3259 – Utilizando o teorema da derivação dum integral definido em relação a um parâmetro, mostrar que o integral

$$I=\int_0^{\infty} e^{-x^2-a^2/x^2}\,dx$$

é da forma $I=Ce^{-2a}$, sendo C uma constante. R: $\frac{dI}{da}=\int_0^{\infty}-\frac{2a}{x^2}e^{-x^2-\frac{a^2}{x^2}}dx$. *Efectuando agora a substituição* $\frac{a}{x}=t$, *tem-se* $\frac{dI}{da}=2\int_{\infty}^{0}e^{-\frac{a^2}{t^2}-t^2}dt=$ $=-2\int_0^{\infty}e^{-\frac{a^2}{t^2}-t^2}dt=-21$, *donde* $\frac{dI}{I}=-2\,da$. *Integrando:* $\log I=\log C-2a$ *ou* $I=Ce^{-2a}$. *Fazendo* $a=0$ *tem-se* $I=\int_0^{\infty}e^{-x^2}dx=C$ *e, como* $\int_0^{\infty}e^{-x^2}dx=$ $=\sqrt{\pi}$, $I=\sqrt{\pi}\,e^{-2a}$.

3260 – Funções de variação limitada e absolutamente contínuas — Conceitos de integral de PERRON e DENJOY.

3 261 – Diferenciais de ordem superior à primeira das funções de uma e mais duma variável.

Soluções dos n.os 3258 e 3259 de J. Quadros e Costa.

CRÍTICA DE LIVROS

Espaços Vetoriais Topológicos por ***Leopoldo Nachbin,*** *Notas de Matemática N.º 4.*

Livraria Boffoni, Rua do Chile, 1, Rio de Janeiro, 1948.

Este livro, de que é autor o Professor Leopoldo Nachbin, faz parte duma colecção de monografias, «Notas de Matemática», publicada sob a direcção do Professor A. Aniceto Monteiro, quando da sua estadia no Brazil. Trata-se do essencial dum curso de Teoria das Funções, professado pelo autor na Secção de Matemática da Faculdade de Filosofia do Rio de Janeiro.

O nome do Prof. Nachbin, que no domínio dos espaços funcionais e dos espaços abstractos tem publicado alguns trabalhos de grande mérito e de que a cultura matemática brasileira muito tem a esperar, é bem conhecido nos meios matemáticos internacionais e sem dúvida também dos leitores da «Gazeta de Matemática». Para estes não constituirá pois uma surpreza o elevado interêsse que este livro lhes poderá oferecer.

O objectivo central do curso é uma introdução à teoria dos espaços vectoriais topológicos. Colocando-se num alto nível de generalidade, o autor considera espaços vectoriais topológicos sobre um corpo topológico abstrato e não especialmente sobre o corpo dos números reais ou complexos. É precisamente o estudo aprofundado da teoria dos corpos topológicos que constitui a parte mais importante deste primeiro tomo. A noção de *corpo topológico estritamente mininal*, criada pelo autor, permite-lhe obter uma nova caracterização dos corpos *valorizáveis*, isto é, cuja topologia pode ser definida por meio dum valor absoluto, e também formular, para os espaços vectoriais topológicos cujo corpo de escalares é um corpo topológico estritamente mininal, importantes propriedades que adiante mencionaremos. (1)

Para conduzir o leitor até estes belos resultados, cujo interêsse não reside apenas na sua originalidade, o autor fornece, nos primeiros seis parágrafos do livro, todas as noções e teoremas necessários a uma iniciação neste domínio, não pressupondo conhecidos senão os preliminares da teoria dos conjuntos.

Assim, no § 1 são dadas as definições de espaço topológico, subespaço, transformação contínua, espaço topológico separado, etc. Ao produto de espaços topológicos é concedido aqui o lugar importante que ele merece, pela sua utilidade neste como noutros capítulos. O § 2 consta das definições de corpo e de subcorpo e o § 3 trata de corpos topológicos e das propriedades fundamentais desta noção. Veem a seguir, no § 4, os espaços vectoriais sobre um corpo comutativo abstracto. A recta, o plano e o espaço euclideano tridimensional são apontados como exemplos de espaço vectorial e designados para servir de ilustração geométrica intuitiva às noções a seguir introduzidas. Isso facilitará particularmente a compreensão do significado das noções de subespaço vectorial, variedade linear, homotetia, translação, produto de espaços vectoriais, forma linear, etc.

O § 5 é consagrado aos espaços vectoriais topológicos (sobre um corpo topológico) que são definidos

(1) O autor publicou, de resto, outras aplicações desta noção, numa nota «On strictly minimal topological division rings», *Bulletin of the American Math. Society*, **55** (1949) p. p. 1128-1136.

como espaços vectoriais munidos duma topologia tal que as operações de adição vectorial e de multiplicação por um escalar são contínuas. Destes espaços são demonstradas algumas propriedades simples fundamentais, nomeadamente as condições sob as quais ele se torna um espaço separado (de Hausdorff), bem como a caracterização das vizinhanças da origem. São consideradas a seguir as transformações lineares contínuas e os homomorfismos contínuos entre dois espaços vectoriais topológicos, mostrando-se como se constroiem as imagens homomorfas (directa e inversa), sobre um espaço vectorial, da topologia dum espaço vectorial topológico.

Muito criteriosamente, o autor ocupa todo o § seguinte com o estudo dos conjuntos limitados num espaço vectorial topológico, dedicando particular cuidado à apresentação desta noção, que tão grande importância assume no desenvolvimento da teoria dos espaços vectoriais topológicos. A definição rigorosa da noção de parte limitada é esclarecida pelo «seu conteúdo geométrico: uma parte L é limitada se e só se ela pode ser tornada, por meio de uma homotetia de centro na origem θ e de razão $\lambda \neq 0$ conveniente, tão pequena e próxima de θ quanto se desejar». Ou, o que é equivalente, «se toda a vizinhança da origem θ pode ser ampliada por uma homotetia de centro θ e razão λ conveniente, de modo a abranger L.» (pág. 42 e 43). Afora casos triviais sem interêsse, um espaço topológico não é limitado e, se for separado, não possui subespaços limitados além do subespaço formado pela origem. As propriedades clássicas fundamentais dos conjuntos limitados são aqui cuidadosamente demonstradas para espaços vectoriais topológicos; nomeadamente, a condição necessária e suficiente para que uma parte dum produto de espaços topológicos seja limitada: cada uma das suas projecções nos espaços factores são partes limitadas destes espaços.

Aqui termina, por assim dizer, a introdução desta primeira parte da teoria dos espaços vectoriais topológicos. Na verdade, as noções que anteriormente foram estudadas nas suas linhas essenciais são, de ora em diante, encaradas dum ponto de vista menos geral, que permitirá avançar mais profundamente na análise dessas noções. Assim é, sobretudo, no § 7. *Valorizações e corpos topológicos estritamente minimais*.

A topologia sobre um corpo comutativo K é agora definida por meio duma função real definida sobre K — *a valorização* — gosando de propriedades que generalizam as do valor absoluto dos números complexos. Fazendo a distinção entre valorizações arquimedianas e não arquimedianas, o autor dá como exempo das primeiras o valor absoluto (ou uma potência $h, 0 < h \leqslant 1$, do valor absoluto) sobre o corpo dos números reais ou dos números complexos; e como exemplo das segundas, a *valorização p-ádica* sobre o corpo Q dos números racionais, demonstrando que esta é a única valorização não-arquimediana sobre Q. Promete igualmente demonstrar «um resultado importante de Ostrowski, segundo o qual aqueles dois exemplos (a menos de detalhes a serem especificados) são os únicos possíveis de valorizações arquimedianas.» (pág. 54). O aludido teorema de Ostrowski é, sem dúvida, o que estabelece que *todo o corpo valorizado arquimediano é isomorfo (algèbrica e topològicamente) ao corpo dos números complexos valorizado com o valor absoluto habitual* (²). Mas não pudemos encontrar depois uma referência expressa ou a demonstração deste teorema. Trata-se possìvelmente de uma omissão por lapso.

O estudo das valorizações não arquimedianas é desenvolvido com todo o pormenor e é demonstrado o critério de Shafarevitch-Kaplansky para que um corpo topológico, possa ser valorizado: é necessário e basta que o conjunto dos elementos nilpotentes ou neutros seja limitado. Esta proposição é completada por uma condição para que um corpo valorizado seja não-arquimediano: é necessário e suficiente que seja limitado o conjunto dos seus inteiros.

A propósito do problema da valorização dum corpo toplógico, o autor, como já atrás assinalámos, introduz a noção do corpo topológico estritamente minimal. Para que um corpo topológico seja estritamente minimal é necessário e suficiente que as suas partes limitadas L possam ser caracterizadas pela propriedade seguinte: existe uma vizinhança $\mathfrak{U}$ de 0 tal que $1 \notin L\,\mathfrak{U}$. Demonstra em seguida que todo o corpo valorizado é estritamente minimal e, recìprocamente, todo o corpo topológico estritamente minimal cujos elementos nilpotentes formam uma vizinhança de 0 é valorizável. O corpo dos números reais e dos números complexos são, pois, estritamente minimais. O interêsse desta noção aparece ainda claramente no teorema seguinte: os corpos topológicos estritamente minimais são os únicos corpos K tais que para todo o espaço vectorial topológico E sobre K e toda a forma linear f de E, f é contínua se $f^{-1}(0)$ for um conjunto fechado de E e sòmente neste caso. É demonstrada uma proposição análoga relativa à equivalência das noções de de forma linear contínua e forma linear fechada (isto é, cujo gráfico é um conjnnto fechado no produto topológico de E por K).

Os dois últimos parágrafos são dedicados ao estudo das topologias fortes e fracas. Seguindo Mackey, o

---

(²) A. Ostrowski, Über einige Lösungen der Funkionalgleichung $\varphi(x)\varphi(y) = \varphi(x\,y)$. *Acta Math.*, 41 (1918) p.p. 271-284.

autor diz que uma topologia dum espaço vectorial topológico é forte se ela é a mais fina de todas as topologias que têm o mesmo conjunto de partes limitadas. Esta definição conduz à importante propriedade seguinte, que lhe serve de justificação: Se a topologia dum espaço vectorial topológico E sobre K é forte, então, qualquer que seja o espaço vectorial topológico F sobre K, toda a transformação linear de E em F, que transforme partes limitadas de E em partes limitadas de F, é contínua; o mesmo se não dá se a topologia de E não fôr forte. Mas para um leitor já familiarizado com a designação de topologias forte e fraca num espaço de Hilbert ou, mais geralmente, num espaço de Banach, toma especial significado esta outra proposição, que o autor demonstra sem comentários: *A topologia dum espaço vectorial topológico* E *localmente limitado sobre um corpo* K *não discreto é forte.* Na verdade, a condição de um espaço vectorial topológico ser localmente limitado (existência duma vizinhança limitada) não é senão a condição de Kolmogoroff, [3] necessária e suficiente para que um espaço vectorial topológico localmente convexo seja *normável.* Resulta pois da proposição indicada que a topologia definida por uma norma é forte, no sentido acima definido.

Uma topologia dum espaço vectorial topológico é dita fraca se ela é a menos fina de todas as topologias que tornam contínuas as mesmas formas lineares. O interesse desta noção tem origem na seguinte proposição: Dado um espaço vectorial E sobre um corpo topológico separado K, para cada topologia τ admissível sobre E, o conjunto das formas lineares sobre E contínuas relativamente a τ constitui um espaço vectorial; reciprocamente, para cada espaço vectorial F de formas lineares sobre E, existe pelo menos uma topologia τ admissível sobre E, relativamente à qual F é o conjunto de todas as formas lineares contínuas sobre E; e entre estas topologias há uma menos fina que as demais.

A terminar, o autor, anuncia para um tomo seguinte o estudo da noção de dual topológico dum espaço vectorial topológico, que virá completar e esclarecer as propriedades gerais das topologias fortes e fracas apresentadas nesta primeira parte do seu trabalho.

Depois desta rápida vista de olhos sobre o conteúdo deste livro, não nos parece inútil juntar alguns comentários e acentuar algumas características mais salientes. Entre estas impõe-se a grande actualidade do assunto, não sòmente como um capítulo da Análise Geral que está na primeira linha das preocupações de pesquiza de numerosos matemáticos, mas também como um instrumento indispensável para abordar os recentes desenvolvimentos da teoria dos espaços funcionais. Se necessário, tanto bastaria para justificar plenamente a sua inclusão num curso de Teoria das Funções. Do primeiro ponto de vista, não é demais insistir sobre o interêsse que apresenta este trabalho. A utilidade da formulação abstrata da teoria dos espaços vectoriais topológicos, pela grande simplicidade e elegância dos conceitos que ela proporciona, pela largueza dos domínios que permite abranger e a consequente economia de pensamento, tornou-se hoje uma ideia clara e geralmente aceite. No entanto não existia ainda, em língua portuguesa, uma exposição breve e sistematizada desta matéria, contendo as noções e resultados fundamentais e tendo em conta a orientação que nos últimos dez anos se tem imprimido a alguns dos principais capítulos. A teoria aqui desenvolvida aparece como um edifício fundado axiomáticamente e construído com uma solidez lógica sem lacunas. Por outro lado, a consistência e validade desta construção é posta em evidência pelo exemplo do espaço euclideano que aparece como caso particular.

Mas se deste ponto de vista, como exposição dogmática, este curso nos parece modelar, outro tanto se não pode dizer quando o consideramos como introdução à teoria dos espaços funcionais, ou, mais simplesmente, se temos em vista o seu intuito didático de fornecer aos alunos um novo instrumento de trabalho. Na verdade, através todo o livro se nota a ausência da preocupação de estabelecer uma ligação estreita entre os conceitos da Análise Geral e os correspondentes na Análise Funcional. Ora, para um leitor pouco familiarizado com as teorias matemáticas abstractas e cujos conhecimentos lhe não permitem encontrar sòzinho os «modelos concretos» da Análise Real ou da Análise Funcional aqui generalizados, estaria indicado fornecer como exemplos de espaços vectoriais topológicos, além dos espaços euclideanos os espaços funcionais mais correntes: o espaço dos polinómios, o espaço das funções contínuas, o das funções de quadrado do módulo somável (espaço de Hilbert), o das funções deriváveis, etc. Em particular nos §§ 8 e 9, isto permitiria mostrar como é corrente a consideração de topologias forte e fraca sobre um mesmo espaço vectorial, nomeadamente a topologia da convergência uniforme e a da convergência simples das sucessões de funções contínuas, por exemplo. Assim, quere-nos parecer que os preciosos comentários, indicações bibliográficas e notas com que se encerra o volume, poderiam proveitosamente alargar-se à sugestão de exemplos e exercícios. O leitor aí encontraria matéria para reflexão e interpretação

[3] A. Kolmogoroff, *Studia Mathematica*, 5 (1934), p. 29.

dos axiomas e principais resultados da teoria abstrata, e para a sua aplicação às teorias matemáticas que aquela engloba. Por outro lado, poupar-se-lhe-ia a impressão de aridez que tantas vezes as exposições dogmáticas deixam no espírito do leitor não iniciado — e desconfiado da «utilidade» da matemática «mais abstrata» do que aquela que lhe é familiar... As vantagens duma larga generalização tornar-se-iam evidentes até aos mais cépticos em tal matéria. Estamos certos de que o autor não deixará de obviar a esta deficiência nos tomos que a este se seguirão.

Para terminar, um rápido resumo pode ser feito do conteúdo deste livro: aí se estudam, com pormenor variável mas sempre com notável clareza, diferentes tipos de estruturas sobre um conjunto abstrato: *estruturas topológicas* (de espaço topológico), *algébricas* (de corpo, de espaço vectorial) e *mixtas* (de corpo topológico, de espaço vectorial topológico). A este respeito, esta publicação — continuando a linha dos Cadernos de Análise Geral lançados em Portugal pela Junta de Investigação Matemática, quando da passagem de A. Monteiro pelo Porto, em 1944 — subiu um importante degrau que a estas publicações não foi dado franquear, por razões que não importa agora analisar aqui. Por isso ainda, este trabalho é de recomendar a todos quantos naquelas publicações fizeram a sua iniciação no domínio da Análise Geral.

Alfredo Pereira Gomes (Bolseiro do C. N. R. S. — Paris)

BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de Matemática de que os Autores ou Editores enviarem dois exemplares à Redacção.

87 — GREEN, S. L. — **Dynamics** — University Tutorial Press Ltd., London, 1948, 264 págs.

Em prefácio, o Autor destina o presente livro aos estudantes, candidatos ao «General Degree in Arts or Science», da Universidade de Londres ou «Degree in Engineering»; ou ainda aos estudantes do primeiro ano, candidatos ao título «Mathematical Honours».

Por um lado, verifica-se que estes candidatos possuem conhecimentos elementares de cálculo integral, com prática suficiente de integração das mais correntes equações diferenciais ordinárias. Por outro lado, não devem ainda ter adquirido os instrumentos de Análise como por exemplo o cálculo variacional, que lhes permitam atitude mais crítica e exame mais profundo dos problemas da mecânica racional.

Realmente, a idea de explicar os fenómenos mecânicos dentro dum «princípio de economia» — atitude que começou a manifestar-se com Euler (1744) e Maupertuis, concretizando-se com Hamilton (1835), Gauss, Lipschitz, Hertz, etc. — não pode ser apresentada numa obra com o objectivo da presente. Nem as equações gerais do movimento, estabelecidas primeiramente por Lagrange (1760 e 1788), generalizadas ùltimamente por Appell (1900), Maggi e M. Fernandes (*Portug. Math.*, vol. 2, 1941) entram no âmbito deste livro. Mesmo os simples teoremas gerais da dinâmica que nos permitem em muitos casos estabelecer os integrais primários das equações diferenciais do movimento, reduzindo assim o *problema analítico* ao *problema mecânico*, não aparecem sob forma sistematizada que caracterize um livro de dinâmica analítica.

Não compreendemos mesmo por que razão o Autor termina o Cap. I, destinado ao estudo dos vectores (16 págs.), com um parágrafo (2 págs.) intitulado Newtonian Dynamics. Neste começa por definir dinâmica, velocidade e aceleração dum ponto, quantidade de movimento (momentum) duma partícula material; apresenta as leis de Newton (3) como axiomática da mecânica; e termina por definir as unidades de comprimento, tempo, velocidade, aceleração, força nos sistema C. G. S. e britânico

Este aglomerado de axiomas, conceitos e definições não nos parece justificável num livro que, nas restantes 250 págs., pretende ter um aspecto essencialmente prático. Com efeito, esses axiomas, conceitos e definições deveriam ser apresentados sob forma clara e acessível, mostrando a pessoas não iniciadas as próprias relações e independências. Só depois, com exemplos e aplicações, se deveria iniciar o estudo prático dos problemas abordados.

Os Caps. II e III são dedicados ao estudo do movimento rectilíneo do ponto. Com um mínimo de noções teóricas — de resto é o que acontece em todo o livro — o movimento rectilíneo é estudado sob a forma de vários exercícios resolvidos. No Cap. IV estabelecem-se nos diversos tipos de coordenadas (cartesianas, polares, intrínsecas) as equações do movimento plano. Seguidamente faz-se o estudo do movimento dos projecteis no vazio e em meio resistente. O pêndulo simples e o movimento dum ponto sobre a cicloide aparecem como casos particulares ou relacionados com o movimento sobre a circunfe-