MATEMÁTICAS ELEMENTARES

SOLUÇÕES INTEIRAS NÃO NEGATIVAS E INTEIRAS POSITIVAS DA EQUAÇÃO DE DIOFANTO[1]

por *Heliodoro Augusto Lopes* e *António Francisco Pires*

Consideremos a equação de Diofanto $ax+by=c$ em que:

a) os números a, b, e c são inteiros e positivos *nenhum deles nulo ou negativo*;

b) os coeficientes a e b são primos entre si, o que garante a irredutibilidade da equação e a existência de uma infinidade de soluções inteiras dadas, a partir de uma delas $x_0 ; y_0$, por

$$x = x_0 + b \cdot u \quad ; \quad y = y_0 - a \cdot u$$

com u inteiro qualquer.

I — Resolução da equação em números inteiros não negativos

O parâmetro u deve satisfazer simultâneamente às duas condições:

$$x_0 + b \cdot u \geqslant 0 \quad ; \quad y_0 - a \cdot u \geqslant 0$$

donde se deduz

$$-\frac{x_0}{b} \leqslant u \leqslant \frac{y_0}{a}$$

dupla condição que mostra ser *limitado o número de soluções em números inteiros não negativos.*

Como x_0 e y_0 não podem ser conjuntamente *números negativos*, dois casos se apresentam:

$A \to x_0 ; y_0$ *é uma solução em números positivos*

Designando h e k os maiores inteiros contidos em $\frac{y_0}{a}$ e $\frac{x_0}{b}$, respectivamente, a sucessão

$$\text{S)} \quad -k-1 ; -\frac{x_0}{b} ; -k ; \cdots ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; \; ; \cdots ; h ; \frac{y_0}{a} ; h+1$$

mostra que u assume os $h+k+1$ valores inteiros

$$-k ; \cdots ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; \cdots ; h$$

a que correspondem *outras tantas soluções em números não negativos.*

Ora, de

$$y_0 = a \cdot h + r ; \;\; 0 \leqslant r < a \;\; \text{e} \;\; x_0 = b \cdot k + R ; \;\; 0 \leqslant R < b$$

deduz-se

$$\frac{y_0}{a} = h + \frac{r}{a} \quad \text{e} \quad \frac{x_0}{b} = k + \frac{R}{b} .$$

Adicionando membro a membro as igualdades anteriores, resulta

$$1) \quad \boxed{\frac{c}{ab} = h + k + \frac{br + aR}{ab}}$$

atendendo a que $x_0 ; y_0$ é uma solução da equação proposta.

A fracção $\frac{br + aR}{ab}$ obedece à dupla condição $0 \leqslant \frac{br + aR}{ab} < 2$, porque de $0 \leqslant r < a$ e $0 \leqslant R < b$ se obtém $0 \leqslant br + aR < 2 \cdot ab$; além disso, a referida fracção é diferente de 1, o que se reconhece com auxílio dos teoremas seguintes: «*Se um número divide uma das duas parcelas de uma soma, esta e a outra parcela, divididas por esse número dão restos iguais*» e «*Se um número divide um produto e é primo com um dos factores, divide o outro factor*».

Nestas condições, temos:

a) $$0 \leqslant \frac{br + aR}{ab} < 1$$

A igualdade 1) toma a forma $\frac{c}{ab} = h + k + \begin{cases} 0 \\ 0,m \end{cases}$ da qual se conclui que $h+k$ é o *maior inteiro* contido em c/ab.

Portanto: «*O número de soluções em inteiros não negativos é igual ao maior inteiro contido em c/ab aumentado de uma unidade*».

b) $$1 < \frac{br + aR}{ab} < 2$$

A referida igualdade 1) escreve-se com a forma

$$\frac{c}{ab} = h + k + 1 + 0,n$$

que mostra ser $h+k+1$ o *maior inteiro* contido em c/ab.

[1] Recebido em 1951, Fevereiro, 12.

PORTANTO: «*O número de soluções em inteiros não negativos é igual ao maior inteiro contido em* c/ab.

$B \to x_0; y_0$ *é uma solução em que* x_0 *é negativo e* y_0 *positivo*

Pondo $x'_0 = -x_0$ e designando h e k os maiores inteiros contidos em $\frac{y_0}{a}$ e $\frac{x'_0}{b}$, respectivamente, a sucessão

$$S_1) \qquad 1; 2; \cdots; k; \frac{x'_0}{b}; k+1; \cdots; h-1; h; \frac{y_0}{a}; h+1$$

mostra que u assume os $h-k$ valores inteiros

$$k+1; k+2; \cdots; h-1; h$$

a que correspondem *outras tantas soluções em números não negativos*.

Procedendo como anteriormente, de

$$\frac{y_0}{a} = h + \frac{r}{a}; 0 \leqslant r < a \quad \text{e} \quad \frac{x'_0}{b} = k + 1 - \frac{R'}{b}$$

com $\qquad R' = b - R$ e $0 \leqslant R < b$

conclui-se

$$2) \qquad \boxed{\frac{c}{ab} = h - k - 1 + \frac{br + aR'}{ab}.}$$

atendendo a que $x_0; y_0$ é uma solução da equação proposta.

Como R' obedece à dupla condição $0 < R' \leqslant b$, reconhece-se que a fracção $\frac{br + aR'}{ab}$ satisfaz a $0 < \frac{br + aR'}{ab} < 2$; além disso, é igual a 1 se $b = R'$ e $r = 0$, e diferente de 1 nos outros casos.

Nestas condições, temos

$$a) \qquad 0 < \frac{br + aR'}{ab} < 1$$

A igualdade 2) toma a forma

$$\frac{c}{ab} = h - k - 1 + 0, m$$

da qual se conclui que $h-k-1$ é o *maior inteiro* contido em c/ab.

PORTANTO: «*O número de soluções em inteiros não negativos é igual ao maior inteiro contido em* c/ab *aumentado de uma unidade*».

$$b) \qquad 1 \leqslant \frac{br + aR'}{ab} < 2$$

A referida igualdade 2) escreve-se com a forma

$$\frac{c}{ab} = h - k - 1 + \begin{cases} 1 \\ 1, n \end{cases}$$

que mostra ser $h-k$ o *maior inteiro* contido em c/ab.

PORTANTO: *O número de soluções em inteiros não negativos é igual ao maior inteiro contido em* c/ab ».

As considerações feitas em $A \to$ e $B \to$ permitem escrever a proposição P.: — «*O número de soluções em números inteiros não negativos da equação* $ax + by = c$, *nas condições indicadas, é igual ao maior inteiro contido em* c/ab *ou ao inteiro seguinte*», visto que o raciocínio e a conclusão em $B \to$ se mantêm quando y_0 é negativo e x_0 positivo, como fàcilmente se reconhece.

OBS. — No caso limite $c = 0$, a proposição anterior ainda é aplicável. Na realidade, a equação $ax + by = 0$ admite a única solução não negativa $x = 0; y = 0$.

II — Resolução da equação em números inteiros e positivos

Neste caso, os números $-\frac{x_0}{b}$ e $\frac{y_0}{a}$, que limitam a variação do parâmetro u, mesmo que inteiros, *não são* valores de u, quer dizer, u obedece à dupla condição

$$-\frac{x_0}{b} < u < \frac{y_0}{a}$$

Como em I — temos a considerar dois casos:

$A \to x_0; y_0$ *é uma solução em números positivos*

A sucessão S) e a correspondente igualdade 1) permitem construir o quadro seguinte:

Valores de $-\frac{x_0}{b}$ e $\frac{y_0}{a}$	Número de soluções	Maior inteiro contido em c/ab
Não inteiros	$h+k+1$	$h+k$ ou $h+k+1$
Ambos inteiros	$h+k-1$	$h+k$
Um deles inteiro	$h+k$	$h+k$

$B \to x_0; y_0$ *é uma solução em que* x_0 *é negativo e* y_0 *positivo*

A sucessão S_1) e a correspondente igualdade 2) permitem construir o quadro seguinte:

Valores de $-\frac{x_0}{b}$ e $\frac{y_0}{a}$		Número de soluções	Maior inteiro contido em c/ab
Não inteiros		$h-k$	$h-k$ ou $h-k-1$
Ambos inteiros		$h-k-1$	$h-k$
É inteiro	$-\frac{x_0}{b}$	$h-k$	$h-k$
	ou $\frac{y_0}{a}$	$h-k-1$	$h-k-1$

Da observação dos quadros precedentes, concluimos a proposição seguinte, vulgarmente conhecida pelo nome de Teorema de Catalan:

«*O número de soluções em números inteiros e positivos da equação* $ax+by=c$, *nas condições indicadas, é igual ao maior inteiro contido em* c/ab *ou esse inteiro aumentado ou diminuido de uma unidade*», visto que o raciocínio e a conclusão em $B\rightarrow$ se mantêm quando y_0 é negativo e x_0 positivo, como fàcilmente se reconhece.

Obs$_1$: — Esta proposição pode aplicar-se à determinação do número de soluções em inteiros não negativos, porque contém a correspondente proposição P. referida em I$\rightarrow$.

Obs$_2$: — As considerações anteriores levam-nos às seguintes conclusões, úteis na *prática* da determinação das soluções em números inteiros e positivos:

a) *Se* c/ab *é inteiro, o número de soluções é igual ao maior inteiro contido em* c/ab *diminuido de uma unidade;*

b) *Se a parte própria de* c/ab, *tornada irredutível, tem por denominador um dos coeficientes* a *ou* b, *o número de soluções é igual ao maior inteiro contido em* c/ab;

c) *Nos outros casos, o número de soluções é igual ao maior inteiro contido em* c/ab *ou esse inteiro aumentado de uma unidade.*

Alguns exemplos:

Equações	Número de soluções — Aplic.º os teor.	Número de soluções — Resolv.º a eq.
$7x+5y=140$	n. neg. 4 ou 5	5
	posit. 3	3
$5x+3y=87$	n. neg. 5 ou 6	6
	posit. 5	5
$3x+5y=53$	n. neg. 3 ou 4	4
	posit. 3 ou 4	4

PONTOS DE EXAME DO 3.º CICLO DO ENSINO LICEAL E DE EXAMES DE APTIDÃO ÀS ESCOLAS SUPERIORES

Ensino Liceal — Exames do 3.º ciclo — 1950.

I

3220 — Determine os números a e b inteiros e positivos tais que o polinómio $x^3-6x^2+2ax+b$ seja divisível por $x-1$. R: *Representando por* P(x) *o polinómio, tem-se* $P(1)=0$ *ou* $2a+b=5$, *equação de* Diofanto *que admite 2 soluções em números inteiros e positivos:* $a_1=1$, $b_1=3$ *e* $a_2=2$, $b_2=1$. *Há pois dois polinómios,* $P_1(x)=x^3-6x^2+2x+3$ *e* $P_2(x)=x^3-6x^2+4x+1$, *nas condições do enunciado.*

3221 — É dada a equação $x^2+4ax+a=0$ em que $a>0$. 1) Determine a equação cujas raízes sejam respectivamente a média aritmética e a média geométrica das raízes da equação dada. 2) Calcule a de modo que a soma das raízes da equação obtida seja igual a -6. R: 1) *Sejam* x_1 *e* x_2 *as raízes da equação dada e* y_1 *e* y_2 *as da eq. a determinar. Então:* $y_1=(x_1+x_2)/2=-2a$, $y_2=\sqrt{x_1x_2}=\sqrt{a}$, $y_1+y_2=\sqrt{a}-2a$ *e* $y_1y_2=-2a\sqrt{a}$; *a eq. do 2.º grau pedida é* $y^2+(2a-\sqrt{a})y-2a\sqrt{a}=0$. 2) $\sqrt{a}-2a=-6$, $\sqrt{a}=2a-6$. *Racionalizando:* $4a^2-25a+36=0$ *eq. que admite as 2 raízes* 4 *e* 9/4, *esta última solução extranha à eq.* $\sqrt{a}=2a-6$. *Tem-se pois* $a=4$.

II

3222 — Os pontos $A(-2,-3)$ e $B(0,1)$ são os extremos do diâmetro duma circunferência. a) Calcule o raio da circunferência. b) Calcule as coordenadas do centro. c) Escreva a equação da circunferência. d) Sendo S o ponto de intersecção da circunferência com o semi-eixo positivo das abcissas, determine o ângulo que a recta AS forma com esse eixo. R: a) $R=\overline{AB}/2=\sqrt{20}/2=\sqrt{5}$; b) $C(-1,-1)$; c) $(x+1)^2+(y+1)^2=5$ ou $x^2+y^2+2x+2y-3=0$; d) *os 2 pontos de intersecção do eixo das abcissas com a circunferência são as soluções do sistema:* $x^2+y^2+2x+2y-3=0$, $y=0$, *sistema equivalente a* x^2+2x-

$-3=0$, $y=0$, *donde* $(1,0)$ *e* $(-3,0)$. *O 1.º ponto é o que pertence ao semi-eixo positivo e portanto* S $(1,0)$. *A eq. de* AS *é* $y=x-1$ *cujo coeficiente angular permite determinar imediatamente o ângulo* α *pedido:* $\operatorname{tg}\alpha=1$ ou $\alpha=\pi/4$ rad.

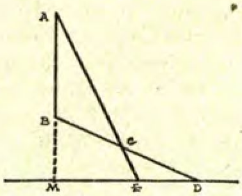
III

3223 – Sendo $A=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{1-\sec^2\alpha}$, $\cos\alpha=+\dfrac{3}{4}$ e α do 4.º quadrante, calcule A.

R: $\mathrm{A}=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{1-\sec^2\alpha}=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{-\operatorname{tg}^2\alpha}=-\operatorname{cotg}\alpha$.

Se $3\pi/2<\alpha<2\pi$ *e* $\cos\alpha=3/4$, *vem* $\operatorname{sen}\alpha=-\sqrt{1-9/16}=$ $=-\sqrt{7}/4$ *donde* $\operatorname{cotg}\alpha=-3/\sqrt{7}=-3\sqrt{7}/7$ *e, portanto,* $\mathrm{A}=3\sqrt{7}/7$.

3224 – Na encosta dum monte está espetado verticalmente um poste telegráfico $\overline{AB}$ que projecta na direcção BD uma sombra $\overline{BC}=8{,}5$ m, quando a altura do Sol (dada pelo ângulo $A\hat{E}M$) for 65° 30′.



O ângulo $\hat{D}$ é 33° 20′ 5″. a) Calcule o ângulo $A\hat{C}B$. b) Calcule $B\hat{A}C$. c) Determine a altura $\overline{BA}$. R: a) $\mathrm{A\hat{C}B=A\hat{E}M-B\hat{D}M}=65°\,30'-33°\,20'\,5''=32°\,9'\,55''$. b) $\mathrm{B\hat{A}C}=90°-\mathrm{A\hat{E}M}=24°\,30'$. c) *Considerando o triângulo* [ABC], *tem-se* $\dfrac{\overline{\mathrm{AB}}}{\operatorname{sen}32°\,9'\,55''}=\dfrac{8{,}5}{\operatorname{sen}24°\,30'}$,

$$\log\overline{\mathrm{AB}}=8{,}5+\log\operatorname{sen}32°\,9'\,55''+\log\operatorname{sen}24°\,30'=$$
$$=0{,}92942+\bar{1}{,}72620+0{,}38227=1{,}03789,$$
$$ou\ \ \overline{\mathrm{AB}}=10{,}91\text{ m}.$$

IV

3225 – O número N divide o produto 6×5 e é primo com 5. a) Que valores pode tomar N? b) Enuncie e demonstre o teorema que justifica a resposta à alínea anterior. R: a) $\mathrm{N}=2,3,6$.

3226 – Determine os três menores números pares consecutivos, tais que o primeiro seja múltiplo de 3, o segundo múltiplo de 5 e o terceiro múltiplo de 7.

Soluções dos n.ºs 3220 a 3225 de M. Zaluar

Solução do n.º 3226 Vidé: A. A. Lopes, *Compêndio de Aritmética Racional*, 3.º ciclo dos Liceus, Porto, 1951, pág. 153.

Exames de aptidão para frequência dos preparatórios para a Faculdade de Engenharia e Instituto Superior Técnico — 1950, Outubro — Ponto n.º 3.

3227 — Demonstre que o número que precede ou o que segue um número primo superior a 3 é um múltiplo de 6. R: *Bastará provar que qualquer número primo superior a* 3 *é da forma* $\dot{6}\pm1$, *o que é imediato em virtude de qualquer número ser* $\dot{6}$, $\dot{6}\pm1$, $\dot{6}\pm2$ *ou* $\dot{6}\pm3$ *e de serem compostos todos os números da forma* $\dot{6}$, $\dot{6}\pm2$ *e* $\dot{6}\pm3$, *pondo de lado os números* 2 *e* 3.

3228 — Determine quantos números inteiros existem, menores que 2000, que sejam múltiplos comuns de dois ou três dos números 2, 3 e 5. R: *Os números são:* $6k\ (k\neq\dot{5})$, $10k'\ (k'\neq\dot{3})$ $15k''\ (k''\neq\dot{2})$ *e* $30k'''$ *todos inferiores a* 2000. *Os números* 6k *inferiores a* 2000 *são em número de* 333, *isto é,* k *pode tomar todos os valores desde* 1 *a* 333*; teremos de excluir nos valores de* k *os múltiplos de* 5, *menores que* 333, *que são* 66. *Portanto há* $333-66=267$ *n.ºs inferiores a* 2000 *que são múltiplos de* 2 *e* 3 *e não de* 5. *Procedendo igualmente para os outros números, obtinha-se o número global* 534 (*incluindo, naturalmente,* 0).

3229 — Determine m e n de modo a terem as mesmas raízes as equações:

$$(m-1)\,x^2+(2m+1)\,x+4=0$$
$$(2n+1)\,x^2-(n-3)\,x-1=0.$$

R: *Deverá ser* $\dfrac{m-1}{2n+1}=\dfrac{2m+1}{-(n-3)}=\dfrac{4}{-1}$, *sistema cuja solução é* $n=7/20$, $m=-29/5$

3230 — Resolva a inequação $\dfrac{x^2+2x+3}{2x^2-3x}<0$.

R: *O numerador da fracção é sempre positivo para valores reais de* x (*os seus zeros são números imaginários*)*; o denominador deverá ser portanto negativo. Vem* $0<x<3/2$.

3231 — Faça o desenvolvimento do binómio $(x-x^{-2})^5$ e simplifique os seus termos. R:

$$x^5-5x^2+10x^{-1}-10x^{-4}+5x^{-7}-x^{-10}.$$

3232 — Determine com o auxílio de umas tábuas, dando os logaritmos dos números e das funções goniométricas com cinco algarismos decimais, os valores de α que satisfazem à equação

$$\operatorname{tag}\alpha=\sqrt{1-\cos 327°\,12'}\,\cdot$$

R: *Em virtude de ser* $\cos 2x=1-2\operatorname{sen}^2x$ *a relação dada é equivalente a* $\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{2\operatorname{sen}^2 163°\,36'}$, *ou* $\operatorname{tg}\alpha=$ $=\sqrt{2}\operatorname{sen}163°\,36'=\sqrt{2}\operatorname{sen}16°\,24'$.

Aplicando logaritmos, vem $\log\operatorname{tg}\alpha=1/2\log2+$ $+\log\operatorname{sen}16°\,24'$, $\log\operatorname{tg}\alpha=\bar{1}{,}60128\ (5)$, $\alpha=k\cdot180°+$ $+21°\,45'\,57''$.

Soluções dos n.ºs 3227 a 3232 de Laureano Barros