MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAMES DE FREQUÊNCIA E FINAIS

ÁLGEBRA SUPERIOR — MATEMÁTICAS GERAIS

F. C. C. — Álgebra Superior — **Exame final, 1949-50.**

3233 — Primitivar a função:

$$f(x) = (2x-3)/\sqrt{2x^2-2x+1}\,.$$

3234 — Aplicar o método de Sturm à separação das raízes do polinómio x^3+x^2-3x-1 e calcular a maior delas em 1.ª aproximação pelo método de Newton.

3235 — Mostrar que a família de quádricas

$$2x^2+2y^2+\lambda^2 z^2+(\lambda^2-2)\,xz+4\,(x+y+z)+4-\lambda=0$$

contém duas esferas concêntricas. Determinar a superfície que corta o eixo $0z$ no ponto $z=-1$ e a recta $x=1$, $z=-5$ no ponto $y=0$. Reduzir a equação obtida à forma canónica. Classificar a superfície.

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — **Exame final — 4/10/1950.**

3236 — Estude a função $y=1-e^{-x^2}$. R: Domínio: $(-\infty,\infty)$; $\lim\limits_{x=-\infty} y=1-0$, $\lim\limits_{x=\infty} y=1-0$. Continuidade: *contínua em todos os pontos do domínio.* Simetria: *relativamente a* yy'. Traços nos eixos: $(0,0)$. Crescimento: *decrescente em* $(-\infty,0)$; *crescente em* $(0,+\infty)$. Máx. e mín.: *mínimo na origem, igual a zero.* Concavidade: *negativa em* $\left(-\infty,-1/\sqrt{2}\right)$; *positiva em* $\left(-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2}\right)$; *negativa em* $\left(1/\sqrt{2},+\infty\right)$. Inflexões: *nos pontos de abcissa* $x_1=-1/\sqrt{2}\approx-0{,}7$ *e* $x_2=1/\sqrt{2}\approx0{,}7$ *com ordenadas* $y=1-e^{-1/2}\approx0{,}4$. Assíntotas: *de equação* $y=1$. *A curva para baixo da assíntota.*

3237 — Seja $P(x,y)$ um polinómio cujos termos são todos de grau superior à unidade. *a*) Mostre que a equação $f(x,y)\equiv P(x,y)+x^2-y=0$ define implicitamente uma função $y(x)$ na vizinhança do ponto $M(0,0)$. *b*) Supondo $P(x,y)=(x^2-1)\,y^2$ escreva a equação da tangente à curva de equação $f(x,y)=0$, na origem dos eixos coordenados. *c*) Demonstre o teorema em que baseou a resposta à alínea *a*). R: *Como o polinómio se anula evidentemente no ponto* $M(0,0)$, *tem-se:* $f(0,0)=0$ *e como* $f(x,y)$ *é contínua relativamente a* x *e contínua e* monótona *relativamente a* y, *pelo teorema de existência, tem-se* uma $y(x)$ *em certo rectângulo centrado em* $M(0,0)$. *A derivada de* $f(x,y)$ *em ordem a* y *é igual a* -1 *no ponto* $M(0,0)$, *e por isso* $f(x,y)$ *é* decrescente *relativamente a* y *dentro do tal rectângulo conveniente. Como* $f(x,y)$ *é diferenciável de diferencial identicamente nula, vem*

$$df=f'_x\,dx+f'_y\,dy=0 \quad ou \quad f'_x+f'_y\frac{dy}{dx}=0\,,$$ *e é pois*

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2xy^2+2x}{2(x^2-1)\,y-1}$$ *que para* $x=0$ *é nula. A tangente é o eixo dos* XX.

3238 — Defina sucessão de Sturm de $f(x)$ no intervalo (a,b), e mostre como ela reflete a passagem de x por um zero simples de $f(x)$ interior ao intervalo.

Utilize a sucessão na contagem e separação dos zeros do polinómio $P(x)=x^4-2x^3-2x-1$ e calcule-os em primeira aproximação. R: *São limites dos zeros* $l=-1/2$ *e* $L=3$.

x	$-1/2$	0	1	2	3
x^4-2x^3-2x-1	$+5/12$	-1	-4	-5	$+20$
$2x^3-3x^2-1$	-2	-1	-2	$+3$	$+21$
$3x^2+6x+5$	$+11/4$	$+5$	$+14$	$+29$	$+50$
$-x-1$	$-1/2$	-1	-2	-3	-4
-2	-2	-2	-2	-2	-2
N.º de variações	3	3	2	2	1

Há uma raiz real em $(-1/2,0)$. *Para ela o extremo favorável ao cálculo é* $-1/2$; *tem-se:*

$$r_1=-\frac{1}{2}+\frac{\frac{-15}{16}}{4}=0{,}422 \quad (\textit{por defeito}).$$

Há uma raiz real em $(2,3)$. *Para ela o extremo favorável é* 3; *tem-se:* $r_2=3-\dfrac{20}{42}=2{,}524$ *(por excesso).*

3239 — Faça a contagem e separação das raizes da equação $4x^3-5x^2-14x-6=0$, e calcule em 1.ª aproximação a maior das raizes reais. R: *Os limites* *das raizes são* $l=-1$ *e* $L=3$. *Com a sucessão de Fourier temos o seguinte quadro*:

x	-1	0	1	2	3
$4x^3-5x^2-14x-6$	-1	-6	-21	-12	$+15$
$12x^2-10x-14$	$+4$	-7	-6	$+7$	$+32$
$24x-10$	-17	-5	7	$+19$	$+31$
24	$+24$	$+24$	$+24$	$+24$	$+24$
N.º de variações	3	1	1	1	0

f (x) *tem um máximo em* $(-1,0)$; *se este máximo é positivo há dois zeros reais distintos no intervalo; se o máximo é nulo há um só zero no intervalo (zero duplo); se o máximo é negativo não haverá zeros reais no intervalo* $(-1,0)$.

As equações das tangentes em $(-1,-1)$ *e em* $(0,-6)$ *são respectivamente*: $y+1=4(x+1)$ *e* $y+6=-7x$, *e cortam, respectivamente,* OX *em pontos de abcissas* $-3/4>-6/7$. *As duas tangentes cruzam-se abaixo de* OX *e a concavidade é negativa no intervalo: não há raizes reais em* $(-1,0)$. *Para calcular a única raiz real o extremo favorável é* 3; *a equação da tangente no ponto* $(3,15)$ *é*: $y-15=32(x-3)$ *e ela corta* OX *em*: $r=-15/32+3=81/32 \simeq 2{,}532$, *aproximação por excesso.*

3240 — Defina função contínua num ponto e limites $f(a-0)$ e $f(a+0)$. Estude a continuidade da função $y=\dfrac{1}{1+a^{1/x}}$ $(a>0)$ no ponto de abcissa $x=0$. (Sugestão: Faça o estudo nas duas hipóteses $a<1$ e $a>1$). R: *Se* $a>1$ *o valor da função é* 0 *e os limites esquerdo e direito são, respectivamente,* 1 *e* 0. *Se* $a<1$ *o valor da função é* 1 *e os limites esquerdo e direito são, respectivamente,* 0 *e* 1. *A função não é contínua no ponto* $x=0$ *mas é contínua à direita.*

3241 — Determine o polinómio de grau mínimo tal que $f(-4)=391$, $f(-2)=35$, $f(0)=-1$, $f(2)=-5$, $f(4)=119$.

R: *A tábua das diferenças é*

$$\begin{array}{r|r|r|r|r|r}
-4 & 391 & & & & \\
 & & -356 & & & \\
-2 & 35 & & 320 & & \\
 & & -36 & & -288 & \\
0 & -1 & & 32 & & 384 \\
 & & -4 & & 96 & \\
2 & -5 & & 128 & & \\
 & & 124 & & & \\
4 & 119 & & & &
\end{array}$$

portanto o polinómio é:

$$f(x)=391-173(x+4)+40(x+4)(x+2)-$$
$$-6(x+4)(x+2)x+(x+4)(x+2)x(x-2).$$

Soluções dos n.os 3236 a 3241 J. R. de Albuquerque

I. S. T. — Matemáticas Gerais — Exame final — Outubro de 1950.

I — Parte Prática

3242 — Determinar em que condições haverá imaginários puros z satisfazendo à relação $z^p=(1+i)^p$ onde p é um número inteiro e positivo.

3243 — Dada a função $f(x)=(x+a)(x-a)(x+b)(x-b)$, verificar que ela é limitada inferiormente no intervalo $(-\infty,+\infty)$. Mostrar que o seu extremo inferior é ao mesmo tempo um mínimo absoluto e relativo. Fazer a representação gráfica e aproximada da função.

3244 — Verificar que a série $\sum_1^\infty (-1)^n \dfrac{x^n}{(n!)^3}$ é absoluta e uniformemente convergente para todos os valores reais de x. Calcular o valor da sua derivada, para $x=2$, com um erro inferior a 0,001.

3245 — Discutir a posição relativa dos três planos

$$\begin{cases} ax+y+z+1=0 \\ x+ay+z+1=0 \\ x+y+az+1=0 \end{cases}$$

para os diferentes valores de a.

Escrever a equação normal de um dos planos.

II — Parte Teórica

3246 — Discuta, analítica e gràficamente, o problema da existência de raízes reais na radiciação de números complexos.

3247 — Faça um estudo sumário da função logarítmica de variável complexa. Determine, em particular, os seus pontos de analiticidade e estabeleça para eles a expressão da sua derivada.

3248 — Diga em que diferem os conceitos de convergência uniforme e de convergência ordinária duma série funcional.

3249 — Defina degenerescência duma cónica e indique os vários casos que se podem apresentar.

Demonstre que a condição de degenerescência da cónica $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+G=0$ é dada por

$$\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & G \end{vmatrix}=0$$

Enunciados de J. H. Arandes

ANÁLISE INFINITESIMAL

F. C. P. — CÁLCULO INFINITESIMAL — 1.º Exercício de revisão — 1950-51.

3250 — Calcular a derivada de $y = sh\,x^2$ a partir da definição. R:

$$y' = \lim_{h\to 0} \frac{sh\,(x+h)^2 - sh\,x^2}{h} =$$

$$= \lim \frac{2\,sh\,\dfrac{(x+h)^2-x^2}{2}\,ch\,\dfrac{(x+h)^2+x^2}{2}}{h} =$$

$$= \lim \frac{2\,sh\,(hx+h^2/2)\,ch\,(x^2+hx+h^2/2)}{h} = 2x\,ch\,x^2,$$

visto

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{sh\,\alpha}{\alpha} = \lim \frac{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}{2\alpha} = \lim_{\alpha\to 0}\frac{e^{2\alpha}-1}{2\alpha\,e^{\alpha}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\log(1+1/n)} = 1 \quad \textit{sendo} \quad \frac{1}{n} = e^{2\alpha}-1.$$

3251 — Determinar o verdadeiro valor de

$$y = \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{e^{sh\,x}-1}\right] \quad \text{para } x=0.\ \text{R:}$$

$$y_{(0)} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{sh\,x}-x-1}{x\,(e^{sh\,x}-1)} =$$

$$= \lim \frac{1 + sh\,x + \dfrac{sh^2 x}{2!} + \cdots - x - 1}{x\left(sh\,x + \dfrac{sh^2 x}{2!} + \cdots\right)} =$$

$$= \lim \frac{x + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots + \dfrac{sh^2 x}{2!} - x}{x\,sh\,x} =$$

$$= \lim \frac{\dfrac{sh^2 x}{2!}}{x\,sh\,x} = \frac{1}{2}.$$

Nota: Poderia também ter-se aplicado a regra de L'Hospital.

3252 — Apoiado no teorema «uma série, cociente de duas outras, é convergente na parte comum aos intervalos de convergência das séries dividendo e divisor, salvo nos pontos onde esta se anula» efectuar o desenvolvimento em série de potências de x da função $y = \dfrac{sen\,x}{\log(1+x)}$ escrevendo os quatro primeiros termos. Determinar o raio de convergência da série e a partir desta o verdadeiro valor da função para $x=0$. R: $sen\,x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \cdots\cdots + R_n$.

A série $\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1}\dfrac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}$ *é convergente em todo o intervalo finito.*

$$R_n = \frac{x^n}{n!}(-1)^{n+1}\,sen\left(\theta x + n\frac{\pi}{2}\right) \quad (\textit{resto de Lagrange})$$

$|R_n| \leqslant \left|\dfrac{x^n}{n!}\right| \to 0$ *com* $n\to\infty$ *para os valores de* x *considerados.*

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots\cdots + R'_n$$

$\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\dfrac{x^m}{m}$ *é convergente no intervalo,* $-1 < x \leqslant 1$

$$R'_n = \frac{x^n}{(n-1)!}(1-\theta)^{n-1}(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+\theta x)^n}$$

$0 < \theta < 1$ (R'_n *resto de Cauchy*).

$|R'_n| = \left|\dfrac{x^n}{1-\theta}\left(\dfrac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n\right| \to 0$ *com* $n\to\infty$ *para os valores de* x *considerados. Então*

$$y = \frac{sen\,x}{\log(1+x)} =$$

$$= \frac{x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n+1}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots}{x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n+1}\dfrac{x^n}{n} + \cdots} =$$

$$= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} - \frac{13}{24}x^3 + \cdots,$$

série esta que representa a função para $-1 < x < 0$ *e* $0 < x \leqslant 1$.

Embora a série seja convergente para $x=0$ *ela não representa a função nesse ponto visto esta, atravez da sua expressão analítica, não estar definida no referido ponto.*

No entanto, fazendo $y_{(0)} = \lim_{x\to 0}\dfrac{sen\,x}{\log(1+x)}$ *(se existir) a série passa a definir a função no intervalo* $-1 < x \leqslant 1$ *sendo*

$$y_0 = \lim_{x\to 0}\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} - \cdots\right) = 1.$$

3253 — Determinar os máximos e mínimos de

$$y = \frac{x^2(x+1)}{(x-1)^2}.$$

R: *Derivando vem* $y' = \dfrac{x(x^2-3x-2)}{(x-1)^3}$. *Zeros da primeira derivada:* $x_1 = 0$, $x_2 = \dfrac{3+\sqrt{17}}{2}$ *e* $x_3 = \dfrac{3-\sqrt{17}}{2}$.

Pontos de descontinuidade da primeira derivada $x_4 = 1$. *Valor da segunda derivada nos pontos onde a primeira se anula:*

$$y'' = \frac{3x^2-6x-2}{(x-1)^3}$$

$$y''_1 > 0 \quad x_1 = 0 \quad \textit{mínimo}$$

$$y''_2 > 0 \quad x_2 = \frac{3+\sqrt{17}}{2} \quad \textit{mínimo}$$

$$y''_3 < 0 \quad x_3 = \frac{3-\sqrt{17}}{2} \quad \textit{máximo.}$$

Sinal da primeira derivada à esquerda e à direita do ponto de descontinuidade

$$\left.\begin{array}{l} y'(1-h) = \dfrac{-4-5h+h^3}{-h^3} > 0 \quad \textit{crescente} \\[2ex] y'(1+h) = \dfrac{-4+\cdots h+\cdots}{h^3} < 0 \quad \textit{decrescente} \end{array}\right\} \textit{máximo.}$$

F. C. P. — Cálculo Infinitesimal — 2.º Exercício de revisão — 1950-51.

3254 — Calcular $I = \displaystyle\int \frac{\cos 2x}{\cos x}\,dx$. R:

$$I = \int \frac{2\cos^2 x - 1}{\cos x}\,dx = 2 \operatorname{sen} x - \int \frac{dx}{\cos x} =$$

$$= 2 \operatorname{sen} x - \log \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + C.$$

3255 — Calcular $\int \log \sqrt{1+x^2}\,dx$. R:

$$\int \log\sqrt{1+x^2}\,dx = x \log\sqrt{1+x^2} - \int\left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx$$

$$= x\log\sqrt{1+x^2} - x + \operatorname{arc\,tg} x + C.$$

3256 — Sendo $\begin{cases} x^y + x^z + u^x = 2 + \dfrac{\pi}{4} \\[2ex] \cos \dfrac{yz}{x} + \log \operatorname{tg} uz = 1 \end{cases}$

calcular $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ no ponto $x=1$, $y=0$, $z=1$, $u = \dfrac{\pi}{4}$.

R:

$$\begin{cases} y\,x^{y-1} + z x^{z-1} + u^x \log u + x^z \log x \dfrac{\partial z}{\partial x} + x u^{x-1} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \\[2ex] \left(\operatorname{sen}\dfrac{yz}{x}\right)\cdot\dfrac{yz}{x^2} + \left[-\left(\operatorname{sen}\dfrac{yz}{x}\right)\dfrac{y}{x} + \right. \\[2ex] \left. + \dfrac{1+\operatorname{tg}^2(uz)}{\operatorname{tg}(uz)}\,u\right]\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{1+\operatorname{tg}^2(uz)}{\operatorname{tg}(uz)}\,z\,\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = -\left(1 + \dfrac{\pi}{4}\log\dfrac{\pi}{4}\right) \\[2ex] \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{4}{\pi} + \log\dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$$

3257 — Determinar os máximos e mínimos de y definido por

$$(1) \qquad 2y^3 + x^2(1+2y) = 0.$$

R: *Derivando vem:*

$$(2) \qquad 2x(1+2y) + (6y^2+2x^2)\,y' = 0.$$

$\begin{cases} 2y^3 + x^2(1+2y) = 0 \\ 2x(1+2y) = 0 \end{cases}$, *satisfeito para os valores finitos* $x=0$, $y=0$ *mas que anulam o coeficiente de* y'. *Logo, ponto singular.*

Derivando novamente:

$$2(1+2y) + 4xy' + [6y^2+2x^2]\,y'' + [4x+12yy']\,y' = 0$$

que para $x=0$, $y=0$ *dá* $y' = \infty$ *(raiz dupla).*

Logo, ponto de descontinuidade de y', *com tangente dupla. A eq.* (1) *define* x, *no campo real para* $0 \leqslant y \leqslant -1/2$.

Nestas condições, a equação (2) *mostra que para*

$$x < 0 \ \textit{é}\ y' > 0 \ \textit{e para}\ x > 0 \ \textit{é}\ y' < 0.$$

Se a função passa de crescente a decrescente no ponto $x=0$, *a função é* máxima *nesse ponto.*

Soluções dos n.ºs 3250 a 3257 de Rogério Nunes

I. S. T. — Cálculo — 1.º exame de frequência, 1950-51.

3258 — Dada a matriz $A = (a_{ik})$, sendo

$$\begin{cases} a_{ik} = -a_{ik} \quad (\text{para } i \gtrless k) \\ a_{ii} = a \quad (\text{qualquer que seja } i) \end{cases}$$

mostrar que a transposta de A é permutável com A. R: *Se* B *é uma matriz tal que* $a_{ik} = -a_{ik}$ *(para* $i \gtrless k$), e $a_{ii} = 0$, *será* $A = aE + B$ *e* $\check{A} = aE - B$. *Efectuando* $A\check{A} = a^2E^2 - aEB + BaE - B^2$ *ou, por* E *ser permutável com qualquer matriz,* $A\check{A} = a^2E - B^2$. *Efectuando* $\check{A}A = (aE - B)(aE + B) = a^2E^2 - B^2 = a^2E - B^2$, *donde se conclue* $\check{A}A = A\check{A}$.

3259 — Utilizando o teorema da derivação dum integral definido em relação a um parâmetro, mostrar que o integral

$$I=\int_0^{\infty} e^{-x^2-a^2/x^2}\,dx$$

é da forma $I=Ce^{-2a}$, sendo C uma constante. R: $\frac{dI}{da}=\int_0^{\infty}-\frac{2a}{x^2}e^{-x^2-\frac{a^2}{x^2}}dx$. *Efectuando agora a substituição* $\frac{a}{x}=t$, *tem-se* $\frac{dI}{da}=2\int_{\infty}^{0}e^{-\frac{a^2}{t^2}-t^2}dt=$ $=-2\int_0^{\infty}e^{-\frac{a^2}{t^2}-t^2}dt=-2I$, *donde* $\frac{dI}{I}=-2\,da$. *Integrando:* $\log I=\log C-2a$ *ou* $I=Ce^{-2a}$. *Fazendo* $a=0$ *tem-se* $I=\int_0^{\infty}e^{-x^2}dx=C$ *e, como* $\int_0^{\infty}e^{-x^2}dx=$ $=\sqrt{\pi}$, $I=\sqrt{\pi}\,e^{-2a}$.

3260 — Funções de variação limitada e absolutamente contínuas — Conceitos de integral de Perron e Denjoy.

3261 — Diferenciais de ordem superior à primeira das funções de uma e mais duma variável.

Soluções dos n.os 3258 e 3259 de J. Quadros e Costa.

CRÍTICA DE LIVROS

Espaços Vetoriais Topológicos por ***Leopoldo Nachbin***, *Notas de Matemática N.º 4*.

Livraria Boffoni, Rua do Chile, 1, Rio de Janeiro, 1948.

Este livro, de que é autor o Professor Leopoldo Nachbin, faz parte duma colecção de monografias, «Notas de Matemática», publicada sob a direcção do Professor A. Aniceto Monteiro, quando da sua estadia no Brazil. Trata-se do essencial dum curso de Teoria das Funções, professado pelo autor na Secção de Matemática da Faculdade de Filosofia do Rio de Janeiro.

O nome do Prof. Nachbin, que no domínio dos espaços funcionais e dos espaços abstractos tem publicado alguns trabalhos de grande mérito e de que a cultura matemática brasileira muito tem a esperar, é bem conhecido nos meios matemáticos internacionais e sem dúvida também dos leitores da «Gazeta de Matemática». Para estes não constituirá pois uma surpreza o elevado interêsse que este livro lhes poderá oferecer.

O objectivo central do curso é uma introdução à teoria dos espaços vectoriais topológicos. Colocando-se num alto nível de generalidade, o autor considera espaços vectoriais topológicos sobre um corpo topológico abstrato e não especialmente sobre o corpo dos números reais ou complexos. É precisamente o estudo aprofundado da teoria dos corpos topológicos que constitui a parte mais importante deste primeiro tomo. A noção de *corpo topológico estritamente mininal*, criada pelo autor, permite-lhe obter uma nova caracterização dos corpos *valorizáveis*, isto é, cuja topologia pode ser definida por meio dum valor absoluto, e também formular, para os espaços vectoriais topológicos cujo corpo de escalares é um corpo topológico estritamente mininal, importantes propriedades que adiante mencionaremos. (1)

Para conduzir o leitor até estes belos resultados, cujo interêsse não reside apenas na sua originalidade, o autor fornece, nos primeiros seis parágrafos do livro, todas as noções e teoremas necessários a uma iniciação neste domínio, não pressupondo conhecidos senão os preliminares da teoria dos conjuntos.

Assim, no § 1 são dadas as definições de espaço topológico, subespaço, transformação contínua, espaço topológico separado, etc. Ao produto de espaços topológicos é concedido aqui o lugar importante que ele merece, pela sua utilidade neste como noutros capítulos. O § 2 consta das definições de corpo e de subcorpo e o § 3 trata de corpos topológicos e das propriedades fundamentais desta noção. Veem a seguir, no § 4, os espaços vectoriais sobre um corpo comutativo abstracto. A recta, o plano e o espaço euclideano tridimensional são apontados como exemplos de espaço vectorial e designados para servir de ilustração geométrica intuitiva às noções a seguir introduzidas. Isso facilitará particularmente a compreensão do significado das noções de subespaço vectorial, variedade linear, homotetia, translação, produto de espaços vectoriais, forma linear, etc.

O § 5 é consagrado aos espaços vectoriais topológicos (sobre um corpo topológico) que são definidos

(1) O autor publicou, de resto, outras aplicações desta noção, numa nota «On strictly minimal topological division rings», *Bulletin of the American Math. Society*, **55** (1949) p. p. 1128-1136.