioma da escolha com um receio que se não tem em relação aos restantes axiomas da teoria. Como o próprio GÖDEL diz: *pode agora afirmar-se que, no estado presente dos nossos conhecimentos, o axioma da escolha está tão bem fundamentado como todos os outros.*

Junta de Investigação Matemática — Porto, 1951, Abril.

A função de Dirac — Sua interpretação matemática — III

por **Ruy Luís Gomes**

Derivada de uma distribuição

Para maior facilidade de dedução suponhamos que se trata de uma função com derivada no sentido ordinário:

$$f'(x) = \lim_{h=0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Ora, como cada função $f(x)$ é identificada com a respectiva distribuição $\int f(x)\,\varphi(x)\,dx$, somos levados a considerar a nova razão incremental

$$(1) \qquad \frac{\int f(x+h)\,\varphi(x)\,dx - \int f(x)\,\varphi(x)\,dx}{h},$$

a que ainda se pode dar a forma

$$(1') \qquad \int f(y)\,\frac{\varphi(y-h) - \varphi(y)}{h}\,dy,$$

mediante a substituição $x = y - h$.

Como a razão incremental afecta agora a função φ e não f, bastará sujeitar φ a uma hipótese suplementar para ficar assegurado o limite de (1) para $h = 0$.

Concretamente, se φ admitir derivada, contínua, sobre todo R^1, tem-se

$$(2) \qquad \lim_{h=0} \frac{\int f(x+h)\,\varphi(x)\,dx - \int f(x)\,\varphi(x)\,dx}{h} = -\int f(x)\,\varphi'(x)\,dx.$$

Na verdade com a hipótese formulada, (1') transforma-se em

$$-\int f(y)\,\varphi'(y)\,dy - \int f(y)\,[\varphi'(y+\theta h) - \varphi'(y)]\,dy$$

ou efectivamente em

$$-\int f(y)\,\varphi'(y)\,dy - \int_K f(y)\,[\varphi'(y+\theta h) - \varphi'(y)]\,dy,$$

sendo K o suporte compacto de φ.

Ora, como, por hipótese, φ' é contínua sobre R^1, resulta uniformemente contínua sobre K donde

$$\left| \int_K f(y)\,[\varphi'(y+\theta h) - \varphi'(y)]\,dy \right| \leqslant \delta \int_K |f(y)|\,dy \;, \quad |h| < \varepsilon(\delta).$$

Finalmente, atendendo a que $f(y)$ e portanto $|f(y)|$ têm integral finito em qualquer compacto, vem

$$\left| \int f(y)\,[\varphi'(y+\theta h) - \varphi'(y)]\,dy \right| < \delta \quad |h| < \varepsilon(\delta),$$

donde (2). Em resumo

$$\int f'(x)\,\varphi(x)\,dx = -\int f(x)\,\varphi'(x)\,dx,$$

conforme a regra de integração por partes.

No caso de uma função $f(x)$, localmente somável, evidentemente, mas sobre a qual nada acrescentamos a respeito da existência de derivada ordinária, tomamos $-\int f(x)\,\varphi'(x)\,dx$ para sua distribuição derivada, baseados nos desenvolvimentos (1), (1'), (2).

Numa palavra: $f'(\varphi) = -f(\varphi')$.

Ampliando a hipótese suplementar sobre φ de maneira a assegurar a existência de derivada contínua $\varphi^n(x)$, para n qualquer, escreveremos

$$f^{(n)}(\varphi) = (-1)^n f(\varphi^n),$$

o que nos permite afirmar — *uma função localmente somável admite derivadas de todas as ordens, que coincidem com as derivadas ordinárias quando estas tiverem efectivamente sentido.*

De um modo ainda mais geral, se designarmos por $\tau(\varphi)$ toda a funcional linear contínua no espaço (D) das funções contínuas, de suporte compacto, com derivadas contínuas de todas as ordens, temos

$$\tau^{(n)}(\varphi) = (-1)^n\,\tau(\varphi^{(n)}).$$

A continuidade de τ deverá entender-se nestes termos: se as funções $\varphi_j \in (D)$ têm os seus suportes contidos num compacto fixo de R^1 e se convergem uniformemente para 0 assim como todas as suas derivadas, então o número $\tau(\varphi_j)$ converge para 0. Esta definição é sugerida pelo caso de $\tau(\varphi) = f(x)$, pois as funções $\varphi_j = \dfrac{\varphi(x-h_j) - \varphi(x)}{h_j}$ ou, de um modo geral, $\varphi_h = \dfrac{\varphi(x-h) - \varphi(x)}{h}$ verificam todas as condições acima enumeradas, podendo tomar-se para compacto fixo o da própria função φ.

Para acabar de legitimar a noção de derivada duma distribuição, é conveniente mostrar ainda que as funções de (D) não são tão raras como pode parecer à primeira vista.

Ora, se como exemplo típico de função $\varphi \in (C)$ podemos tomar qualquer função nula nos extremos a, b de um intervalo onde é contínua (e igualmente nula no complementar de $[a, b]$), para ser também $\varphi \in (D)$ é necessário que as suas derivadas se anulem todas em a, b — fronteira de $[a, b]$.

Geomètricamente, a tangente em a e em b deve ser paralela ao eixo das y.

No entanto demonstra-se[1] que (D) é denso em (C).

Derivadas parciais

Se partirmos de uma função de várias variáveis teremos

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\varphi) = -f\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\right)$$

e, portanto,

$$\frac{\partial T}{\partial x_k}(\varphi) = -T\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\right),$$

para uma distribuição qualquer.

Exemplos:

(1) *Derivada da função de* Heaviside

No estudo dos circuitos eléctricos ou, de um modo geral, de um sistema linear, de qualquer natureza, surge constantemente o problema dos *regimes transitórios*, quere dizer, da determinação da «resposta» — corrente — a uma «acção» — força electro-motriz — que começa bruscamente no instante $t = 0$.

Ora, se nós introduzirmos a função de Heaviside $r(t)$ — igual a zero para $t < 0$ e à unidade para $t > 0$ — a «acção» mais geral que podemos imaginar ficará com a forma

$$h(t)\, r(t),$$

e nela se resumem as duas características: 1) actuar bruscamente no instante $t = 0$; 2) coincidir com uma função qualquer para $t > 0$.

Em consequência, para o cálculo da «resposta» a uma «acção» qualquer, começa-se pelo cálculo da «resposta» à «acção» elementar $r(t)$. Compreende-se, portanto, a importância prática desta função.

Por outro lado, como se trata de uma função, localmente somável, é certo, mas descontínua para $t = 0$, não se pode derivar $r(t)$ assim à vontade.

No entanto, fazendo intervir a teoria das distribuições, concilia-se sem dificuldade o ponto de vista prático do engenheiro com as exigências de rigor do matemático.

Efectivamente, de acordo com a definição de derivada de uma distribuição, tem-se

$$r'(\varphi) = -\int_{-\infty}^{\infty} r(t)\, \varphi'(t)\, dt = -\int_{0}^{\infty} \varphi'(t)\, dt$$

$$r'(\varphi) = \varphi(0).$$

Mas

$$\delta(\varphi) = \varphi(0),$$

logo

$$r' = \delta:$$

a derivada da função de Heaviside coincide com a função de Dirac.

E de um modo geral

$$r^{(n)}(\varphi) = \delta^{(n-1)}(\varphi) = (-1)^{(n-1)}\varphi^{(n-1)}(0).$$

Para esclarecer agora melhor o papel das descontinuidades de uma função f na expressão da sua derivada, suponhamos que f tem p descontinuidades de 1.ª espécie $x_1 < x_2 < \cdots < x_p$, admitindo derivada ordinária em cada um dos intervalos $(-\infty, x_1)$, (x_1, x_2), $\cdots (x_{p-1}, x_p)$, (x_{p}, ∞).

Teremos

$$f'(\varphi) = -f(\varphi') = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \varphi'(x)\, dx =$$

$$= -\int_{-\infty}^{x_1} f(x)\, \varphi'(x)\, dx - \int_{x_1}^{x_2} f(x)\, \varphi'(x)\, dx + \cdots$$

$$-\int_{x_{p-1}}^{x_p} f(x)\, \varphi'(x)\, dx - \int_{x_p}^{\infty} f(x)\, \varphi'(x)\, dx.$$

Mas

$$\int_{-\infty}^{x_1} f\varphi'\, dx = \Big[f\varphi'\Big]_{-\infty}^{x_1-0} - \int_{-\infty}^{x_1} f'\varphi\, dx.$$

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f\varphi'\, dx = \Big[f\varphi'\Big]_{x_{i-1}+0}^{x_i-0} - \int_{x_{i-1}}^{x_i} f'\varphi\, dx,$$

$$\int_{x_p}^{\infty} f\varphi'\, dx = \Big[f\varphi'\Big]_{x_p+0}^{\infty} - \int_{x_p}^{\infty} f'\varphi\, dx$$

[1] Schwartz — *Théorie des distributions*, p. 21, 22.

com

$$\left[f\varphi' \right]_{-\infty}^{x_1-0} = f(x_1-0)\,\varphi'(x_1)$$

$$\left[f\varphi' \right]_{x_p+0}^{\infty} = -f(x_p+0)\,\varphi'(x_p) = 0\,.$$

Logo,

$$f'(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f'\,\varphi\,dx + \sum_{i=1}^{p} \left[f(x_i+0) - f(x_i+0) \right] \varphi(x_i)$$

ou ainda

$$f'(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(\varphi)\,dx + \omega_i\,\delta_{x_i}(\varphi)\,,$$

quere dizer — a derivada de f *é igual á distribuição — derivada* f' *acrescentada da massa* ω_i *por cada ponto de descontinuidade de* f.

A derivada segunda terá a forma

$$f''(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f''(\varphi)\,dx + \omega'_i\,\delta_{x_i}(\varphi) + \omega_i\,\delta'_{x_i}(\varphi)\,,$$

com

$$\omega'_i = f'(x_i+0) - f'(x_i-0)\,,$$

e assim por deante.

Laplaciano da função $\frac{1}{r}$.

Como $\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ é uma função localmente somável[1] em R^3, temos

$$\Delta\left(\frac{1}{r}\right)(\varphi) = \iiint \frac{1}{r}\,\Delta\varphi\,dx\,dy\,dz\,.$$

Mas

$$\iiint \frac{1}{r}\,\Delta\varphi\,dx\,dy\,dz = \lim_{\varepsilon\to 0} \iiint_{r\geq\varepsilon} \frac{1}{r}\,\Delta\varphi\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \iiint_{r\geq\varepsilon} \left[\Delta\left(\frac{1}{r}\right)\varphi - \sum \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x}\,\varphi \right) + \right.$$

$$\left. + \sum \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) \right] dx\,dy\,dz =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \iiint_{r\geq\varepsilon} \left[\sum \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\,\frac{\partial x}{\partial x}\right) - \right.$$

$$\left. - \sum \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x}\,\varphi \right) \right] dx\,dy\,dz$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \iint_{r\geq\varepsilon} \sum \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x}\cos\alpha\,\varphi\,ds\,,$$

designando por α, β, γ os ângulos da normal exterior à esfera $r=\varepsilon$ com os eixos coordenados.

Consequentemente,

$$\Delta\left(\frac{1}{r}\right)(\varphi) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[-\frac{1}{\varepsilon^2} \iint_{r=\varepsilon} \varphi\,ds \right]$$

$$\Delta\left(\frac{1}{r}\right)(\varphi) = -4\pi\,\varphi(0) = -4\pi\,\delta(\varphi)$$

ou, numa forma abreviada,

$$\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = -4\pi\,\delta\,.$$

Apliquemos agora este resultado à dedução da equação de Poisson.

O integral definido do potencial

$$U(x_1, x_2\, x_3) = \iiint_v \frac{\rho(a,b,c)}{r}\,da\,db\,dc$$

$$r = \sqrt{(x_1-a)^2 + (x_2-b)^2 + (x_3-c)^2}\,,$$

pode considerar-se como uma extensão a R^3 de

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)\,g(t)\,dt\,,$$

em que g se anule no exterior de um compacto, equivalente ao volume potenciante em .

Ora, passando às distribuições, temos

$$h(x) = \int \varphi(x)\,h(x)\,dx = \int \varphi(x)\,dx \int f(x-b)\,g(t)\,db =$$

$$= \iint \varphi(u+v)\,f(u)\,g(v)\,du\,dv\,,$$

mediante $\quad x = u+v \;,\; t = v\,.$

Ainda se pode escrever

$$h(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \int \varphi(x+y)\,g(y)\,dy$$

ou, em termos de distribuições,

$$h(\varphi) = f_x\left\{ g_y\left(\varphi(x+y)\right)\right\}\,,$$

sendo g_y e f_x as distribuições geradas pelas funções

$$g_y = g(y) \quad \text{e} \quad f_x = f(x)\,.$$

No caso de potencial temos

$$U(\varphi) = \rho_x\left\{ \frac{1}{r_y}\,\varphi(x+y) \right\},\quad \frac{1}{r_y} = \frac{1}{\sqrt{y_1^2+y_2^2+y_3^2}}\,,$$

$$\rho_x = \rho(x_1, x_2, x_3)\,.$$

---

[1] Fora da origem, 0, é evidente. Para o verificar na origem, 0, basta passar às coordenadas polares de polo em 0.

$$\Delta U = \rho_x \left\{ \frac{1}{r_y} \left(\Delta_x \varphi (x+y) \right) \right\} = \rho_y \left\{ \frac{1}{r_y} \left(\Delta_y \varphi (x+y) \right) \right\}$$

pois tanto vale derivar $\varphi (x+y)$ em ordem a y como em ordem a x.

Mas

$$\frac{1}{r_y} [\Delta_y \varphi (x+y)] = \Delta_y = \Delta_y \left(\frac{1}{r_y} \right) \left(\varphi (x+y) \right) =$$

$$= -4\pi \delta \varphi (x+y) = -4\pi \varphi (x),$$

em virtude do resultado anterior relativo precisamente ao Laplaciano de $\frac{1}{r}$.

Logo,

$$\Delta U (\varphi) = -4\pi \rho (\varphi),$$

que é a equação de Poisson.

Bibliografia Fundamental. — Além da obra de Schwartz já indicada, ver especialmente o artigo do mesmo autor na *Revista de Telecomunicações*, Tomo 3, N.º 4, Avril, 1948. Pelo que respeita á introdução da função de Heaviside no estudo dos regimes transitórios dos circuitos eléctricos, consultar A. Angot — *Compléments de Mathématiques*, Coll. Technique du C. N. E. T., Paris, 1949 — págs. 450-459.

PEDAGOGIA

O PROGRAMA DE MATEMÁTICA DA ACTUAL REFORMA DO ENSINO LICEAL

I

por *Maria Teodora Alves*

Não se pode apreciar o programa de uma disciplina do ensino liceal, sem considerar o conjunto das outras disciplinas e os respectivos programas.

No estudo crítico que farei aos programas de Matemática, atenderei a esse facto, tanto mais que algumas disciplinas que constituíam o antigo 2.º ciclo liceal, foram desdobradas, pela actual reforma.

No 2.º ciclo liceal, além da Matemática, há as seguintes disciplinas: Português, Francês, Inglês, História, Geografia, Ciências Naturais, Ciências Físico-Químicas e Desenho. A estas actividades há ainda que acrescentar: Canto Coral, Educação Física, Religião e Moral e Mocidade Portuguesa.

Com verdade, não se poderá dizer que os alunos do 2.º ciclo liceal (13 a 15 anos) na época crítica do seu desenvolvimento, estejam aliviados de trabalho intelectual e físico.

Ao desdobramento de disciplinas corresponde sempre uma maior extensão de programas, maior exigência dos professores e dos pontos de exame.

Aquele programa de História do 2.º ciclo, no género, pode considerar-se um modelo perfeito de exagero e e de minúcia. Na edição «Programas das disciplinas do ensino Liceal» começa na página 99 e termina na pág. 110.

É um saber estupendo e aflitivamente instrutivo, para rapazes e raparigas dos 13 aos 15 anos.

Com razão, afirma o Dr. Decroly, o eminente pedagogo belga: «Les programmes ont été inspirés par des hommes très savants dans leur specialité, mais trop peu préoccupés de la psychologie, pour eux l'enfant est accessoire».

O período de desenvolvimento das crianças até aos 15 anos exige da parte da escola (professores e legisladores) os maiores cuidados e a maior prudência.

Com efeito, o crescimento mental atinge o máximo desenvolvimento à volta dos 16 anos (experiências de Terman) mas há outros psicólogos e experimentadores, tão categorizados como Terman, que reduzem o período de crescimento mental à volta dos 15 anos e, mesmo alguns deles, à volta dos 14 anos.

Ora a inteligência significa antes aptidão para adquirir conhecimentos do que os próprios conhecimentos já adquiridos.

Longe de mim a ideia de que seja possível desenvolver a inteligência sem comunicar informações e sem transmitir conhecimentos. Mais longe também a ideia de que o único propósito da educação é o desenvolvimento da inteligência.

Mas devo considerar que é esse um dos grandes propósitos da educação e aquele que mais de perto se liga aos programas e às disciplinas que constituem o curriculum. Analisarei os programas de Matemática, nos três ciclos liceais, tendo em atenção estas considerações.

O n.º 39 da «Gazeta de Matemática» insere um artigo de crítica aos programas de Matemática da actual reforma de ensino liceal, da autoria dos