ANO XII—N.º 47 GAZETA DE MATEMÁTICA MARÇO — 1951

REDACTOR PRINCIPAL: *M. Zaluar* • EDITOR: *Gazeta de Matemática, Lda.* • ADMINISTRADOR: *A. Sá da Costa*

REDACTORES ADJUNTOS: *J. Gaspar Teixeira, J. Morgado e J. da Silva Paulo*

Composto na Tipografia Matemática, Lda. — R. Almirante Barroso, 20, r/c — LISBOA-N

El método de laboratorio en la enseñanza de la Matemática

por ***Matilde O. de Macagno*** (*)

Introducción

El objeto de este trabajo es el de informar acerca del método de laboratorio, llamado también experimental, para la enseñanza de la Matemática en el ciclo medio, particularmente para el caso de las escuelas técnicas industriales y comerciales.

El estudio de este método y su aplicación son dignos de encararse, pues la experiencia demuestra que los institutos que han utilizado este método han logrado despertar un gran interés del alumnado por el aprendizaje de la Matemática.

Es un hecho bien conocido que se considera a la Matemática como una matéria difícil, por la gran parte de los alumnos.

La mayoria de los alumnos experimenta ciertas dificultades para asimilar la Matemática. Esos alumnos pueden clasificarse em varios grupos:

1—Alumnos sin interés por la materia; la encuentran árida, sin objetivo, preguntan: para qué sirve? Puede observarse que entre estos alumnos los hay de cierto talento.

2—Alumnos que tienen voluntad de aprender pero que no pueden asimilar completamente, no captan bien, no llegan al fondo del asunto, generalmente memorizan y a veces disfrazan hábilmente su conocimiento superficial. Sin embargo, el profesor puede ponerlos fácilmente en descubierto planteándoles problemas nuevos o diferentes de los del texto.

3—Alumnos de capacidad mediana y aún buena, con buena voluntad pero que tienen lagunas en su preparación y no pueden, por ello, seguir la materia. Com frecuencia lo reconecen ellos mismos al decir: «Me falta base». El profesor sabe que este es un estribillo al que apelan también los alumnos a los que no sólo les falta base, sino también deseos y voluntad para estudiar.

4—Alumnos sin interés, sin capacidad, sin preparación previa adecuada, que suelen unir todo eso a una conducta poco satisfactoria. Estes son los alumnos que en la calificación de conceptos de las juntas de profesores quedan eliminados o son tolerados porque hay alguna esperanza de que mejoren.

Qué puede hacer el profesor teniendo en cuenta que debe manejar grupos de unos 30 alumnos? El profesor tiene recursos para despertar el interés, puede enseñar a aprender, puede rellenar pequeñas lagunas; es decir, que puede hacer un trabajo eficaz, con los tres primeros grupos. Este puedo hacerlo porque va incluyendo todo eso en el desarrollo de la materia, que re realiza de um modo colectivo y no individual. El profesor debe dirigir su enseñanza convenientemente, porque, como dice Klein [1]: «la enseñanza no puede depender sólo de la materia objeto de la enseñanza, sino, sobre todo, del sujeto a quien se enseña».

El profesor no puede manejar al cuarto grupo de alumnos, pues deberia en tal caso adoptar um modo individual de enseñanza, que por sí solo no puede atender. Debiera dedicar mucho tiempo y atención a ese grupo, en detrimento de la mayoría.

El problema que plantea el cuarto grupo es digno de ser considerado por parte de los institutos de enseñanza. Seria muy interesante estudiar la posibilidad de seguir, con dicho grupo, un tratamiento más racional y más humano que el de la simple eliminación o el de la tolerancia. La eliminación salva a la Escuela, pero no al individuo. La tolerancia perjudica a ambos, a la Escuela porque ésta mantiene en su

(*) Profesora en la Escuela Industrial «Domingo F. Sarmiento» de la Universidad de Cuyo, Argentina.

seno elementos disolventes y perjudiciales, y al individuo, porque nada gana com su permanencia en un medio superior a sus cualidades.

Para el cuarto grupo, la Universidad quizás podría crear el organismo capacitado para «curar» es os casos difíciles, en vez de apelar a un tratamiento «quirúrgico» o de «paliativos». La recuperación de una parte de esos alumnos, cuya educación e instrucción se completarían por personal y métodos especializados, compensaria ciertamente los esfuerzos que se hicieran en ese sentido.

Este trabajo, dentro del extenso panorama de los métodos de educacción e instrucción, abarca sólo una pequeña región: se limita a uno de los métodos que el profesor puede seguir para despertar el interés del alumno y hacerle a la vez más fácil el camino de acceso al conocimiento de los conceptos matemáticos rigurosos.

2 — Dificultades en el aprendizaje de las Matemáticas-Opiniones

Es muy común encontrarse en cursos de la escuela secundária, con el problema que crean los alumnos que no aprenden bien la Matemática. Este problema ha llamado la atención de muchos profesores y aún de matemáticos eminentes.

Puede pensarse en varias causas, de las cuales las más importantes son: 1—falta de interés en la materia, por prejuicios propios del alumno o por el método o el no-método del profesor. 2—falta natural de capacidad. 3—fallas en la preparación previa.

Henri Poincaré [2] se pregunta «Cómo es que hay gentes que no comprenden las Matemáticas?» Señala lo sorprendente que parece que haya tantas personas refractarias a ellas, siendo que no invocan más que las leyes de la lógica y que están basadas en principios que todos reconocem. Destaca que parece imposible que haya tantos que no pueden seguir un razonamiento matemático y que es notable que se cometan fácilmente errores en dichos razonamientos. Poincaré busca la explicación, en la falta de memoria, para tener presentes todas las condiciones y reglas y sus alcances y sentidos. Compara esto con la capacidad de un jugador para recordar las jugadas hechas y para prever las posibles futuras. Hace falta tener, según Poincaré, un sentido del orden de los silogismos, del orden en que deben colocarse. Se ocupa, como se ve, de los casos en que hay falta natural de capacidad.

La falta natural de capacidad es uno de los defectos de tratamiento más difícil, pero siempre se puede hacer algo y el profesor debe estudiar a sus alumnos a fin de conocer sus aptitudes y sus fallas para aprovechar aquéllas y corregir éstas en lo posible.

Todo eso da matices a la enseñanza. La cuestión no es nueva por cierto, y más adelante se dá una información sumaria sobre modos y métodos de la enseñanza de la Matemática.

Por su relación com las ideias de Poincaré, se cita el siguiente párrafo de Schiller [3]: «Se ha discutido mucho el problema de si cierta dosis de la Matemática puede ser comprendida por todos los alumnos, y teóricamente es fácil responder que la Matemática es una ciencia de puro raciocinio y que cualquier persona que más omenos pueda pensar, debe ser capaz de aprender la Matemática en la extensión en que se da en la escuela. Pero los hechos no corroboran esta teoria La Matemática no es simplemente un asunto de raciocinio, sino que requiere imaginación especial y comprensión de cosas abstractas, y un tipo especial de memoria que no todos pueden tener en el mismo grado».

Si bien dedicado a una cuestión de mucho más vuelo que la enseñanza secundaria, Hadamard [4] ha escrito un libro en el cual señala los diferentes tipos de mentes y como unas se adaptan a ciertas partes o formas de estudio y creación matemática y a otras no. Señala como ejemplo sus propias dificultades en el manejo de la teoría de los grupos.

Como se ha hecho notar al comienzo, no se trata siempre de falta de capacidad en mayor o menor grado, muchas veces el alumno adolece de falta de interés o tiene fallas en la preparación anterior. A este respecto es interesante anotar la opinión de Mc Lellan y Dewey [5]: «No es demasiado decir que nueve por cada diez de aquellos a quienes no les gusta la Aritmética, o que, por lo menos creen que no tienen aptitud para la Matemática, deben su desgracia a una mala enseñanza inicial, a un método que frustra realmente la natural inquietud de la mente, y sustituye su actividade espontánea y libre, por una acción forzada y mecánica que no va acompañada de ningún interés vital y que no lleva ni a adquirir conocimiento ni a desarrolar la capacidad intelectual».

Salvo casos especiales, la falta de capacidad no es tan seria como para impedir al alumno el seguir su carrera, sobre todo en las escuelas técnicas o de especialización, secundarias. La ayuda del profesor y el esfuerzo del alumno pueden remediar ese defecto. La falta de preparación previa también puede resolverse, si el alumno la reconoce y toma las medidas necesarias para estudiar en horas extra, hasta alcanzar el nivel correspondiente. Queda el elemento más sutil, el interés, el entusiasmo. Es muy importante despertar el interés, comunicar entusiasmo al alumno. Para ello hay que tener interés y entusiasmo por la materia que se enseña, pero además hay que recurrir a una enseñanza objectiva, con aplicaciones prácticas y experimentales, con problemas bien presentados, con un contenido y una forma de ejecución, que satisfagan los deseos de casi todos los alumnos com vocación técnica.

La Matemática de las escuelas secundarias técnicas no es tan difícil de comprender y aprender, a veces se la hace difícil. Según la forma enque se la enseñe, puede llegar a ser una matéria atrayente o una materia desagradable y pesada. Un punto importante, para el interés del alumno, es el de darle la sensación de que está haciendo un trabajo original. Parece que esto no es posible porque se le enseñan cosas ya conocidas y completamente elaboradas, pero hay que tener en cuenta que para él son nuevas. Como dice el Prof. Young [6]: «Cuando un alumno saca conclusiónes por si mismo y hace su propio trabajo, está haciendo trabajo original, así haya sido el asunto formalmente establecido antes o no. Sin trabajos de ese carácter, el estudio matemático es casi inútil para la cultura». Y más adelante agrega: «si en cambio se habitúa a un alumno a memorizar un teorema, evitando comprender la demostración, el concepto que él encierra, no hay materia, así estudiada, que se vuelva más arida que la Geometría».

La Matemática es una de las materias que puede dar al alumno grandes satisfacciones en cuanto a los resultados de la iniciativa y el esfuerzo personal, de la aplicación inteligente de conocimientos básicos a la obtención de nuevas conclusiones. Pero para ello es necesario fomentar su capacidad creadora y no solamente su capacidad receptora. Volvemos a citar a Young [6]: «Diez páginas de Matemáticas entendidas son mejores que cien memorizadas y no comprendidas. Y una página realmente producida con independencia vale lo que diez entendidas claramente, pero de un modo pasivo... El objeto es el dominio, la conquista del espiritu del tema, no la ejercitación de la memoria ni la introducción en la mente de una enorme masa de hechos y fórmulas pertenecientes a la Matemática».

3 — Métodos de enseñanza de la Matemática

Son conocidas las divisiones de la Matemática en diferentes secciones: Aritmética, Geometría, Algebra, etc. Algunos autores han propugnado por la unificación o fusión de las diversas ramas en un tronco único. Además se sabe que las cuestiones matemáticas pueden plantearse de diferentes maneras y que las demostraciones pueden llevarse a cabo de acuerdo a procesos diversos: analítico, deductivo, inductivo, etc. Nos referiremos aquí a las diversas formas de enseñar, aplicables, en general, a otras disciplinas también. Las formas o métodos de enseñanza deben aplicarse claro está, en relación con lo que se enseña; en Matemáticas, en relación con la Geometría, con el Algebra, etc. y con el método elegido o necesario para la demostración.

Siguiendo al Profesor Young, aunque no estrictamente, se hace a continuación un resumen de los diversos métodos de enseñanza. Creemos innecesario para el objeto que perseguimos, de dar una idea descriptiva del asunto, el hacer una distinción entre modos y métodos, como hace el mencionado profesor.

1 — Método socrático. — En este método el profesor y el alumno mantienen un diálogo. Una cadena de preguntas de respuestas fáciles va llevando al alumno a la conclusión deseada.

2 — Método heurístico. — Tiene analogía con el socrático, pero es menos dirigido. En vez de una cadena de estímulos, el alumno va recibiendo impulsos aislados. El profesor va planteando cuestiones y problemas al alumno, dándole los conocimientos básicos para resolverlos, así como oportunas indicaciones. Dada la importancia de este método, se le dedica un parágrafo más adelante.

3 — Método examinativo y recitativo. — El profesor señala lecciones y las toma a los alumnos que las estudian en un texto y las recitan. Este método es el paraíso de los memoristas. Sin embargo, el método examinativo, cuando se emplea para repasos y recapitulaciones, es muy útil, lo mismo que el recitativo, quando el alumno expone con una cierta originalidad cuestiones que ha resuelto él o que ha estudiado especialmente.

4 — Método de conferencias. — El profesor expone en forma de conferencias, los alumnos toman notas que luego completan y estudian, o que les sirven de guia para consultar textos.

5 — Método experimental o de laboratorio. — El alumno trabaja en el aula, donde dispone de elementos para medir, calcular, dibujar, etc. Hace modelos, aparatos sencillos, realiza algunas experiencias, etc., para objectivar hechos y relaciones matemáticas. El profesor dirige el trabajo como se hace en un laboratório de física o de química. Los alumnos trabajam en pequeños grupos o individualmente.

4 — Método heurístico

Este método tiene grandes afinidades con el de laboratorio. Es además uno de los mejores para despertar el interés del alumno. Por estas circunstancias diremos algo más sobre este método, antes de pasar al de laboratório.

El método heurístico tiene por finalidad enseñar al alumno a ver las cosas por sí mismo, en lugar de explicarle paso a paso la materia y que él reciba en forma pasiva los conocimientos.

El profesor y el texto sirven aquí de guías. Se proponen al alumno cuestiones y problemas que él debe tratar de resolver, sin darle la solución. El profesor le ayuda con sugerencias e indicaciones, criticando en forma sana lo que el alumno va haciendo. El profesor encamina al alumno, lo trata a la manera de un maestro que enseña un oficio a un aprendiz. El alumno, con todos los elementos que el profesor le va dando, hace su trabajo, y cuando llega al resultado tiene la satisfacción de haberlo hallado él mismo.

El profesor que utiliza este método debe obtener del alumno que resuelva los problemas propuestos, que formule definiciones, que demuestre teoremas, que desarrolle un sentido autocrítico para analizar sus razonamientos y creaciones.

El método se ha empleado mucho en Geometría, pero es igualmente aplicable a la Arimética y al Algebra, así como a otras materias distintas de la Matemática.

El método heurístico se puede aplicar en forma individual o colectiva. En este último caso toda la clase trabaja en forma activa, descubriendo los teoremas, discutiendo el trabajo realizado, proponiendo nuevas ideias y esbozando la labor a realizar. Naturalmente, el profesor debe presidir con habilidad, dando lugar oportunamente a cada alumno, evitando divagaciones y haciendo oportunos comentarios y correcciones.

La objeción de que los alumnos pueden simular originalidad estudiando previamente las cuestiones a tratar se salva si el profesor no sigue un libro determinado, sino que él mismo inventa o prepara los trabajos o los elige de muchas fuentes. Cuando se trata de teoremas ya establecidos por el programa, queda el recurso de darle al alumno que viene «preparado», una dirección momentánea de la classe. Si persiste en la inadaptación al método, habrá que reducirlo a silencio, para que la clase pueda trabajar. En general, de acuerdo con la experiencia, el alumnado sigue las directivas del profesor y se adapta con gusto al método heurístico.

En este método no hay, por otra parte, inconveniente en que el alumno consulte libros apropiados para ayudarse o para comparar su demostración con la publicada. Lo que hay que evitar principalmente, es que el alumno absorba pasivamente la demostración, sin ningún esfuerzo para encontrarla.

5 — Método de Laboratorio — Historia

Por la influencia de educadores y filósofos de la época se produjo en el siglo pasado la introducción del método científico experimental, en el ciclo secundario de enseñanza. Pero en la Matemática, se conservó el antiguo método examinativo y recitativo, así como los programas clásicos de la materia. Claro está que esto en líneas generales, pues en algunos países la reforma se inició mucho antes.

La enseñanza de la Geometría ofrece para el estudioso un desarrollo histórico muy rico en matices diversos. Los Elementos de Euclides fueron adoptados durante muchos siglos como texto y tenían una fuerza tradicional enorme. En Francia, se inició hacia mediados del siglo XVI el movimento de liberación del rígido método de Euclides. Petrus Ramus, maestro eminente de la época, escribió un libro en el que abandonaba, tanto en la forma como en el fondo, dicho método. Considera la Geometría como el arte de medir bien, da indicaciones sobre aparatos de medición y numerosas y claras figuras. No deja de lado las consideraciones lógicas, si bien no las considera como objectivo sino como instrumento. En 1741 aparece «Eléments de Géometrie» del gran matemático Clairaut, quien sigue un plan semejante al del Ramus, comenzando con problemas prácticos que despiertan el interés más que un sistema de axiomas, según explica el mismo Clairaut; luego, paso a paso, evoluciona hacia ideas más generales. Otra gran figura francesa, Monge, tuvo gran influencia en los métodos de enseñanza. Introdujo la novedad de hacer ejecutar trabajos prácticos a los alumnos, en la Escuela. En la misma época, aparecieron los «Eléments de Géometrie» de Legendre que tuvieron gran influjo y que constituyeron com respecto a Clairaut y Petrus un «gran retroceso hacia los métodos de Euclides», según expresión de F. Klein [1]. A principios de siglo, se opera en Francia la reforma exigida por el extraordinario crecimiento de la industria y el comercio. En la Matemática, se trata de simplificar y hacer más intuitiva la enseñanza.

Italia e Inglaterra adhirieron fuertemente a la tradición Euclidea, si bien en diferente manera. Inglaterra adoptó algunas versiones de los libros de Euclides, sin procurar adaptarlos o elaborarlos para facilitar la comprensión, mientras que en Italia se adoptó el el espíritu de la obra. Cremona trabajó en este sentido y creó una corriente que ha producido obras de gran valor, que satisfacen en alto grado las exigencias lógicas, si bien pedagógicamente son pobres. El movimiento de reforma llegó también a estos dos países. En Italia la tendencia ha sido la de reducir la lógica abstracta y acentuar el aspecto intuitivo. En Inglaterra se formó un movimiento que tratamos en el párrafo siguiente.

El movimiento inglés comenzó hacia 1870, pero quien tuvo una influencia decisiva fué John Perry, ingeniero y profesor de una escuela técnica de Londres. En sus publicaciones y conferencias, Perry propugnó por el llamado método de laboratorio, en el cual las cosas se aprenden por medio de sus aplicaciones prácticas. En este método, se evitan en lo posible las deducciones y demostraciones lógicas, dedicándose exclusivamente a los conocimientos prácticos.

En Estados Unidos, contemporáneamente con Perry, dió impulso al método de Laboratorio, el presidente de la American Mathematical Society, Mr. Moore, en la reunión de 1902. En este país el método de laboratório ha tomado gran desarrollo, como lo muestran las publicaciones del National Council of Teachers of Mathematics, en especial el anuario N.º 18, 1945. [7]

En los países de habla germánica según señala F. Klein, el incremento de las necesidades de cultura, que en todas las clases sociales se ha notado desde 1870, ha exigido una transformación en el sentido de popularizarla lo más posible. Se ha concedido gran importancia a la intuición imediata, orientando los métodos hacia el estudio de objetos reales y bien conocidos por los alumnos.

Según el Profesor Emanuel S. Cabrera, en nuestro país el método de laboratório se designa como método Experimental, nomenclatura introducida en el curso de Metodología de la Enseñanza del Instituto Nacional del Profesorado Secundario y mantenida luego por el ministerio de Instrucción Pública.

6 — Método de Laboratorio — Consideraciones generales

De las dos designaciones: método de laboratorio y método experimental, preferimos ciertamente la primera, pues la Matemática no es una ciencia experimental. Como dice Toranzos [8]: «La Matemática es una libre creación de la mente humana y es en ella donde tienen existencia los objetos matemáticos; con lo empírico sólo están ligados por un remoto origen psicológico e histórico». Preferimos usar la palabra Laboratorio, pues se acomoda a la idea de una forma de enseñar y aprender con recursos materiales, de aprender haciendo, ayudándose con modelos, aparatos y experiencias, pero sin atribuir carácter experimental a la materia.

Un punto que debe quedar perfectamente aclarado es que: el método de laboratorio debe desarrollarse para despertar el interés, para enseñar a aplicar la Matemática, para plantear cuestiones matemáticas que surgen de cuestiones empíricas, etc. pero nunca para sustituir demostraciones. Debe respetarse el principio: «Lo inadmisible de todo punto, es dar como satisfactoria una demostración no rigurosa, una demostración a medias, «à peu près», que exigiendo un complemento de fe en el alumno, ahoga su naciente sentido crítico, inutilizándolo para toda ulterior labor original (Rey Pastor [9]).

El profesor, para mantener este princípio, se verá obligado a enunciar muchos de los teoremas, a explicar sus alcances y a dar sus aplicaciones, sin poder dar su demostración. Podrá hacer algún llamado a la intuición, al significado físico, etc., pero deberá evitar que eso se interprete como demostración. El profesor deberá hacer una selección de los teoremas más importantes que demostrará con todo el rigor posible. El alumno, a través de estas demostraciones, realizadas con todo cuidado, irá captando la verdadera esencia de la Matemática. Si es necesario hacer esto en los cursos para Ingenieros (véase Rey Pastor, «Cálculo Infinitesimal»), se comprende que esté plenamente justificado hacerlo en las escuelas técnicas secundarias.

Volviendo a la aplicación del método de laboratorio, se trata de que el alumno tenga interés en su trabajo, presentándole la tarea en forma tal que le resulte atractiva. Se comprende que, en las escuelas técnicas, esto se consigue dedicando una parte del curso a la observación de relaciones matemáticas, que surgen de hechos experimentales o prácticos. Estos pueden referir se a la Física, la Química, la Economía y aún de la Biología.

La matemática es la primera materia en que el alumno se ve seriamente obligado a hacer sus propias observaciones y descubrimientos, porque no le basta con recibir la información correspondiente, como ocurre con otras materias. El hacer observaciones y descubrimientos es relativamente fácil en el terreno experimental, pero es más difícil, en el terreno de las cosas abstractas. Como la Matemática se aplica en las ciencias físicas, en la agrimensura, en la técnica en general, etc., no está fuera de lugar llevar al alumno a problemas sencillos de ese tipo y enseñarle a pasar del fenómeno natural a una representación matemática. Como ejemplo simple podemos citar el siguiente: el alumno construye un cierto número de triángulos, mide sus ángulos, se le indica que busque alguna lei y él encuentra que su suma es una constante experimental (dentro de cierta precisión). A los triángulos que él ha dibujado, corresponden entes geométricos que ya conoce; se le propone entonces que formule para el triángulo geométrico un teorema, que corresponda al resultado obtenido experimentalmente. Luego, se le pide que, apoyándose en axiomas y teoremas ya establecidos, demuestre que la suma de los tres ángulos es una constante y que halle su valor.

Essas mediciones y experiencias que el alumno realiza, no son Matemática, pero lo llevan a la Matemática. Le muestran los alcances prácticos de la Matemática. Sigue el camino que siguió la Humanidad desde sus orígenes y en su mente se va reproduciendo el proceso que ocupó milenios, hasta llegar a los conocimientos actuales. El alumno que tenga condiciones y vocación podrá llegar con el tiempo a las altas cumbres de la matemática moderna, pero no se puede pedir, al que es casi un niño, y que se ha inscripto en una carrera técnica, que razone como un Weierstrass, por ejemplo, de quien dice Poincaré: «Se pueden hogear todos sus libros sin encontrar una sola figura». (En realidad, según informa Hadamard [4], se ha logrado saber que *una vez* Weiers-hizo *una figura*, al explicar una demostración). El alumno de la escuela técnica, no sólo debe hacer figuras, sino también modelos, aparatos, etc.

Debe tenerse en cuenta además, que, en las escuelas técnicas, la matemática se estudia para ser aplicada, para ser utilizada en problemas concretos o económicos. En estos cursos, no sólo se trata de que por medio de la Matemática el alumno aprenda a razonar y a desenvolverse en el terreno teórico, sino de que aprenda a resolver problemas de índole técnica.

La finalidad de la Escuela en que está ubicado el profesor de Matemáticas, debe ser tenida muy en cuenta por éste y debe primar por sobre sus aficiones y aún por sobre la esencia de la materia, considerada como ciencia pura El Profesor cuidará de que la adaptación a fines específicos se haga, manteniendo toda la altura que sea compatible con la capacidad de asimilación del alumnado. Tan perjudicial resulta un nivel muy alto como uno muy bajo.

F. Klein opina a este respecto: «Es suficiente hacer notar la conveniencia de que la enseñanza se adapte a la orientación especial de la cultura de cada época. No creemos pecar de utilitarios diciendo que, el objectivo de la escuela moderna debe ser capacitar a gran número de individuos para la colaboración en los fines de la cultura humana, cuya tendencia esencial es hoy día la actuación práctica. De aquí se deduce la necesidad de conceder cada día más atención a las ciencias naturales y a la técnica, en el estudio de la matemática».

Como se ve, estas ideas de Klein si se aplican a las escuelas técnicas, en vez de a la escuela en general, coinciden con lo que sostenemos más arriba.

Para terminar con estas consideraciones generales se da a continuación un resumen del prefacio de una obra de F. M. Saxelby, sobre Matemática Práctica [10]. El autor analiza el problema de la enseñanza matemática y su relación con la experiencia:

«Se objetan a menudo los métodos de la matemática práctica, sobre la base de que la matemática no es una ciencia experimental. Esto es cierto; pero la matemática (intercalamos: por lo menos la de la escuela secundaria técnica) se construye sobre un sistema de convenciones que no son arbitrarias sino elegidas de acuerdo con la experiencia. Es pues lógica y educacionalmente necesario que el que se inicia en cualquier rama de las matemáticas, tenga claramente definida y realizada la correspondiente parte de su experiencia».

«Esto ha sido reconocido en el criterio ahora generalmente aceptado, de que el estudio de la geometría deberia comenzarse con un curso de medidas experimentales».

El plan del Saxelby es el no dar en su libro un sólo resultado sin su correspondiente prueba, cosa que en un curso no es factible. Pero esas pruebas van siempre acompañadas por verificaciones gráficas o numéricas, para que el alumno realice su propia experiencia del espacio. El método intuitivo no sustituye al estudio riguroso, sino que prepara el camino para llegar a él. El autor sostiene que el método natural de avance es el de una serie de sucesivas aproximaciones hasta llegar al rigor lógico.

Esta última observación es interesante pues el aceso a muchas cuestiones de la Matemática por vía rigurosa sería de todo punto imposible en la escuela secundária. Para varias cuestiones habría que apelar a la teoría de conjuntos, por ejemplo, que evidentemente no encaja en la escuela secundaria y que habría que discutir si es aceptable en escuelas universitarias tecnicas. Por ejemplo, para estudiar con rigor los Métodos de la Matemática Estadística (materia eminentemente aplicada), si tomamos la obra de Krámer, debemos iniciarnos con teoría de conjuntos, teoría de la medida y de la integración y otras varias cuestiones superiores.

No se trata pues de hacer concesiones gratuitas, se trata de colocarse en la realidad de las cosas, manteniendo todo el rigor posible, no demostrando lo que no se puede demostrar antes de dar demostraciones ilusorias o falsas, pero usando todos los recursos lícitos para que el alumno aprenda y sea un elemento útil, sin una mente cargada de conceptos superiores que no comprende y no sabe manejar.

7 — Método de laboratorio — Su realización

Qué és o en qué consiste un Laboratório de Matemáticas?

El Laboratorio de Matemáticas es un aula dotada de elementos que el alumno utiliza para el aprendizaje práctico de la materia, de acuerdo con las ideas expuestas en los parágrafos anteriores. El Laboratorio tiene algo de parecido con otros laboratorios o gabinetes de artes y ciencias, pero es de estructura mucho más simple.

Qué debe contener el Laboratorio de Matemáticas?

1.° — *Moblaje* — Mesas de tablero horizontal, con espacio individual algo menor que en un aula de dibujo.

Un gran pizarrón que ocupe toda la pared del frente, con una parte lisa, y otra, de más o menos 1/3 del total, cuadriculada con líneas de tono claro, destacando las líneas cada 5 y 10 unidades. Sobre esta parte o en las paredes laterales se colocarán pizarrones móviles de madera terciada gruesa o de tela especial, que lleven reticulado logarítmico, semilogarítmico, etc.

Un armario destinado a láminas, dibujos, gráficos, que irán realizando los alumnos y que se irán incorporando como material didáctico. En el mismo armario habrá una sección para libros y un cajón para fichas.

Un armario-vitrina para los modelos, instrumental, aparatos.

Un avisador o dos, de pared, para boletines de notícias, temas de trabajos, instrucciones e informaciones útiles.

2.° — *Material bibliográfico.* — Se tendrá una pequeña biblioteca formada por: una enciclopedia de Matemáticas o conjunto de obras que le sea equivalente, tablas de funciones, cuadrados, cubos, raíces, etc., funciones trigonométricas, logarítmos, etc. tablas financieras, manuales.

3.° — *Instrumental* — Utiles de dibujo para pizarrón y para papel: Compases, reglas, escuadras, compás de proporciones, transportadores, etc.

Instrumentos de medida: reglas centimetradas y milimetradas, cintas métricas, calibres, transportadores, cronómetros, termómetros, balanzas.

Instrumentos de cálculo: reglas de cálculo de diversos tipos, incluyendo de tamaño grande (más de 1 metro) para enseñanza colectiva.

Máquinas de calcular.

Planímetros, intégrafos.

Aparatos simples para medidas angulares, por ejemplo: una escuadra e pínula rudimentaria, etc.

4.° — *Láminas* — Conjunto de láminas con: Desarrolos de cuerpos geométricos — Reproducción de páginas de tablas numéricas — Representación de funciones — Nomogramas de diversos tipos — Figuras complejas necesarias para las demostraciones, como algunas de geometría del espacio.

5.° — *Aparatos* — Dispositivos y mecanismos que permitan el trazado mecánico de curvas: elipses, parábolas, hipérbolas, cicloides, etc.

Aparatos para realizar algunas experiencias simples que muestren al alumno la formulación matemáticas de leyes físicas.

6.° — *Modelos* — Modelos de figuras geométricas y de cuerpos geométricos.

Ángulos formados por barras articuladas, triángulos, polígonos de barras articuladas.

Poliedros regulares e irregulares. Poliedros semirregulares o de Arquimedes. Estos poliedros serán macizos y algunos de alambre.

Conos, cilindros, esferas. Sólidos de revolución. Superficies regladas.

Cuerpos geométricos seccionados por planos.

Recipientes de igual altura y capacidad, con secciones equivalentes (principio de equivalencia).

Modelos que representen las figuras de los teoremas de la geometría del espacio.

Modelos de triángulos esféricos y pizarrón esférico.

Recipiente semiesférico y cilindro-cónico de volúmenes iguales (equivalencia).

7.° — *Materiales* — El Laboratorio tendrá un pequeño acopio de materiales para los trabajos que se realicen así como algunas herramientas. Como ilustración mencionamos: cartulina, cartón, madera terciada, hilo, alambre, goma, cinta adhesiva, cemento, chapa fina... Tijeras, corta-papeles, pinzas, sierra...

Cómo se trabaja en el laboratorio?

La forma de trabajar guarda similitud con las de otros laboratorios. El Profesor planea los trabajos, los asigna a cada alumno o grupo de alumnos especificando el objeto, indicando los elementos materiales necesarios y dando las instrucciones necesarias.

Afin de dar una idea concreta de la forma de trabajar se agregan a continuación dos trabajos tipo. Uno se refiere a un problema de geometría del espacio, con la construcción del modelo correspondiente. El otro se refiere al teorema de Pitágoras: el alumno estudia varios casos realizando medidas y se le pide que trate de hallar la relación, se prevé que fracase en este método empírico, y se le dan instrucciones para tomar una vía racional apoyándose en conocimientos previos, se le dan indicaciones para guiarlo en ese sentido. Luego se le ilustra para la comprobación geométrica y también para la numérica.

Clase de Laboratorio de Matemáticas

1.er Ejemplo

Objeto: Construcción de un poliedro semiregular.

Definición: Se llama poliedro semi-regular o de Arquímedes a un sólido cuyos ángulos poliedros son iguales y cuyas caras están formadas por dos o más clases diferentes de polígonos regulares Ejemplo: un prisma cuyas bases son triángulos equiláteros e cuyas caras son cuadrados.

Preparación :

Defina los polígonos regulares, dibuje algunos.
— Cuántas caras de esa clase pueden concurrir a formar los ángulos poliedros ?
— De cuántas clases pueden ser las caras ?. Por ejemplo : dos exágonos y un cuadrado pueden reunirse ?
— Cómo serán las aristas ? iguales o no ?

Elementos :

Cartulina
Cinta adhesiva
Compás
Regla o escuadra
Tijera

Plan de trabajo :

Construir un poliedro semi-regular, con cuatro caras exagonales y cuatro caras triángulares.

1 — Corte en cartulina los 4 exágonos y los cuatro triángulos y arme el sólido.

2 — Desarme el sólido y obtenga su desarrollo en el plano.

3 — Dibuje el desarrollo con las indicaciones para el armado.

4 — Anote el número de caras, vértices y aristas y verifique el teorema de Euler.

5 — Qué relación hay entre este poliedro y el tetraedro regular ?

6 — Calcule la superficie y el volumnén del sólido en estudio.

7 — Proyecte los cortes sobre un prisma de madera para obtener este poliedro.

2.º Ejemplo

Objeto : Teorema de Pitágoras.

Elementos :

Escuadras
Regla milimetrada
Tablas numérieas

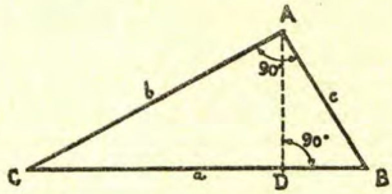
Plan de trabajo :

1 — Dibuje varios (no menos de 5) triángulos rectángulos de hipotenusa igual a 10 cm. Y otros tantos, semejantes, de hipotenusa igual a 5 cm.

2 -- Anote en un cuadro los valores de los lados de los triángulos, medidos en el papel.

3 — Trate de hallar entre esos valores, una relación de igualdad que vincule los tres lados de los triángulos.

4 — Si la halla, enúnciela con carácter general y busque su demostración. — Si no, siga las



instrucciones suguientes, que le ayudarán a encontrarla.

5 — Observe los triángulos que existen en la figura y busque la relación que hay entre ellos.

6 — Enuncie las relaciones métricas que se cumplen respecto a los lados a, b y c.

7 — Obtenida la relación, si no lo hizo en 4 — hágalo ahora y complete el cuadro de valores, mostrando cómo se cumple, para los casos que allí figuran.

8 — Trate de demostrar el teorema, por equivalencia de figuras. Para ello dibuje un triángulo rectángulo y construya un cuadrado sobre cada lado. Trace la altura correspondiente a la hipotenusa y prolónguela, dividiendo al cuadrado correspondiente en dos rectángulos. A partir de aquí, debe tratar de seguir por sus propios medios. Si le es necesario, consulte al profesor.

NOTA : — Lea atentamente estas instrucciones. Anote lo que no le resulte claro y pida aclaración al profesor. Esfuércese por interpretar las instrucciones verbales o escritas, como la 8— sobre construcción de figuras.

BIBLIOGRAFIA

Se da a continuación la bibliografía consultada para la preparación de este trabajo.

[1] — KLEIN F. — *Matemática elemental desde un punto de vista superior,* 2 tomos — Madrid 1927-1931. Esta obra es una de las más interesantes sobre el problema de la enseñanza secundaria, el cual analiza profunda y sistematicamente.

[2] — POINCARÉ H. — *Ciencia y Método* — Espasa Calpe — 1944.

[3] — SCHILLER — *Handbuch der praktische Pedagogik* — (Cit. por [6]).

[4] — HADAMARD J. — *The psicology of invention in the mathematical field* — Princeton University Press — 1945. No es una obra sobre métodos de ense-

ñanza, pero su análisis de la psicología del inventor y del creador abarca aspectos de interés para el tema de este trabajo. Especialmente interesante es el capítulo VII — «Different kinds of mathematical minds».

[5] — MCLELLAN-DEWEY — *Psichology of number*—(Cit. por [6]).

(6) — YOUNG J. W. A. — *Fines, valor y método de la Enseñanza Matemática.* Ed. Losada-1947 — Selección de la obra *The teaching of Mathematics in the elementary School.*

[7] — NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS — *Multisensory aids in the teaching of Mathematics* — 18 Yearbook-1945. Este anuario de la Asosiación de Profesores de Matemáticas de Estados Unidos reune numerosos trabajos sobre la enseñanza de la Matemática por el método de Laboratorio, abarcando sus diversos aspectos incluso el histórico y el material.

[8] — TORANZOS F.—*Introducción a la epistemología y fundamentación de la Matemática* — Espasa-Calpe —1948. Este libro da una clara idea de lo que es la Matemática en el estado actual de los conocimientos humanos. Su conocimiento es importante para que el Profesor de enseñanza técnica aplique métodos prácticos sin perder de vista la esencia matemática.

[9] — REY PASTOR — *Elementos de Análisis Algebraico* — Madrid 1930. Hemos consultado la introducción de esta obra por sus elevadas ideas sobre la enseñanza de la Matemática.

[10] — SAXELBY F. — *A course in Practical Mathematics* — Longmans, Green & C.°. Londres-1944.

San Juan, 1949.

Sull'approssimata rappresentazione di alcune serie con polinomi semplici costruibili elementarmente

Nota di ***Vincenzo G. Cavallaro***

SUNTO. Alcune serie notevoli, non costruibili elementarmente, vengono rappresentate, in un cerchio di raggio unitario, da polinomi semplici molto approssimati alla somma delle serie e costruibili elementarmente.

1. — PRELIMINARI. Nelle formule che seguono, L_x indica il lato del poligono regolare di x lati inscritto in un circolo di raggio unitario e $\equiv$ un signo d'uguaglianza approssimata.

Per la dimostrazione delle stesse formule ocorrono i valori dei seni degli *angoli multipli di* 3 *gradi* e tali valori son dati, con 10 cifre decimali, in certe tavole numeriche come, ad esempio, nel diffusissimo Formulario del prof. G. Lazzeri (Casa editrice Giusti, Livorno). Si sa che detti seni, come i lati dei poligoni regolari euclidei, si possono costruire con molta rapidità e precisione, specialmente se nel processo costruttivo intervengono i noti metodi del Mascheroni col solo compasso (Vedi appunto una mia Nota nel *Bollet. della Unione Matematica Italiana* XI, N. 3, 1932, Bologna).

Conviene qui riportare i seguenti valori corrispondenti al *logaritmo neperiano* di 2, al quadrato e al biquadrato di π rapporto d'una circonferenza al suo diametro:

$$\log 2 = 0{,}69314\ 71805\ 59945 \cdots \text{(1)}$$

$$\pi^2 = 9{,}86960\ 44010\ 89358 \cdots \text{(2)}$$

$$\pi^4 = 97{,}40909\ 10340\ 02437\ 23264 \cdots \text{(2)}$$

2. — PROPOSIZIONE. *La serie*

$$P_1 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots$$

ha per somma il logaritmo neperiano di 2 *e vien rappresentada approssimativamente nel cerchio di raggio unitario dal trinomio*

$$P_1 \equiv 5 \operatorname{sen} 87^\circ + \frac{7}{10} - .5 \equiv 0{,}69314\ 76740$$

con errore ε *minore di* $\dfrac{1}{2\,024200}$ *del raggio stesso.*

3. — PROPOSIZIONE. *La serie*

$$P_2 = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \cdots$$

ha per somma (3) $\dfrac{\pi^2}{12} = 0{,}82246\ 70334\ 2411 \cdots$ *e vien rappresentata approssimativamente nel cerchio di raggio*

(1) G. Bertrand—*Traité d'Algèbre*, Parte II, p. 142, Paris, 1878.

(2) G. Peano—*Tavole numeriche* Soc. Tipogr. Editrice Torinese

(3) E. Cesaro—*Analisi Algebrica*, p. 176, Torino, 1894.