GAZETA DE MATEMÁTICA

Publicação bianual da Sociedade Portuguesa de Matemática Ano LXVI | Janeiro 2005 nº 148

4,10 Euros

World Year of PHYSICS 2005

UN International Year of Physics

Ano Internacional da Física
por José Dias Urbano

Portugal e a Fundação da União Matemática Internacional
por Anabela Ramos e Helmut R. Malonek

Ano Internacional da Física 2005

José Dias Urbano
Presidente da Sociedade Portuguesa de Física (SPF)
Comissário Nacional para o Ano Internacional da Física (AIF) 2005

1. Os motivos que conduziram à declaração do ano de 2005 como Ano Mundial da Física

A proposta de se iniciarem as diligências necessárias para que o ano de 2005 fosse declarado Ano Mundial da Física foi apresentada por Martial Ducloy, à altura Presidente da Sociedade Europeia de Física, ao 3º Congresso Mundial das Sociedades de Física, realizado em Berlim em 15 e 16 de Dezembro de 2000 por ocasião das Comemorações do Centenário da Teoria Quântica.

A proposta ganhou o apoio unânime de todas a sociedades presentes no Congresso, oriundas de todos os continentes, devido ao decréscimo progressivo de jovens dispostos a estudar e a seguir carreiras de Física. Este desinteresse acentuou-se bastante ao longo da década de 1990, tendo começado a escassear os docentes de Física nas escolas secundárias, os estudantes de graduação e pós graduação dos cursos de Física e os profissionais capazes de promover a inovação dos serviços e das indústrias que usam técnicas de base quântica.

Pesou também na deliberação o facto de o ano de 2000 ter sido declarado pelo Governo Federal da Alemanha como Ano Nacional da Física, em resposta às preocupações da indústria alemã com a falta de físicos.

Finalmente, mas não em último lugar, a ideia de se declarar o ano de 2005 como Ano Mundial da Física é cara a todos os físicos, porque 2005 é o centenário do *annus mirabilis* de Albert Einstein, um ano em que ele fez e publicou importantes descobertas científicas que constituem outros tantos pilares da Física Moderna. Referimo-nos à quantização da luz, à realidade molecular, à Teoria da Relatividade restrita e à célebre equação $E=mc^2$.

A ideia ganhou ímpeto e foi adoptada, não só pela União Internacional da Física Pura e Aplicada (IUPAP) como, principalmente, por alguns governos que a submeteram à aprovação da Assembleia Geral da UNESCO.

> [...] a ideia de se declarar o ano de 2005 como Ano Mundial da Física é cara a todos os físicos, porque 2005 é o centenário do *annus mirabilis* de Albert Einstein [...]

O motivo principal que levou a que a declaração de 2005 como Ano Mundial da Física fosse adoptada politicamente, tanto por governos como por instâncias internacionais, foi o facto de o desinteresse dos alunos pela Física ter alastrado às áreas do saber com ela relacionadas, tornando insuficiente a formação de cientistas, engenheiros e docentes, na quantidade e qualidade necessárias para promover o desenvolvimento das sociedades modernas. Este fenómeno afecta não só a sustentabilidade das economias mais desenvolvidas como a capacidade de desenvolvimento das mais débeis.


José Dias Urbano

A primeira grande economia a sentir as referidas dificuldades foi a alemã, o que a levou a declarar o ano 2000 com resultados que já se podem avaliar como muito positivos. De facto, a tendência para a diminuição do número de alunos de Física não só foi travada em 2000/2001, como foi claramente invertida nos anos que se seguiram, estando agora a estabilizar em torno de números aceitáveis.

Para além do já citado exemplo da Alemanha, o Governo do Reino Unido da Grã-Bretanha e da Irlanda do Norte, preocupado com a sustentabilidade da sua economia, que apresenta índices de produtividade demasiado baixos, mandou, em 2001, rever toda a cadeia de educação e formação profissional do país, estando a executar desde 2002 uma nova Estratégia para a Ciência, Engenharia e Tecnologia com o objectivo de promover a inovação nos serviços e na indústria. Pelo seu lado, o Senado dos Estados Unidos da América, através do "National Science Board", pôs à discussão pública um relatório com uma série de propostas que visam aumentar o número dos cidadãos dos EUA que estudam e seguem carreiras de ciências e engenharia.

Por outro lado, entre os países com economias mais débeis, são muitos os que aderiram à ideia de se celebrar o ano de 2005 como Ano Mundial da Física, como meio de procurar fortalecer a componente científica da cultura dos seus cidadãos, constituindo Portugal e o Brasil dois exemplos paradigmáticos. De facto, estes dois países, juntamente com a França, foram os promotores da ideia junto da Conferência Geral da UNESCO de 2003.

Motivados pela receptividade que tiveram junto dos restantes países deste importante fórum mundial, o Brasil, a França e Portugal procuraram o apoio de outros países (Lesoto, Mónaco, Reino Unido e Singapura) para submeterem à 58ª Assembleia Geral das Nações Unidas a proposta da declaração de 2005 como Ano Internacional da Física, o que veio a acontecer em 10 de Junho de 2004. Como o Logotipo do Ano Mundial da Física 2005 pareceu a todos muito feliz, não se alterou, acrescentando-se apenas a referência de que a ONU declarou o ano de 2005 Ano Internacional da Física.

[...] são muitos os que aderiram à ideia de se celebrar o ano de 2005 como Ano Mundial da Física, como meio de procurar fortalecer a componente científica da cultura dos seus cidadãos, constituindo Portugal e o Brasil dois exemplos paradigmáticos. De facto, estes dois países, juntamente com a França, foram os promotores da ideia junto da Conferência Geral da UNESCO de 2003 [...]

Para além da justificação oficial, que se pode ler na respectiva Resolução, na declaração pela ONU de 2005 como Ano Internacional da Física está implícito o facto de que, num mundo dominado por técnicas de base científica, esperançoso do bem estar que elas podem proporcionar, mas receoso das consequências do seu uso indiscriminado, as pessoas olham para Einstein como modelo de cientista e de cidadão que deve ser, mais uma vez, homenageado.

2. O papel de Portugal

Como se disse, Portugal subscreveu as duas propostas de resolução, a da UNESCO intitulada "Proclamação de 2005

Ano Internacional da Física", aprovada pela 32ª Conferência Geral em 16 de Outubro de 2003, e a da ONU, intitulada "Ano Internacional da Física, 2005", aprovada por aclamação pela 58.ª Assembleia Geral em 10 de Junho de 2004. O texto das referidas propostas de resolução pode ser lido no sítio da web da SPF (www.spf.pt).

O destacado papel de Portugal numa iniciativa de tamanha importância educativa, científica e cultural, ficou a dever-se ao bom acolhimento por parte do Governo Português às sucessivas solicitações que lhe foram sendo feitas nesse sentido pela Sociedade Portuguesa de Física, desde Fevereiro de 2002 até Fevereiro de 2004. Essas diligências foram feitas junto do Presidente da Comissão Nacional e do Representante Permanente de Portugal na UNESCO, dos Ministros da Ciência e dos respectivos secretários de estado, do Ministro da Educação e da Ministra dos Negócios Estrangeiros.

Julgamos que pesou na decisão do Governo a situação preocupante em que se encontra o ensino da Física em Portugal. Poderá ter sido esse o motivo que levou o presente governo a nomear o presidente da Sociedade Portuguesa de Física (SPF) como comissário nacional para a celebração do Ano Internacional da Física 2005 e a tomar como seus os objectivos escolhidos pela SPF.

> No Ano Internacional da Física 2005 pretende-se trazer a beleza da Física ao grande público e inspirar uma nova geração de cientistas.

3. Os objectivos do Ano Internacional da Física 2005

No Ano Internacional da Física 2005 pretende-se trazer a beleza da Física ao grande público e inspirar uma nova geração de cientistas. Ele vai ser celebrado em todo o mundo com acções muito variadas. O seu Lançamento Internacional oficial terá lugar na sede da UNESCO em Paris, de 13 a 15 de Janeiro de 2005, onde laureados com o prémio Nobel e individualidades liderantes da Ciência, da Indústria e da Política se juntarão com jovens estudantes de Física de todo o mundo para partilhar a sua visão da "Física para o Amanhã".

Outro ponto alto será o 13.º Encontro da Sociedade Europeia de Física «Para além de Einstein: Física para o século XXI» que terá lugar em Berna, de 11 a 15 de Julho de 2005. Para mais informações sobre estes e muitos outros eventos, consultar o sítio da web

http://www.wyp2005.org/

Em sintonia com as demais sociedades e associações nacionais e internacionais de Física, com a UNESCO e com a ONU, para a Sociedade Portuguesa de Física (SPF), a celebração do Ano Internacional de Física 2005 (AIF2005) em Portugal deve servir para promover a Física, a todos os níveis, no nosso País.

Dado o papel fulcral da Física nas Ciências Experimentais da Natureza e na criação e desenvolvimento das aplicações nelas baseadas, as melhorias que se pretendem alcançar com a Celebração do Ano Internacional da Física beneficiarão, dum modo geral, toda a ciência, a engenharia e a tecnologia no nosso País, o que confere uma amplitude muito maior à celebração da Física, no Ano Centenário de Albert Einstein.

Sem prejuízo de outras iniciativas, havendo em Portugal uma Sociedade de Física compete-lhe, de acordo com a Resolução da ONU, promover actividades que visem os objectivos traçados pelas instâncias internacionais.

A SPF deve, nomeadamente, promover eventos e acções direccionados para:
1.º - Aumentar o apreço público pela Física;
2.º - Melhorar o ensino da Física nas Escolas;
3.º - Reforçar o papel da Física no ensino superior;
4.º - Reforçar a aliança da Física com outros ramos do saber;
5.º - Reforçar o papel dos físicos na sociedade;
6.º - Cativar os jovens para o estudo da Física;
7.º - Aumentar a cooperação internacional no domínio da Física, em particular com os países de língua oficial portuguesa.

4. Descrição dos objectivos e das acções com que se pretende alcançá-los

A descrição dos objectivos e das acções com que se pretende alcançá-los pode ser lida no sítio na web da SPF http://www.spf.pt

A título de exemplo, apresentamos os dois primeiros.

1º. - Aumentar o apreço público pela Física

Pretende-se, fundamentalmente, aumentar a compreensão pública pela Física, isto é, contribuir para que os portugueses compreendam melhor esta ciência e se apercebam da sua importância social.

Pretende-se, nomeadamente, que os portugueses se apercebam de que a Física:

- fornece uma base indispensável para o desenvolvimento do nosso conhecimento da Natureza;
- tem sido e continua a ser uma poderosa mola propulsora do desenvolvimento científico e tecnológico, estando na origem da invenção de muitas técnicas que são úteis no nosso quotidiano;
- promove o bem estar da humanidade, constituindo uma esperança para resolver alguns dos maiores problemas com que actualmente nos defrontamos e para evitar os riscos inerentes à aplicação ilimitada das técnicas de base científica;
- permite visões integradoras do comportamento da Natureza, dos humanos e das sociedades, podendo as competências adquiridas com o estudo e aplicação da Física e das Ciências Físicas ser aplicadas em muitos outros domínios de actividade;
- é uma pedra angular da cultura do nosso tempo, que não pode ser arredada nem substituída.

Para aumentar o apreço público pela Física sugerem-se as seguintes acções:

- Publicação de livros e artigos, e realização de conferências, palestras, debates, exposições e exibição de filmes, sobre temas actuais e aliciantes das Ciências Físicas e das sua aplicações. Numa dessas conferências, a que se confere uma importância especial, a SPF pretende congregar todos os físicos e docentes de Física portugueses em torno da comemoração do centenário de Einstein e da definição das novas tendências da Física e das melhores formas de as concretizar.
- Inserção nos órgãos de comunicação social de notícias, imagens, reportagens, entrevistas e debates sobre a Física, o trabalho dos físicos e o seu impacto no nosso quotidiano.
- Difusão de cartazes e outras formas de publicidade, alusivos à Física.
- Abertura de laboratórios ao público, com demonstração de fenómenos físicos relevantes.
- Emissão de selos comemorativos de Einstein e do Ano Internacional da Física.
- Realização de espectáculos e exibições onde a Física apareça aliada às artes.
- Publicação de estudos sobre a história da Física em Portugal e sobre o impacto da obra de Albert Einstein e de outros físicos ilustres, no nosso País.
- Criar, na Internet, um fórum de discussão sobre temas de Física, onde estudantes, docentes e cidadãos em geral possam trocar ideias entre si e com reputados especialistas.

2.º - Melhorar o ensino da Física nas escolas

Pretende-se assegurar que os jovens que desejem frequentar cursos superiores de ciências e engenharias ingressem neles com formação científica adequada. Mas pretende-se, sobretudo, aumentar a componente científica da cultura dos portugueses, passando a Física a ser vista como um dos seus elementos estruturais.

Estas duas condições são essenciais para o esclarecido exercício dos direitos e deveres de cidadania, e para o desenvolvimento harmonioso e sustentável das sociedades modernas fundadas no conhecimento.

Para alcançar este objectivo preconizamos as seguintes medidas:

- Correcção da estrutura curricular e programática dos cursos do ensino básico e secundário, com um importante reforço do ensino da Física e das Ciências Físicas;
- Aumento da componente experimental do ensino da Física e das ciências em geral, introduzindo-a o mais cedo possível;
- Melhoria das condições nos laboratórios e salas de aula, nomeadamente através do incremento do número e do uso de equipamentos experimentais, informáticos e audiovisuais;
- Disponibilização de materiais pedagógicos adequados aos vários níveis escolares, nomeadamente através da "Internet";
- Introdução de um sistema de acreditação científica dos manuais que podem ser adoptados pelas escolas públicas, de modo a evitar a disseminação de conceitos errados;
- Alteração dos critérios de formação, contratação e colocação dos docentes do ensino básico e secundário, por forma a assegurar que todos os que estão ou vão ensinar Física se encontrem em condições de o fazer com a qualidade exigível;
- Introdução de um Sistema de Desenvolvimento Profissional Contínuo que faça depender a progressão na carreira docente do bom desempenho profissional, da actualização dos conhecimentos científicos e do aperfeiçoamento das competências pedagógicas;
- Valorização social da função de professor através da atribuição de prémios de reconhecimento público do mérito da obra realizada.

5. Intervenientes

Os objectivos atrás referidos só poderão ser atingidos com o envolvimento empenhado de todas as pessoas e instituições que se dedicam ao estudo, ensino, investigação, aplicação, divulgação e financiamento da Física em Portugal.

Será também necessário obter a colaboração de outras sociedades científicas e de ordens e associações profissionais, mormente as mais relacionadas com as Ciências Físicas e suas aplicações.

Será ainda necessário interessar e obter o apoio dos órgãos de soberania e, de um modo geral, das instituições e organizações preocupadas em melhorar a cultura científica dos portugueses.

Finalmente, é indispensável poder contar com a colaboração dos órgãos de comunicação social, em particular dos que têm vindo a desenvolver um esforço muito meritório de difusão da ciência e da cultura científica.

Entre as instituições que devem estar empenhadas no Ano Internacional da Física destacamos os Departamentos de Física, as Universidades e Escolas onde se encontram inseridos; as Unidades de Investigação em Física; os Museus e Centros de Ciência; as Escolas Básicas e Secundárias; as

associações dos estudantes de Física; o Ministério da Ciência e do Ensino Superior e os seus organismos; o Ministério da Educação; a Fundação Calouste Gulbenkian e outras fundações; e a Comissão Nacional da UNESCO.

Por razões que nos escapam, a Natureza só se deixa traduzir por números. Uma civilização que despreza a Física e a Matemática não pode por isso aspirar a compreender o mundo em que vive, é incapaz de tirar partido das oportunidades que a ciência moderna oferece para o seu bem estar e não sabe evitar os riscos inerentes à aplicação indiscriminada das novas tecnologias.

Mas a SPF conta também com a colaboração de outras instituições e pessoas que não se mencionam agora, mas cuja contribuição será decerto preciosa para que o Ano Internacional da Física 2005 seja um ponto de viragem na cultura dos portugueses.

6. Física e Matemática

Entre as sociedades científicas, cuja colaboração é indispensável para que a Celebração do Ano Internacional da Física 2005 em Portugal deixe alguma marca na cultura dos portugueses, destaco a Sociedade Portuguesa de Matemática.

Na verdade, a Matemática e a Física são a base do conhecimento sobre o qual assentam as sociedades e as economias hodiernas. Todos os domínios da actividade humana estão hoje impregnados de técnicas de base científica experimental, em que se tira proveito de propriedades dos sistemas físicos e biológicos, que a ciência permite identificar e compreender. Ora todos esses sistemas são compostos pelos mesmos constituintes elementares que interagem com as mesmas forças e reagem das mesmas formas. Por outro lado, constituintes, forças e leis representam-se por imagens matemáticas que integram as teorias físicas, sem as quais o intelecto humano não saberia encontrar rumo entre a multiplicidade dos fenómenos com que a Natureza se manifesta.

Por razões que nos escapam, a Natureza só se deixa traduzir por números. Uma civilização que despreza a Física e a Matemática não pode por isso aspirar a compreender o mundo em que vive, é incapaz de tirar partido das oportunidades que a ciência moderna oferece para o seu bem estar e não sabe evitar os riscos inerentes à aplicação indiscriminada das novas tecnologias.

Para além do valor que tem como orientadora do raciocínio correcto, a Matemática é também e sobretudo a organizadora do pensamento útil. Sem dominar os números e as teoria físicas só nos restam atitudes de impotente indignação, como a do irónico protesto de Voltaire perante o tremor de terra de Lisboa: «Protesto em nome do espírito e da razão contra este escandaloso abuso da Natureza».

Uma sociedade iletrada e cientificamente analfabeta queixa-se e protesta. Uma sociedade culta constrói o seu próprio destino. Até agora escolhemos a primeira via, mas ainda estamos a tempo de enveredar pela segunda. Contudo, para que isso seja possível é necessário que físicos e matemáticos passem a colaborar muito mais entre si.

Agradeço à SPM a oportunidade que me concedeu de transmitir esta mensagem sobre o AIF2005 na sua prestigiada Gazeta de Matemática.

Uma sociedade iletrada e cientificamente analfabeta queixa-se e protesta. Uma sociedade culta constrói o seu próprio destino.

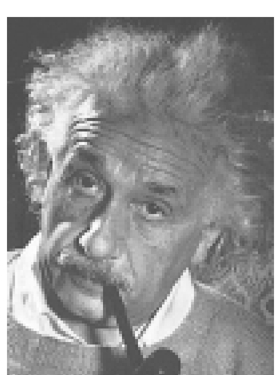
Os matemáticos no Ano Internacional da Física

Na parede de uma sala de aula do meu liceu havia um frase de Einstein emoldurada. **«Como é possível»**, **perguntava o físico, «que a Matemática, que é afinal um produto puro do pensamento humano, independente da experiência, esteja tão maravilhosamente adaptada aos objectos da realidade?»** É curioso como ainda hoje me lembro desta frase. Durante anos, nas aulas, olhava para ela e não percebia a estranheza de Albert Einstein. Para os meus 13 ou 14 anos a pergunta não fazia sentido. Era como se nos admirássemos por um martelo ser útil para martelar um prego. Qual era a dúvida?

Anos mais tarde, encontrei uma surpresa semelhante por parte de outro grande físico, Richard Feynman. Não consigo agora reencontrar a passagem. Mas vou reproduzir um exemplo semelhante ao que me ficou da sua leitura.

Imaginemos um número muito grande, suponhamos 32425738293346. Imaginemos que o multiplicamos por si próprio e depois por quatro. Finalmente, tiramos a raiz quadrada (positiva) ao resultado. Pois eu estou disposto a apostar o que quiserem em como o número obtido é igual a duas vezes o número original. Mas eu nunca multipliquei aquele número por quatro nem nunca tirei a raiz quadrada ao resultado. No entanto, estou mais certo do que acabei de dizer do que da veracidade de qualquer lei física. Porquê?

Anos mais tarde, muitos anos depois dos meus tempos de liceu, descobri a origem da misteriosa frase de Einstein. Encontrei-a numa colectânea de seus escritos. Constitui quase todo o segundo parágrafo de uma alocução do físico à Academia de Ciências Prussiana, feita em 27 de Janeiro de 1921. O texto continua com a seguinte pergunta: **«Será pois possível que a razão humana, sem a experiência, pela pura força do raciocínio, consiga descortinar as propriedades das coisas reais?»**


Einstein

Li e reli depois todo o texto de Einstein. Dei-me gostosamente ao trabalho de o digitalizar e reproduzir numa secção de matemática e filosofia que tenho na minha página na Internet (www.iseg.utl.pt/~ncrato). Convido o leitor a ir aí ler todo o texto.

Logo no terceiro parágrafo, Einstein explica brevemente a sua resposta à questão: «na medida em que as proposições matemáticas se referem à realidade, não constituem certezas; na medida em que as constituem, não se referem à realidade.» Tudo isto é motivo de polémica. É filosofia do conhecimento, por natureza um campo muito controverso. Mas vou fazer a minha leitura do texto de Einstein.

A matemática não é uma ciência no sentido que habitualmente se dá a esta palavra. É uma disciplina que se inspira em problemas reais, particularmente no mundo físico, e que procura construir modelos abstractos para esse mundo exterior. Mas quando constrói esses modelos, eles ganham rigor lógico e deixam de estar directamente relacionados com a realidade externa. Autonomizam-se progressivamente. Quando a matemática chega à maturidade, torna-se axiomática.

As propriedades da geometria euclidiana, por exemplo, passam a ser verdadeiras apenas com referência à sua axiomática e não ao mundo físico. Nesse sentido, a geometria euclidiana é uma construção perfeita, independentemente da sua aplicabilidade. Ora o espaço físico, tanto quanto hoje se sabe, não é euclidiano, mas sim curvo. Isso não quer, contudo, dizer que Euclides deva deixar de ser explicado nas escolas, nem que as suas conclusões estejam erradas.

Repare-se na diferença abismal em relação às ciências, no sentido do termo que estou aqui a empregar. Nestas, todas as conclusões são refutáveis e provisórias — falsificáveis, como se tornou hábito dizer depois de Popper. Em matemática, as conclusões são também discutíveis, mas nós acreditamos que sejam imutáveis sempre que estejam rigorosamente formuladas e sejam logicamente coerentes.

Na origem desta diferença está o próprio objecto de estudo das disciplinas. Nas diversas ciências, o objecto é empírico — são protozoários ou pulsares, cérebros humanos ou taxas de câmbio. Em matemática, o objecto é ideal — são números, rectas, pontos ou funções, ou seja, abstracções que não existem na realidade mas que nós construímos e com as quais lemos o mundo. Por isso, a existência de um objecto matemático é apenas aferida pela sua coerência.

Diz-se que um objecto geométrico existe, por exemplo, se a sua formulação é coerente e não contradiz nenhum dos pressupostos da nossa geometria. É nesse sentido que existe um triângulo e não porque alguma vez alguém tenha encontrado um, com segmentos de recta perfeitos e pontos exactos por vértices. É nesse sentido também que, se quisermos inventar um «tetra-tri-ângulo» — chamemos assim a um hipotético polígono com quatro vértices e três arestas —, chegamos à conclusão que esse objecto não existe. O triângulo existe porque não contradiz os axiomas da geometria e porque pode ser mentalmente construído respeitando esses axiomas. O «tetra-tri-ângulo» não existe porque leva a contradições lógicas.

De novo encontramos uma diferença abismal entre as ciências e a matemática. Nunca se discute a existência ou inexistência de um marsupial ou um buraco negro a partir simplesmente da lógica. A prova é feita pela observação e pela experiência.

Voltemos a Einstein e ao terceiro parágrafo do seu texto.«Parece-me que a clareza completa sobre este estado de coisas», diz o físico, «se conquistou apenas através da tendência matemática a que chamamos 'axiomática'. O progresso conseguido pela axiomática consiste em separar claramente o que é lógico-formal do seu conteúdo objectivo ou intuitivo; de acordo com a axiomatização, apenas o lógico-formal faz parte da matemática, que não se preocupa com o intuitivo ou com outro conteúdo associado».

Tudo isto mostra a diferença que existe entre a matemática e as ciências. Mas de nada disto se pode concluir que seja um crime chamar ciência à matemática. Não vale a pena entrar em preciosismos terminológicos inúteis. O importante é saber bem do que se está a falar.

Einstein conseguiu uma revolução na física com apoio na matemática. Imagina-se pois que nunca esteve nos seus propósitos denegrir a nossa disciplina. Ele usava-a como meio de formular precisamente os problemas e leis físicas e sabia que uma formulação matematizada, além de precisa, tem a vantagem de trazer imediatamente consigo um universo de implicações lógicas e conclusões testáveis. A matemática ajuda pois a construção da ciência. E torna-se indispensável.

Comecei com uma citação de Einstein. Vou acabar com uma de Feynman que salienta precisamente esse carácter indispensável da matemática. Dizia o grande físico norte-americano em *O Que É Uma Lei Física* (Gradiva, 1989): **«Os físicos não podem converter-se a uma linguagem diferente [da matemática]. Se se quer aprender algo sobre a natureza, apreciar a natureza, é necessário compreender a linguagem que ela fala. Ela oferece-nos a informação apenas de uma forma: não somos presunçosos ao ponto de lhe pedir que mude».**


Richard Feynman

Inauguramos agora 2005 como Ano Mundial da Física. Os matemáticos e os físicos vão ter muitas oportunidades para conversar.

Portugal e a fundação da União Matemática Internacional

Anabela Ramos e Helmuth R. Malonek
Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

A propósito do vigésimo quinto ICM (Congresso Internacional de Matemática) de 2006, que está previsto ocorrer em Madrid[1], e que será organizado pela IMU (União Matemática Internacional)[2], vale a pena lembrar que Portugal esteve presente na formação da IMU. É mais um facto pouco conhecido, revelador das várias tentativas para estabelecer contactos entre Portugal e a comunidade internacional de matemáticos, durante a terceira década do século XX.

Fundação da IMU

A história da IMU começa em 1918, ainda antes da primeira guerra mundial ter acabado. Nessa altura ocorreram discussões entre França, Inglaterra e Estados Unidos no sentido de estabelecer uma nova cooperação internacional em ciência, mais alargada do que antes. Ficou decidido que as nações aliadas deveriam formar novos organismos científicos internacionais, com a eventual participação de países não aliados. O IRC[3], fundado em 1919, foi criado precisamente com esse objectivo, em substituição da Associação Internacional das Academias Científicas (IAA), que tinha sido criada em 1899 [1].

Charles de la Vallé Poussin
(1866-1962)

Em Julho de 1919, na conferência do IRC realizada em Bruxelas, foram elaborados projectos de estatutos provisórios de algumas das Uniões Científicas então formadas, IMU incluída. Nesta altura, foi constituída uma comissão executiva da IMU (*Bureau*), também provisória. É de realçar que, nesta conferência, participaram delegados representantes da Bélgica, Canadá, E.U.A., França, Grã-Bretanha, Irlanda, Itália, Japão, Nova Zelândia, Polónia, Portugal, Roménia e Sérvia [2].

Foi, no entanto, dois dias antes do início do Congresso de Estrasburgo, a 20 de Setembro de 1920, com a presença dos delegados de Inglaterra, França, Bélgica, E.U.A., Itália, Checoslováquia, Grécia, Portugal, Roménia, Japão e Polónia, que ocorreu a primeira Assembleia Geral da IMU. Os estatutos foram aprovados e constituído o *Bureau* definitivo [2]. Estes estatutos foram dados a conhecer em Portugal no nº 67, pág. 612-616, da revista *O Instituto*.[4]

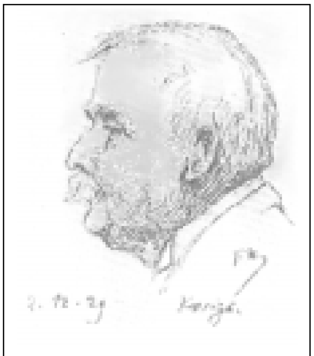
O professor belga Charles de la Vallé Poussin foi eleito primeiro Presidente da IMU por quatro anos e o professor francês G. Koenigs foi eleito Secretário-Geral, por um período de oito anos.

O representante português foi Francisco Miranda da Costa Lobo, presidente do Instituto de Coimbra e director do Observatório de Coimbra. No mesmo número da revista *O Instituto*, Costa Lobo refere:

---

[1] A primeira vez na Península Ibérica.
[2] Inicialmente UMI (Union Mathématique Internationale), depois da 2ª guerra mundial IMU (International Mathematical Union).
[3] International Research Council.
[4] *O Instituto* foi uma revista científica e literária publicada pelo Instituto de Coimbra.

Tive a honra de tomar parte nestas deliberações como representante do Govêrno Português, nomeado por portaria de 26 de Agosto de 1920, e aqui tenho a satisfação de manifestar aos Ex.mos Srs Rego Chagas[5] e Queiroz Veloso[6] o meu agradecimento pelo honroso encargo de que fui incumbido.



Gabriel Koenigs
(1858-1931)

De acordo com os estatutos, era à IMU que competia determinar o lugar e a data de cada ICM e somente matemáticos de países membros do IRC poderiam participar.

Nesta primeira Assembleia Geral da IMU foi tomada uma importante decisão política: delegados de países ex-inimigos ou, mais explicitamente, da Alemanha, Áustria, Hungria e Bulgária foram proibidos de serem membros da IMU. Ficou decidido, no entanto, convidar países não alinhados a integrarem a União. Dois matemáticos franceses com bastante influência, Picard[7] e Koenigs, eram acérrimos defensores da política de excluir a Alemanha desta cooperação científica. Koenigs como secretário da IMU, exerceu sempre grande pressão contra a participação da Alemanha nos ICM's seguintes [1].

Francisco Miranda da Costa Lobo
(1864-1945)

Salientamos ainda que os organizadores franceses do Congresso de Estrasburgo fizeram unicamente convites pessoais a ilustres matemáticos de países "amigos e aliados" ([1], pág. 33). Por isso, este Congresso, com apenas duzentos participantes, foi o mais pequeno de sempre.

A segunda Assembleia Geral da IMU, bem como o ICM seguinte, ocorreu em Toronto em 1924. Francisco Miranda da Costa Lobo e Fernando de Vasconcelos[8] foram os representantes portugueses.

Escreveu Costa Lobo, no nº 71 da revista *O Instituto*:

Tive a honra de voltar a representar o govêrno português (também desta vez representado pelo ilustre professor da Universidade de Lisboa Sr. Dr. Fernando de Vasconcelos), ao qual, bem como à Secção Nacional da União Matemática Internacional, à Universidade de Coimbra, à Academia das Sciencias de Lisboa, ao Instituto de Coimbra e à Associação Portuguesa para o Progresso das Sciências, que me deram igual honra, testemunho o meu reconhecimento.

Novamente as questões políticas dominaram os preparativos do Congresso de Toronto. A iniciativa para realizar o Congresso no Canadá foi, em grande parte, devida a John Charles Fields[9]. Supõe-se que ele não simpatizava com a política de exclusão mas, por outro lado, pensava que a União não aprovaria um Congresso verdadeiramente internacional. Assim, os organizadores canadianos não permitiram a participação de matemáticos dos países ex-inimigos. No entanto, os estatutos não foram totalmente cumpridos ao aceitarem a participação de delegados da Rússia, Ucrânia, Geórgia, Índia e Espanha, países que não eram membros do IRC [1].

A Assembleia Geral elegeu o professor Salvatore Pincherle, de Itália, como novo Presidente da União. Passado pouco tempo, Pincherle e Koenigs entraram em rota de colisão sobre a política a seguir no ICM de 1928, relativamente à participação desses países ex-inimigos.

F. M. da Costa Lobo não comenta, nem sequer refere, estas questões políticas quando, na revista *O Instituto*, escreve sobre os dois Congressos Internacionais em que participou. Há, no entanto, algumas frases que nos levam a concluir que Costa Lobo não tinha grande simpatia pelos alemães. Por exemplo, na descrição que faz da Universidade de Estrasburgo escreveu o seguinte:

[5] Ministro da Instrução Pública de 20/7/1920 a 14/9/1920.
[6] Director-Geral do Ensino Superior.
[7] Primeiro presidente do IRC e presidente do ICM de Estrasburgo.
[8] Professor do Instituto Superior de Agronomia e da Secção de Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.
[9] Presidente do *Royal Canadian Institute* e membro da Comissão Organizadora do Congresso Canadiano.

O balanço dos despójos deixados pelos alemães demonstra quanto são exagerados nas suas pretensões scientíficas. As instalações revelam faltas inconcebiveis que nas astronómicas tive ocasião de verificar. Basta notar que o instrumento principal do observatório..., há muitos anos que enferruja, pois a cúpula ... é tão colossalmente alemã que há muito não é possível movê-la.

Na alocução que pronunciou na sessão de abertura do ICM de Estrasburgo também são frequentes os ataques, mais ou menos subtis, à Alemanha e manifesta ampla simpatia pelos ingleses e franceses[10].

Na Assembleia do IRC de 1925 muitas sugestões foram dadas no sentido de acabar com essas restrições. As propostas foram bem acolhidas, mas não o suficiente para alterar os estatutos.

Passado um ano, numa assembleia extraordinária do IRC, foi decidido convidar a Alemanha, Áustria, Hungria e Bulgária para integrarem o IRC e as Uniões associadas. No entanto, os alemães não deram uma resposta definitiva; os austríacos estavam dependentes das academias germânicas; os búlgaros invocaram razões económicas para rejeitar o convite. A Hungria foi o único país ex-inimigo que se tornou membro do IRC em 1928, mas evocou razões económicas para não aderir ainda à União [1].

Convém abrir um parêntesis para realçar que, no início do século XX na organização dos Congressos, antes da Primeira Guerra Mundial, a cooperação activa dos matemáticos alemães (entre eles G. Cantor e D. Hilbert) e matemáticos franceses (por exemplo Poincaré) era decisiva e de grande influência para o desenvolvimento da matemática. Lembramos apenas, o papel dos famosos vinte e três problemas de Hilbert, dados a conhecer no segundo ICM de 1900, em Paris.

No ICM de 1928, que ocorreu em Bolonha, Pincherle e os outros organizadores italianos decidiram retomar as tradições anteriores à guerra ao convidarem para participarem no Congresso todos os matemáticos, independentemente da sua nacionalidade. Neste Congresso, bem como nos de 1932 e 1936, parece não ter havido participação portuguesa [5].

O Secretário-Geral da IMU, Koenigs, manifestou-se contra esta abertura e afirmou que o Congresso de Bolonha não devia ser considerado um Congresso da União, uma vez que os estatutos ainda não tinham sido alterados. Esta tomada de posição contradiz a sua atitude anterior uma vez que, no Congresso de Toronto, também ele tinha permitido a participação de países que não eram membros do IRC. Mas vozes de diversas Nações, nomeadamente da Grã-Bretanha e EUA, fizeram saber que só participariam no Congresso se este fosse verdadeiramente internacional, sem quaisquer limitações.

O ICM de Bolonha foi o mais participado até então e, cientificamente, um sucesso. Além disso, a Assembleia Geral da IMU, que ocorreu durante o Congresso, aprovou unanimemente a política de abertura de Pincherle.

Mas a sombra das rivalidades políticas, em particular a crescente agressividade da Alemanha, complicou a escolha do país onde devia ocorrer o Congresso seguinte, em 1932. Foi apenas a oferta da Suíça, representada pelo Presidente da Sociedade dos Matemáticos Rudolf Fueter[11], de Zurique, que desbloqueou a situação.

Os estatutos da IMU expiraram em 1931, simultaneamente com os do IRC. Novo projecto de estatutos devia ser preparado antes da Assembleia Geral de 1932. No entanto, nesta Assembleia, foi proposta uma comissão que devia estudar a desejável continuidade de uma organização matemática internacional e apresentar o respectivo relatório no ICM seguinte, que se realizou em Oslo, em 1936. Durante este período a IMU foi suspensa. Depois de um primeiro esforço para recomeçar a União nos anos trinta ter falhado, esse trabalho recomeçou pouco depois da segunda guerra mundial ter terminado.

[10] Revista *O Instituto*, nº 67, 601-604.

[11] Fueter, bem como de la Vallée Poussin, Pincherle e Koenigs (entre outros), foram eleitos sócios estrangeiros do Instituto de Coimbra. Fueter visitou a Universidade de Coimbra em Dezembro de 1932.

Nova IMU

José Sebastião e Silva
(1914-1972)

O renascimento da IMU formalizou-se em 1951. A primeira Assembleia Geral da nova IMU ocorreu em 1952 e, desta vez, com a presença de matemáticos alemães. Também Portugal esteve presente, representado pelo Professor J. Sebastião e Silva.

Salientamos que no ICM de 1950, que ocorreu em Cambridge, USA, foram enviadas quatro comunicações dos portugueses Hugo Ribeiro, A. Gião, A. Monteiro e M. Peixoto, R. L. Gomes. Só Hugo Ribeiro esteve presente no Congresso, porque se encontrava nos Estados Unidos [5].

INTERNATIONAL MATHEMATICAL UNION

Record of the First General Assembly held on 6-8 March 1952 in Rome in the Palazzo Farnesina by invitation of the Accademia Nazionale dei Lincei.

Present:

A. Delegates.

Australia	Dr. C. A. [illegible]
Austria	[illegible]
Belgium	Professors L. Godeaux, [illegible]
Denmark	[illegible]
Finland	Professor J. [illegible]
France	Professors A. Denjoy, H. Cartan, [illegible]
Germany	Professors E. Kamke, H. Kneser, H. L. Schmid, [illegible]
Greece	[illegible]
Great Britain	Professors W. V. D. Hodge, G. Temple.
Italy	Professors E. Bompiani, G. Sansone, A. Terracini, B. Segre, - Professors A. Signorini, F. Conforto, [illegible]
Japan	Professor [illegible]
Netherlands	Professors H. D. Kloosterman, J. F. Koksma.
Norway	[illegible]
Peru	[illegible]
Switzerland	Professors [illegible]
United States of America	Professors M. H. Stone, J. R. Kline, J. T. Whyburn, E. Hille, S. MacLane.

In addition, after minute (6):

Spain	[illegible]
Yugoslavia	Professor D. Kurepa.

B. Observers.

Poland	For the Panstwowy Instytut Matematyczny: Professors K. Kuratowski, S. Turski.
Portugal	For the Junta de Investigação Matemática: Professor J. S. e Silva.

C. Other Participants.

United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization	(UNESCO): Professor [illegible] of the Department of Natural Sciences.
International Council of Scientific Unions	(ICSU): Dr. [illegible] of the Liaison Office (ICSU-UNESCO).

Lista dos delegados participantes na Assembleia Geral da IMU, em 1952

Isto reforça a ideia de que, nesta altura, Portugal já não seguia a política de abertura internacional. É bem conhecido que o regime salazarista tinha iniciado uma ofensiva contra a Universidade Portuguesa, nos anos de 1946 e 1947 e qualquer tentativa para que a investigação científica em Portugal se tornasse uma actividade estável foi assim brutalmente interrompida ([3] e [6]).


Fernando R. Dias Agudo,
Professor Jubilado da Faculdade de
Ciências da Universidade de Lisboa

Portugal e a Nova IMU

Segundo os actuais estatutos da IMU, cada país deve constituir uma Comissão Nacional que estabeleça a interligação com a União e, em particular, assegure a representação nas reuniões que precedem os congressos internacionais de matemáticos. Com este objectivo, foi criada uma nova Comissão Nacional de Matemática, por despacho do Ministro da Ciência e Tecnologia, em 27 de Março de 2002. A Comissão é composta, "conforme despacho ministerial, por um representante de cada um dos centros de investigação creditados pela FCT, e por um representante da Sociedade Portuguesa de Matemática. Cada um destes elementos será nomeado pela instituição respectiva (o centro a que pertence no primeiro caso, e a SPM no segundo) por um período de quatro anos, sem restrições sobre o número de mandatos"[12].

Na reunião de Shangai, de 17-18 de Agosto de 2002, esteve presente como delegado português Carlos M. Agra Coelho, Coordenador Científico da UI&D Matemática Aplicada do ISA-Univ. Técnica de Lisboa.

A comissão anterior estava inactiva e, por isso, em 1998 não esteve presente nenhum representante português na reunião de Dresden, que ocorreu antes do Congresso de Berlim.

Até 1992 era o INIC (Instituto Nacional de Investigação Científica)[13] que funcionava como organismo aderente da União e apoiava a representação nacional nas actividades da IMU.

O professor Dias Agudo foi Presidente do INIC entre 1980 e 1983 e foi eleito Presidente da Comissão Nacional de Matemática, em 1982. A Comissão, que tinha um mandato de três anos, não viu os seus membros confirmados ou substituídos em 1985, pelo que as relações com a IMU foram sendo asseguradas pelo professor Dias Agudo. Assim, em 1986, o ilustre professor foi delegado nacional à décima Assembleia Geral da IMU, que ocorreu em Oakland, Califórnia, e, em 1990, à décima primeira que se realizou em Kobe, no Japão[14].

Com a extinção do INIC passou a JNICT (Junta Nacional de Investigação Científica e Tecnológica) a ocupar-se do pagamento de quotas e, pouco mais fez, do que apoiar a participação do Professor F. R. Dias Agudo na Assembleia Geral da IMU, em 1994, em Lucerna, Suíça.

Hoje em dia é o GRICES (Gabinete de Relações Internacionais da Ciência e do Ensino Superior), sucessor do ICCTI, que tem a responsabilidade do pagamento de quotas.

O Professor Dias Agudo informou os autores deste artigo que sugeriu, num relatório de 6/10/1990 relativo à participação na 11ª Assembleia Geral, que o INIC estudasse a possibilidade de as relações com a IMU passarem a ser

[12] Ver estatutos da Comissão Nacional de Matemática que entraram em vigor a 25 de Outubro de 2002.
[13] Resultou do Instituto de Alta Cultura, IAC.
[14] Informação gentilmente fornecida pelo Ex.mo Professor Dias Agudo, a quem agradecemos a amabilidade que teve em nos receber.

desempenhadas pela SPM, numa tentativa de obviar todos os inconvenientes que até então se tinham verificado nas relações entre Portugal e a União Matemática Internacional.

A consolidação da investigação em matemática, feita principalmente através das Unidades de Investigação, é hoje uma realidade e deixa antever que Portugal terá um papel activo no trabalho da IMU. O próximo ICM, previsto para 2006 em Madrid, poderá ser uma boa oportunidade.

Bibliografia

[1] Olli Lehto, *Mathematics Without Borders-A History of the International Mathematical Union*, Springer 1998.

[2] Lobo, Francisco Miranda da Costa, *O Instituto*, Imprensa da Universidade, Coimbra, nºs 67 e 71.

[3] Morgado, José, *Ofensiva Governamental contra a Universidade Portuguesa*, 1990, http://www.mat.uc.pt/~jaimecs/hspm/X0039_capIV14.html

[4] Informação fornecida pelo GRICES.

[5] Silva, Jaime Carvalho, *Participação em Congressos*, http://www.mat.uc.pt/~jaimecs/hspm/X0038_capIV13.html

[6] Agudo, F. R. Dias, *Ser Cientista Em Portugal- O Meu Testemunho*, conferência proferida em 19 de Junho de 1996 por motivo da sua jubilação.

Bartoon

Luís Afonso, Público, 22-10-2004

(Publicação gentilmente autorizada pelo autor)

Hex

O Hex foi inventado duas vezes. Uma, pelo matemático e poeta dinamarquês Piet Hein em 1942, a outra pelo matemático americano John Nash, em 1948. Trata-se de um jogo de conexão que se desenrola num tabuleiro como o ilustrado:

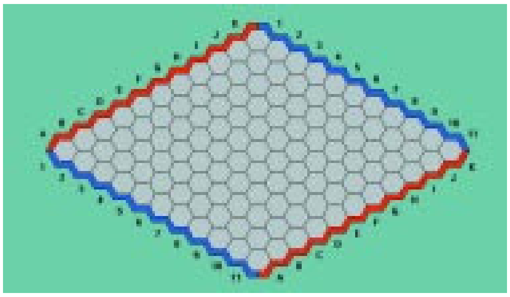


Figura 1

Há dois jogadores, um joga com peças vermelhas, o outro com as azuis. Cada jogada consiste em colocar num hexágono livre uma peça da sua cor. Ganha quem conseguir unir duas margens paralelas com a sua cor. Na Figura 1 o jogador que conduz as azuis deve tentar unir as margens que correspondem aos pontos cardeais NE e SO.

Nenhum jogo de Hex pode terminar empatado. Este resultado pode ver-se intuitivamente, se interpretarmos uma cor como sendo água, e a outra um muro de pedra. Se imaginarmos todas as casas do tabuleiro ocupadas, então das duas uma: ou flui água, ou há um dique que separa duas massas de água. Em cada um dos casos uma das cores ganhou. Claro que também há uma demonstração matemática deste resultado.

Outro resultado importante da teoria deste jogo, e que se deve a John Nash, é o facto de qualquer jogo de Hex poder, teoricamente, ser sempre ganho pelo primeiro jogador, se este conhecer a estratégia apropriada. Contudo, para dimensões não triviais do tabuleiro (11x11 é um dos casos, claro) ninguém conhece essa estratégia. O argumento de Nash prova a existência de uma estratégia vencedora para o primeiro jogador, mas nada nos ajuda a encontrá-la. Trata-se de uma demonstração por absurdo. Ei-la: Como nenhum jogo de Hex pode terminar empatado, o primeiro ou o segundo jogador tem uma estratégia vencedora. Suponhamos que era o segundo jogador que, jogando perfeitamente, tem a vitória assegurada. Então o primeiro começa por jogar aleatoriamente e encara-se como sendo o segundo jogador, roubando-lhe a estratégia vencedora, que se supôs existir. Sempre que tiver de jogar onde, por acaso, já o tenha feito, torna a jogar à sorte... Assim, tem a vitória garantida, partindo do princípio que há estratégia vencedora para o segundo. Resumindo: se admitirmos que o segundo jogador vai ganhar então... o primeiro ganha! Absurdo. Como alguém tem de dispor de uma estratégia vencedora, terá de ser o primeiro.

Este argumento é agora clássico, e aplica-se a muitos jogos, tendo ficado conhecido por *argumento do roubo de estratégia*.

Como dissemos, ninguém conhece a estratégia óptima, nem mesmo os computadores, se as dimensões do tabuleiro forem razoáveis. Contudo, se a primeira jogada for muito forte, por exemplo nas casas centrais da diagonal menor, o primeiro jogador fica na posse de grande vantagem. Daí a instituição da *regra do equilíbrio*, que consiste em dar ao segundo jogador, na sua primeira vez de jogar, a possibilidade de trocar de cores, aproveitando o primeiro lance do seu adversário. Assim, o primeiro jogador não jogará demasiado forte, e a luta fica equilibrada.

Duas peças da mesma cor em hexágonos que partilhem uma aresta dizem-se *adjacentes*. Claro que, para ganhar, um jogador necessita de um conjunto de peças adjacentes (um *grupo*) que una as suas duas margens. Mas, estender os seus grupos com movimentos adjacentes, nem sempre é a melhor ideia. Vejamos quais as distâncias, contabilizadas em termos de movimentos adjacentes, a uma casa determinada.

Jorge Nuno Silva
Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa
jnsilva@cal.berkeley.edu

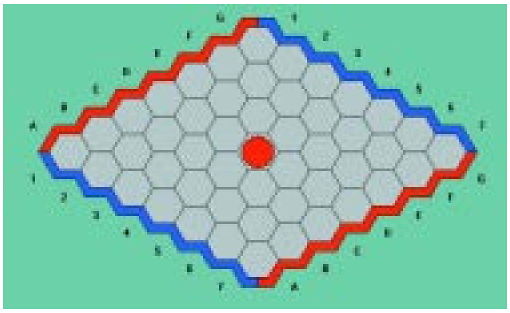


Figura 6

Na Figura 6, à distância de um lance de d4 estão as casas c4, c5, d3, d5, e3, e4, são as casas adjacentes a d4. As casas adjacentes a estas, que ainda não tenham sido listadas, só precisam de mais uma jogada para serem atingidas. Assim, a distância de duas jogadas de d4 estão b4, b5, b6, c3, c6, d1, d6, e2, e5, f2, f3, f4. E assim sucessivamente.

Repare-se que, para ir de d4 a qualquer casa que diste desta casa duas unidades há sempre dois caminhos, portanto d4 pode sempre ligar-se, por adjacência, a qualquer casa a duas unidades de distância. A este tipo de ligação chama-se *ponte*. As pontes são das jogadas mais fortes do Hex. A Figura 7 mostra uma ponte entre d4 e e5.

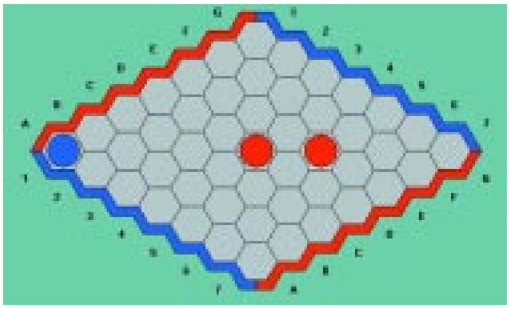


Figura 7

Aqui as peças d4 e e5 não podem ser separadas. Se as azuis jogam d5, as vermelhas respondem com e4, e se as azuis jogam e4, as vermelhas respondem com d5.

Devemos sempre tentar estender a nossa *conectividade* e evitar que o adversário estenda a dele. Contrariar as intenções do outro jogador deve ser sempre uma preocupação, muitas vezes uma boa defesa é o melhor ataque.

Referências

Browne, Cameron (2000), *Hex Strategy: Making the Right Connections*, A. K. Peters.

Gardner, M. (1959), *The Game of Hex*, Mathematical Puzzles and Diversions, Penguin, Hammondsworth, 70-77.

O cotidiano e a continuidade

Renato J. C. Valladares
Universidade Estácio de Sá - Rio de Janeiro

Introdução

No Brasil a continuidade não é estudada nos cursos de nível médio, sendo abordada apenas nos cursos universitários de base matemática. O objetivo deste artigo é discutir este fato, estudando situações da vida cotidiana, nas quais a continuidade aparece de forma natural, o que justificaria sua inclusão no ensino médio (destinado a estudantes entre 15 e 17 anos de idade), já que este se destina à formação do cidadão, independente de sua opção profissional. Além da conveniência, será discutida a oportunidade e a forma de incluir a continuidade no nível médio, incluindo-a, desta forma, na cultura matemática básica que se pretende oferecer a quem conclui estudos neste nível.

O tema será abordado em duas partes; **a primeira procura responder à pergunta "por que estudar continuidade?". A segunda preocupa-se com a maneira de abordar o assunto no nível médio**. Na primeira parte mostraremos a falta que a continuidade faz para entender melhor muitas coisas da vida. **Para isto abordaremos três casos reais. Um se refere a aspectos da legislação criminal do menor (no Brasil), que foram temas de um artigo publicado na grande imprensa e de um capítulo de novela na TV**. Apesar da aparência não matemática do tema, a idéia da continuidade ajuda bastante na compreensão do mesmo. **Os outros casos se referem a pesquisas eleitorais e a imposto de renda, o que empresta a eles um cunho matemático mais evidente**, que será bom para introduzir o assunto. No estudo destas situações surgirão de forma muito natural, exemplos da função degrau e de funções definidas por partes.

Para ver como a continuidade pode ser abordada, desviaremos nosso caminho do **choque de épsilons e deltas** e nos concentraremos nos aspectos de mudanças **suave** e **brusca** que são descritos pela continuidade e pela descontinuidade. Estes aspectos serão evidenciados nas situações acima e em problemas simples, que usam imaginação, algumas noções correntes, e podem ser resolvidos com o uso de Matemática básica.

Primeiro caso

Nos primeiros dias do mês de Outubro de 2000, logo após o 1º turno das eleições municipais, os jornais se ocuparam de pesquisas eleitorais que, segundo se afirmava, haviam cometido muitos erros. Em especial, duas delas chamavam a atenção. Um Instituto previu que no Rio de Janeiro, o candidato Luiz Paulo Conde obteria uma votação da ordem de 37%. O mesmo instituto previu que no Recife, o candidato Roberto Magalhães obteria cerca de 52% dos votos. Nenhuma das previsões se confirmou, apresentando erros, o que era de esperar, já que pesquisas eleitorais apresentam estimativas e não previsões exatas. Os erros cometidos foram da ordem de 3%, pois a votação de Luiz

Paulo Conde foi pouco maior que 34%, enquanto Roberto Magalhães obtinha pouco menos que 50%. O erro do Rio foi considerado normal, dentro da margem de tolerância. Com o erro do Recife aconteceu o contrário. Ele não foi aceite, tendo sido considerado uma "zebra" (expressão brasileira que significa "fato inesperado").

Cabe então perguntar: Porque o mesmo erro, da ordem de 3% foi considerado normal para o Rio e uma "zebra" para o Recife? A resposta é simples: No Rio a diferença não alterou a expectativa sobre o resultado da eleição (ida do candidato para o 2º turno, de acordo com a legislação eleitoral brasileira). Com o percentual de 52% previsto no Recife, o candidato seria eleito no 1º turno, enquanto com o percentual inferior a 50% realmente obtido, o candidato teve que disputar o 2º turno.

O impasse

Assim, um erro da ordem de 3% não é, *a priori*, "grande" nem "pequeno". Para dimensioná-lo é necessário analisar suas conseqüências. Se estas forem "pequenas", como no caso de Conde, o erro diminui. Se forem "grandes", como no caso de Magalhães, o erro cresce. Realmente, não é "pequeno", o erro de apontar como eleito, um candidato que teve que disputar o 2º turno, quando acabou sendo derrotado, como se viu posteriormente.

Desta maneira, parece que se chega a um impasse. Por um lado, pesquisas eleitorais não apresentam previsões exatas e sim estimativas que necessariamente têm margens de erro. Por outro lado, o fato da margem de erro ser pequena, não assegura que o erro seja pequeno. Para complicar as coisas, a imprensa noticiou que um deputado insatisfeito com os erros das pesquisas "... está preparando um projeto de lei que proíbe a divulgação de pesquisas com margem de erro superior a um por cento...".

Esta proposta é inócua pois a redução da margem de erro não resolve o problema. Para ver isto, lembremos algumas situações em que houve disputa apertada. No 1º turno das eleições em São Paulo, o candidato Paulo Maluf venceu o candidato Geraldo Alkmin por uma diferença bem menor que 1%. Fato similar ocorreu no Rio de Janeiro, na disputa entre César Maia e Benedita da Silva. Muito provavelmente, nenhuma pesquisa teria sido capaz de determinar vencedor nestas disputas, mesmo que suas margens de erro fossem da ordem de 1%, já que a diferença real foi menor que este percentual. Entretanto, muitas pesquisas se pronunciaram corretamente sobre a imprevisibilidade destas disputas, usando a classificação "empate técnico".

Voltando ao Recife, vemos que lá também existia uma situação imprevisível, pois raciocinando com a margem de erro de 3%, o prognóstico de votação pouco maior que 52% não excluía (como de fato não excluiu) a possibilidade de uma votação inferior a 50%. Entretanto, diferente das outras situações, esta não poderia ser classificada como "empate técnico", pelo simples fato de não haver com quem empatar.

Neste caso, uma boa alternativa é a criação de uma nova classificação que pode ser denominada "prognóstico imprevisível" ou algo similar.

Uma descontinuidade

Como, de acordo com a legislação eleitoral brasileira, a condição *sine qua non* para um candidato se eleger, é obter mais que 50% dos votos válidos, pode-se descrever a situação eleitoral de cada candidato em função de sua votação, com auxílio de uma função real E. Numerando a situação "eleito", com o número 1 e "não eleito" com 0, a função E se define por $E(t) = 0$, se $t \leq 50$ e $E(t) = 1$, se $t > 50$. É fácil ver que a função E é descontínua em 50. Assim se estivermos trabalhando com um número a, "próximo" a 50, cujo cálculo tenha uma margem de erro, que inclua o número 50, não podemos ter certeza quanto à resposta dada por E, quando for calculada em a.

Foi exatamente o que aconteceu no Recife. Para ver isto, usemos mais uma vez a margem de erro de 3 (3%). Isto é, admitiremos que o número 52 (percentual de votação de Roberto Magalhães) foi calculado com uma margem de erro 3. Logo, era esperada uma votação entre os percentuais 52 - 3 = 49% e 52 + 3 = 55%. Assim, o ponto de descontinuidade 50 (50%) estava na margem de erro, o que impossibilitaria qualquer previsão, sendo melhor usar a classificação "prognóstico imprevisível" sugerida acima.

Continuidade e aproximações

Os raciocínios acima deixam claro que a existência de descontinuidades dificulta os cálculos aproximados e as aproximações em geral, que se baseiam na expectativa que "pequenas variações" nas causas acarretarão "pequenas variações" nos efeitos. Assim as situações em que ocorrem aproximações serão melhor abordadas se existir continuidade nos processos matemáticos (funções) que determinam estas situações, pois a continuidade é uma teoria que, nestes processos, relaciona os efeitos com suas causas. Este fato deixa clara a importância da continuidade nas diversas utilizações de recursos matemáticos, pois a todo momento se trabalha com aproximações. Afinal, nossa cultura conduz ao uso de números decimais, não obstante a grande dificuldade em obter valores decimais exatos. Esta dificuldade decorre de muitas razões, como as imprecisões inerentes a cada situação ou o fato de somente números inteiros e racionais (irredutíveis) cujo denominador tenha apenas fatores primos 2 ou 5 terem expansão decimal finita.

Segundo caso

Vejamos, num jornal, a tabela de desconto de imposto de renda na fonte pagadora.

Os ganhos entre 0 e 900 reais são isentos, enquanto os ganhos na faixa entre 900 e 1.800 pagam 15% de imposto. Para calcular o imposto nesta faixa, deve ser deduzida uma parcela de R$ 135,00.

Se não houvesse esta dedução, uma pessoa que ganhasse 901 reais, pagaria 135,15 de imposto e ficaria com o ganho real de 901 - 135,15 = 765,85 reais. Por outro lado, uma pessoa que ganhasse 900, estaria isenta e teria o ganho real de 900 - 0 = 900 reais. Neste caso, uma "pequena variação" no ganho implicaria numa "grande variação" no imposto a pagar e, conseqüentemente, a tabela seria incoerente pois uma pessoa que ganhasse mais poderia terminar com um ganho real menor do que se ganhasse menos.

Para sentir o problema, imaginemos o "presente de grego" que receberia um trabalhador que ganhasse 900 reais e tivesse obtido um aumento de 10%. Seu salário passaria a ser de 990, sobre os quais pagaria 15% de imposto, o que dá 990 x 0,15 = 148,50. Assim, ele ficaria com um ganho real de 990 - 148,50 = 841,50, bem menor que os 900 que ele tinha antes do aumento. Entretanto, a parcela de 135 reais a ser deduzida, impede que isto aconteça pois, neste caso, o imposto seria de 148,50 - 135 = 13,50 e o ganho real seria 990 - 13,50 = 976,50, maior que os 900 que ganhava antes do aumento.

Para evitar este tipo de incoerência, a tabela deve evitar que pequenas variações nos ganhos impliquem em grandes variações no imposto a pagar. Em outras palavras, a tabela deve ser descrita por uma função contínua, como será visto um pouco à frente. Antes, porém, observemos que a tabela evita outra incoerência, quando determina uma tributação de 27,5% e uma parcela a deduzir de 360 reais, para ganhos superiores a R$ 1.800,00. Se em vez de 360, esta parcela fosse - por exemplo - de R$ 400,00, uma pessoa que ganhasse R$ 1.801,00 pagaria R$ 95,27 de imposto enquanto outra pessoa que ganhasse 1.800 seria tributada em 135 reais. Novamente, teríamos uma incoerência, decorrente de "uma pequena variação no ganho implicar em uma grande variação no imposto a pagar". Só que agora, a variação do imposto seria "contrária" à do ganho.

A Função

Como o leitor pode verificar, o imposto a ser descontado é dado em função do ganho pela função $I(t) = 0$ se $t \leq 900$; $I(t) = 0{,}15t - 135$, se $900 < t \leq 1.800$; $I(t) = 0{,}275t - 360$, se $t > 1.800$. Esta função é contínua.

Uma Situação Prática

A tabela de declaração anual de imposto de renda (declaração de ajuste) segue padrões similares aos do desconto mensal, tendo as mesmas alíquotas incidentes sobre valores anuais correspondentes aos valores mensais. Entretanto, para evitar que os custos operacionais do recebimento do imposto ultrapasse o valor deste, os contribuintes com imposto até 10 reais, ficam dispensados do pagamento. Isto introduz uma incoerência e sua correspondente descontinuidade. Para ver isto, imaginemos dois contribuintes com alíquota de 15%. João, com imposto de R$ 10,00, fica dispensado de pagar. Maria que teve ganho de 10 reais a mais, pagará 11,50 de imposto. Desta forma, Maria terminará com um ganho real menor que o de João, o que é uma incoerência, pois ela ganhou mais do que ele.

Para evitar esta incoerência, seria necessário cobrar o imposto de João. Entretanto, isto acarretaria outra incoerência, que é cobrar uma quantia menor que o custo da cobrança. Assim, a situação prática do imposto de renda torna inevitável a escolha de uma das incoerências. Isto é feito evitando-se pagar pela cobrança, mais que o valor cobrado.

Sem achar que isto seja uma justificativa para a escolha acima, vale observar que a diferença entre os ganhos reais de João e Maria é de 1,50 reais em um ano, ou menos que 13 centavos mensais, sendo uma "diferença pequena".

Nota

Convém notar que a idéia de "diferença pequena" inclui uma idéia de aproximação que, como vimos um pouco atrás, funciona melhor quando tem a continuidade na sua base. A explicitação do modelo matemático que descreve esta situação, e a tentativa de identificar continuidade (ou descontinuidade) já não faz mais sentido no nível médio. Não obstante este fato, acreditamos que o estudo de situações como esta, onde se identifique "aproximação" ou "continuidade", seja muito positiva na formação média do cidadão.

Terceiro caso

A noção de continuidade ultrapassa a Matemática e descreve outras formas de conhecimento. Para ver como isto ocorre, vamos nos valer de um editorial publicado num jornal. Ele criticava a legislação criminal brasileira, que estabelece a idade de 18 anos como limite mínimo para que um cidadão possa ser julgado por um crime. O articulista escreveu que "O parâmetro atual estabelece que o limite legal entre maior e menoridade é o dia do 18º aniversário. Se delinqüir um dia antes, o criminoso é inimputável, se resolver fazê-lo 24 horas depois, estará sujeito às penas da lei. Por quê? Qual é a diferença?".

Uma emissora de TV levou ao ar um capítulo de novela versando sobre assunto similar. Um bandido fez alguns reféns e a polícia solicitou que sua mãe pedisse a ele que se entregasse. Esta se recusou a fazê-lo, alegando que o filho completara 18 anos recentemente. Por isso, se fosse preso, seria condenado a muitos anos de prisão.

O jornalista considerou como uma inadequação na lei, o fato de uma pequena variação de tempo, no momento em que uma infração é cometida, possibilitar uma grande variação no rigor da punição ao infrator. O autor da novela se valeu do mesmo fato.

Esta situação guarda estreita semelhança com a situação eleitoral descrita um pouco acima. Para ver isto tomemos a função P definida por $P(t) = 0$ se $t < 18$; $P(t) = 1$ se $t \geq 18$. Fazendo t representar a idade, 0 representar a situação legal do menor e 1 representar a situação do adulto, vemos que P descreve a situação de cada cidadão, frente à legislação criminal, em função da idade. A função P tem uma descontinuidade em 18 que motivou os trabalhos do editorialista e do novelista. Como era de esperar, nem um nem outro fez referência à noção matemática de continuidade.

Assim, embora sem usar explicitamente a noção de continuidade, possivelmente sem ter conhecimento do aspecto matemático do conceito usado, o articulista e o novelista o usaram para escrever seus textos. Provavelmente ocorreu o mesmo com os leitores do artigo e os espectadores da novela que não tenham formação universitária de base matemática. Isto significa que a continuidade está presente nos raciocínios deles, o que nos leva a crer que o conhecimento explícito da noção poderia tê-los ajudado muito.

Podemos dizer o mesmo sobre as pesquisas eleitorais e sobre o imposto de renda. Em reforço a esta posição, vale observar que ao pensar em proibir pesquisas com margem de erro superior a 1%, o deputado acima citado ignorou que a descontinuidade do processo eleitoral tornaria inócua esta proibição.

Abordagem no nível médio

Vemos desta forma, que a falta do conhecimento explícito e sistematizado da noção matemática de continuidade ocasiona seu uso intuitivo, sendo percebido em umas situações e despercebido em outras. Isto ocasiona distorções no uso da continuidade ou mesmo a ausência deste uso, como foi o caso da proposta de redução da margem de erro das pesquisas. Acreditamos que este problema possa ser bem equacionado com a inclusão da continuidade na formação média, pois o conhecimento da noção possibilita sua identificação, sistematização e, conseqüentemente, sua melhor utilização. Esta constatação coloca uma questão.

Como ensinar continuidade?

Como se trata de uma noção complexa, deve-se ter cuidado. Entretanto, não é a 1ª vez que se aborda um tema complexo. Aí estão noções como ângulo, tangente ou vetor que, embora muito complexas, são tratadas em nível elementar e médio, já que são noções importantes para a formação básica do cidadão. Acabamos de ver que a continuidade também pode ter importância similar. Assim, tal como é feito com as outras noções, entendemos que se deve evidenciar os aspectos mais simples e intuitivos da continuidade, o que pode ser feito com auxílio de alguns problemas sobre os quais falaremos a seguir.

Problema 1

Um problema interessante é encontrar situações similares às pesquisas eleitorais e à legislação do menor. Vale notar que as funções E e P que descrevem estas situações, são exemplos da função degrau, largamente usada em um sem número de situações. Não é demais lembrar que a função degrau é uma função real d, definida por $d(t) = c_1$, se $t < a$; $d(t) = c_2$, se $t > a$ e $d(a) = c_3$, onde a, c_1, c_2 e c_3 são constantes reais. Esta função é contínua nos pontos $t \neq a$. Ela será contínua em a (logo, será contínua), se e somente se $c_1 = c_2 = c_3$, situação em que d se transforma em uma função constante.

Os estudantes certamente ficarão surpresos ao descobrirem que as situação "aprovado" e "reprovado" que os afeta tão de perto, são muito bem descritas em função de suas notas, por uma função degrau. A situação ficará ainda mais interessante se os critérios da escola recaírem em somas de funções degraus, como é o caso de existirem três faixas de notas, correspondentes às situações "aprovado"; "em prova final" e "reprovado". Pode-se buscar similaridade entre esta situação e a situação eleitoral de um candidato no 1º turno, que poderia ser "eleito"; "ida ao 2º turno" e "não eleito".

Problema 2

A "proposta" de uma nova faixa de desconto do imposto de renda é um problema interessante. Por exemplo, pode-se calcular a parcela a deduzir, em uma nova faixa de ganhos, acima de 4.000 reais, onde incidirá uma alíquota de 40% de imposto. Esta idéia pode se ampliar, propondo duas ou mais novas faixas de desconto.

Pode-se discutir se são ou não fundadas reclamações do tipo "o meu aumento em vez de ajudar, prejudicou, pois eu mudei de faixa no imposto de renda e acabei ficando com menos dinheiro que antes".

No Brasil, a tabela de desconto para a previdência social também tem alíquotas diferentes conforme a faixa de ganhos. Um problema interessante, é verificar se esta tabela tem ou não parcelas a deduzir, para torná-la coerente (contínua). Caso não tenha, coloca-se uma situação semelhante a da não cobrança do imposto de renda até 10 reais, vista um pouco atrás. Neste caso, vale a pena calcular o "tamanho" da descontinuidade, pois com certeza ela é muito "pequena" para pagar o trabalho de evitá-la. Vale observar que este "tamanho" é justamente a *oscilação* da função, no ponto de descontinuidade.

Problema 3

Suponhamos que João e Maria morem na cidade A e tenham que ir à cidade B, para cumprir um compromisso às 18 horas. A viagem entre A e B demora duas horas. João vai de ônibus e Maria usará o próprio carro. O ônibus parte a cada duas horas, nas horas pares. Para pegá-lo, João deve sair de casa no mínimo 10 minutos antes. Nestas condições, ele deve pegar o ônibus das quatro, devendo portanto sair de casa, no máximo, às 15:50. Maria deve sair de casa no máximo às 16 horas.

Entretanto, se houver algum atraso, as coisas correrão de maneiras diferentes para João e Maria, pois um pequeno atraso para Maria sair de casa, implicará num pequeno atraso no compromisso. De forma diferente, qualquer atraso na saída de João implicará num atraso de pelo menos duas horas na sua chegada. Para entender este fato, pode-se construir funções que descrevam o horário de chegada em função da hora em que se sai de casa. Nestas condições, identificam-se descontinuidades na função que descreve a viagem de ônibus (que é uma soma de funções degrau), enquanto a viagem de carro é descrita por uma função contínua. Interpretando os atrasos como aproximações, percebe-se como as descontinuidades dificultam os cálculos aproximados.

Dando seqüência a estes raciocínios, pode-se imaginar que há uma tolerância de 15 minutos para cumprir o compromisso. É fácil ver que João não terá nenhuma tolerância em sua saída de casa, enquanto Maria terá. Pode-se calcular o "tamanho" desta tolerância. Pode-se trabalhar com outras tolerâncias e ver que se a tolerância na chegada for maior que duas horas, então João terá uma tolerância na partida. Pode-se concluir que João só poderá se valer de tolerâncias que não sejam menores que o "tamanho" (oscilação) da descontinuidade. Vale notar que, na linguagem formal da continuidade, as tolerâncias na chegada são os "épsilons" e as da partida, são "deltas".

Pode-se sofisticar o problema supondo que após às 18 horas, a viagem fica mais lenta devido ao horário de pico. Assim se Maria sair depois das 16, fará parte da viagem depois das 18, o que implicará em diferentes tempos de viagem, em função do horário de partida. Isto torna mais interessante os cálculos das tolerâncias de partida, de acordo com as tolerâncias de chegada (ou dos "deltas" de acordo com os "épsilons").

Pode-se ainda imaginar uma viagem de avião com algumas conexões, de tal forma que um pequeno atraso que faça o passageiro perder o 1º vôo, ocasione um atraso enorme na chegada ao destino. Isto evidenciaria a *composição de erros* que é uma das dificuldades das aproximações frente a descontinuidades.

Problema 4

Não é difícil modelar uma chapa metálica de aproximadamente 1 cm de largura, em forma de arco circular que, em um conveniente referencial, as extremidades fiquem na origem e em (4, 0) e o ponto mais alto seja (2, 1) (fig.1). Neste caso, a cada número x no intervalo [0, 4] corresponde o ponto do arco de abscissa x que, por simplicidade, também será denotado por x.

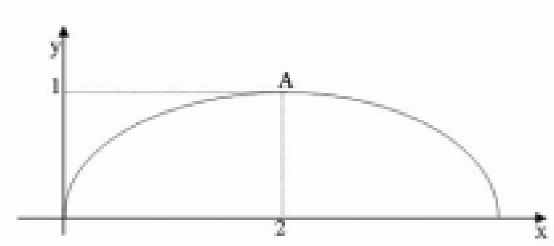


Figura 1

Em seguida, coloca-se a chapa numa mesa, de maneira que a corda fique sobre a mesa e o voltado para cima, com ponto mais alto na altura 1. Nestas condições se colocarmos uma bolinha sobre a chapa, ela rolará para o nível da mesa, salvo se for deixada exatamente no ponto 2 (ou seja, no ponto (2, 1) do referencial). Isto significa que a situação da bolinha é descrita pela função $f(x) = 0$ se $x \neq 2$; $f(2) = 1$, onde 0 corresponde ao nível da mesa e 1 ao nível do ponto 2. É fácil ver que f é uma função degrau, descontínua em 2.

Fazer a bola ficar equilibrada em A, é uma tarefa difícil que pode ser afetada por um simples tremor de mãos. Esta dificuldade em colocar a bolinha no lugar certo, nos faz colocá-la em um lugar próximo, de onde certamente rolará. Aí está uma boa amostra do quanto as aproximações são inevitáveis e como o seu uso é dificultado pelas descontinuidades, pois t pode estar "muito próximo" de 2 e $f(t) = 0$ ficar "longe" de $f(2) = 1$.

Pode-se ainda tomar a função $g(t)$ = distância entre o ponto 2 e o ponto onde a bola parou após ser deixada em t. Neste caso, $g(2) = 0$. Como em todos os outros casos, a bola rola para longe de 2, pode-se concluir que g apresenta uma descontinuidade em 2. Nos demais pontos g é contínua.

As funções f e g tanto podem ser trabalhadas concretamente, com a construção e uso da chapa, como de forma mais abstrata, apenas descrevendo as situações (como foi feito aqui). Na abordagem concreta, pode haver uma grande participação dos alunos.

Observação

O problema 4 está estreitamente associado ao equilíbrio instável estudado em Física que, desta forma, fica estreitamente associado à situação matemática de descontinuidade.

Problema 5

Suponhamos que um grupo de estudantes fez uma rifa cujo prêmio saiu para o bilhete número 2. Se dissermos que o bilhete premiado está na situação 1 e os não premiados estão na situação 0, a premiação é descrita pela função $f(t) = 0$ se $t \neq 2$ e $f(2) = 1$, a mesma função que, no problema 4, dava a altura do ponto onde a bolinha parou. Este fato evidencia a grande versatilidade das funções para descrever as mais variadas situações da vida.

Descontinuidade não é defeito

Enfim, a imaginação é o limite para usar continuidade no nível médio. Entretanto, é conveniente observar que descontinuidade não é defeito. A descontinuidade que atrapalha um prognóstico eleitoral é a mesma que aperfeiçoa o processo democrático. A descontinuidade que faz um contribuinte que ganhou R$ 10,00 a mais, acabar ficando com R$ 1,50 a menos, é a mesma que evita que se gaste 10 para receber uma conta de 5. Os critérios de um colégio podem fazer da média 5, uma desejável descontinuidade que signifique aprovação.

Enfim, continuidade e descontinuidade são qualidades matemáticas que podem ser boas ou ruins, dependendo do uso que se faça delas. Um dos melhores usos é ensiná-las ao maior número possível de pessoas, pois isto as tornará mais esclarecidas.

Bibliografia

[V1] - Valladares, Renato. *O Jeito Matemático de Pensar*. Editora Ciência Moderna, Rio de Janeiro, 2003.

[V2] - Valladares, Renato. *Matemática Cultural: Um Método de Ensino e Aprendizagem*. Educação Matemática em Revista, SBEM - São Paulo, nº 13, pp. 13 a 27.

Notas sobre pedagogia em Matemática

João Carvalho
Departamento de Engenharia Metalúrgica e de Materiais
Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto

O que ouço, esqueço
O que vejo, recordo
O que faço, aprendo.

Confúcio

O aluno e a síndrome do espectador

Actualmente, a maioria dos alunos chega à universidade sem hábitos de estudo e de trabalho. Aparentemente chegam com a ideia de que uma aula seria como um espectáculo. A única diferença, seria a de que teriam de tirar algumas notas. Assim, o aluno adopta uma atitude próxima da de um espectador.

Obs.: Aqui vale a definição de aula de Tim Postom: "Uma aula é um intervalo de tempo durante o qual os apontamentos do professor passam para os apontamentos do aluno, sem passar pela cabeça nem de um nem de outro".

Ora, é do conhecimento geral, que aprender matemática, ou qualquer outra ciência, não pode ser feito só "de ouvir falar" nem de ver fazer. Se assim fosse, bastaria pôr os alunos a "ver as cassetes", e o professor estaria a mais no sistema. Aprender exige trabalho, dedicação, meditação e concentração.

A apreensão de conceitos matemáticos ou científicos, com o mínimo de rigor, não acontece apenas por ouvir alguém falar disso, ou como resultado de uma leitura em diagonal. A apreensão de um conceito, até ele se tornar operativo, isto é, até que sejamos capazes de o utilizar num outro qualquer contexto, é um processo que leva o seu tempo e dá trabalho.

Admitamos que assistir a uma aula de matemática, ou de outra coisa qualquer, para quem está na atitude de espectador, é certamente pouco aliciante. O espectáculo é muito pouco atraente, tendo em vista os outros espectáculos a que o aluno está habituado.

Há que mudar esta mentalidade, e seria bom que isso acontecesse antes de ir para a universidade. Deveria começar na instrução primária. Uma aula é um local de trabalho, onde se vai para aquisição de formação e conhecimentos. O objectivo do aluno, deve ser aprender. Creio que, inconscientemente, ele sabe que é assim que deve ser. Para o aluno, aprender é o seu trabalho.

Ao aprender, ao ganhar novas competências, torna-se mais capaz de resolver problemas, sejam eles de que tipo forem. À medida que vai resolvendo problemas vai aumentando a sua capacidade de os enfrentar. A Matemática é por direito próprio a disciplina da resolução de problemas. Não será a única pois há outras em que se desenvolve essa capacidade. A Matemática é, no entanto a disciplina onde os problemas aparecem de forma mais clara e definida, o que facilita o desenvolvimento da capacidade. Os problemas que nos aparecem na prática não são tão claros e definidos. Pode ser preciso um esforço suplementar para melhorar a definição do problema, mas a Matemática ajuda-nos a perceber que ao resolver qualquer problema, devemos analisá-lo de todos os ângulos possíveis, para não deixar escapar algum aspecto que seja importante, e do qual nos não apercebemos numa primeira abordagem. Habitua-nos a ser rigorosos.

Ouve-se dizer que a maioria dos alunos não quer aprender. Creio que isso corresponde a uma forma superficial de ver as coisas. Não faltam exemplos em que os alunos postos a trabalhar aprendem e gostam de aprender. Na minha opinião a questão está mesmo aqui. Trabalhar e trabalhar de forma correcta. Mas sobretudo trabalhar.

Não se aprende sem trabalhar os assuntos, sem se fazer. E isto é tão verdade para a matemática, a jardinagem, a natação, andar de bicicleta, como para a física ou a filosofia, o português ou outra coisa qualquer. É claro que cada matéria terá a sua maneira própria de o fazer.

Imaginemos um curso de natação, para alunos que não sabem nadar, só com aulas teóricas. Alguém acredita que no fim desse curso um aluno atirado para a água nade?

Ouçamos o que diz Polya:

Resolver problemas é uma competência prática como, digamos, nadar. Adquirimos qualquer competência prática por imitação e prática. Ao tentar nadar, imitamos o que outros fazem com as mãos e os pés para manter a cabeça fora de água e, finalmente, aprendemos a nadar, praticando natação. Ao tentar resolver problemas, temos de observar e imitar o que outras pessoas fazem quando resolvem problemas, e por fim, aprendemos a resolver problemas, resolvendo-os.

Aulas de matemática

Em geral só uma pequena minoria de alunos sai duma aula teórica tendo percebido de forma completa a matéria dada. A maioria ficou com uma ideia mais ou menos vaga do que lá se passou. Só com essa ideia não vai longe. O que deve fazer é aproveitar depois as aulas práticas para concretizar melhor e completar a sua compreensão das matérias. Deve pedir ajuda nas aulas práticas, aos colegas ou ao professor, sempre que não entenda qualquer coisa. Já vários alunos me disseram que era nas aulas práticas que aprendiam as matérias. Isto não será completamente verdade, mas dá a noção do sentimento desses alunos.

Porque é que os alunos não gostam de Matemática? (ou Física, Química, Filosofia, Português, etc.). Alguns, poucos, porque não têm aptidões pessoais para isso, e então o melhor é mudar de vida. A imensa maioria é porque não foram correctamente ensinados e orientados a trabalhar nela. Uma das razões do mau ensino da matemática é, na minha opinião, uma desadequada filosofia de trabalho na disciplina, no ensino básico e no secundário, (na matemática e não só) em que o aluno não pratica os conceitos que são dados até que eles sejam assimilados. Uma professora do ensino básico dizia há dias na televisão que os alunos do básico e secundário recebiam as matérias "demasiado mastigadas". Assim aquilo que dá a alegria de aprender, que é a compreensão das coisas, perde-se e deixa em muitos o sentimento de fracasso, de incompetência perante as matérias dadas e o sentimento de inutilidade do tempo gasto. Esta falta de prática, de treino, dos conceitos não favorece a assimilação das matérias e, por isso cria no aluno um sentimento de insegurança muito grande. Sente-se muitas vezes na situação em que não tem a certeza relativamente ao que está a fazer e isso é péssimo para a confiança que deve adquirir. O que dá confiança é lidar com as coisas e perceber o seu funcionamento.

O Professor

Daqui decorre que a principal atitude pedagógica do professor deve ser a de encontrar estratégias de fazer o aluno trabalhar, de preferência na própria aula. A experiência mostra que não é muito realista esperar que a maioria dos alunos trabalhe em casa, pelo menos de forma regular. Sendo assim, e para não falar nas explicações, a alternativa será fazê-los trabalhar nas aulas. Fazer com que eles envolvam a sua massa cinzenta no trabalho que têm para fazer na aula, e eventualmente fora dela... O aluno deve ter em conta que o trabalho que faz é para o tornar o mais autónomo possível em termos de resolução de problemas matemáticos ou outros. O professor deve dar ao aluno o apoio necessário e suficiente para que ele faça progressos na resolução dos problemas que lhe são colocados, o que não é fácil... O progresso é o estímulo para avançar sem medos. Ouçamos o que diz G. Polya a propósito em "Como resolver problemas":

- O estudante deve adquirir tanta experiência de trabalho independente quanta for possível. Mas se for deixado sozinho com um problema, sem qualquer ajuda ou com ajuda insuficiente, é possível que não faça qualquer progresso.

- Uma das tarefas mais importantes do professor é a de ajudar os seus alunos. Esta tarefa não é fácil; exige tempo, prática e bons princípios.

Esta duas citações traçam com muita clareza o programa de trabalho que deve ser posto em prática para melhorar o aproveitamento dos alunos em matemática (talvez também noutras disciplinas). Estabelece o objectivo do trabalho do aluno, e ele deve estar ciente que é essa a sua tarefa enquanto aluno. Estabelece também as tarefa do professor, que são: a evidente, que é apresentar as matérias e a outra, não menos importante, de ajudar os seus alunos. A materialização deste programa dependerá da personalidade do professor, do seu estilo pessoal e da matéria a ensinar. Parece-me, no entanto que é um programa que encerra lógica e bom senso.

Tradicionalmente, a nível universitário, o ensino das disciplinas é, geralmente, feito em aulas teóricas e práticas. Nas aulas teóricas explana-se a matéria correspondente ao programa da disciplina, sequencialmente, por forma a que as matérias tenham um desenvolvimento lógico e coerente. Faz-se também, habitualmente, exemplificação da matéria dada. Nas aulas práticas faz-se a aplicação da teoria à resolução de problemas. Estas aulas têm como objectivo clarificar e cimentar os conceitos apresentados nas teóricas. Isto é torná-los operativos.

Na minha opinião, desta forma de funcionamento, resultam aulas que têm uma produtividade muito baixa em termos do aproveitamento por parte dos alunos. As teóricas são, pela minha experiência, muito pouco produtivas. Bastante menos produtivas que as práticas. Já ouvi muitos alunos dizer que vão às aulas teóricas e que não percebem nada, e que é nas práticas que de facto aprendem. Ao fim de algum tempo deixam de ir às teóricas.

Assim, possivelmente as aulas de matemática deveriam ser aulas teórico-práticas, existir uma maior dialéctica entre as duas componentes, entre teoria e prática. Algo do género: dá-se teoria, os conceitos, as propriedades, as técnicas e as exemplificações, após o que se passa à prática, com uma lista de problemas **para os alunos, que estes devem resolver nas aulas**, (de preferência maior do que os que seria possível resolver numa aula, para fixar uma expectativa) sozinhos ou com a ajuda do professor, (rever G. Polya) e só depois disso regressar à teoria para uma discussão mais profunda, visando e sua integração no corpo geral da matéria. Esta forma de proceder tem a vantagem de, quando se regressa à teoria, o aluno já ter uma ideia mais precisa dos conceitos e portanto apreender melhor a essência das matérias. Esta interacção professor-aluno permite que o professor tenha uma melhor noção do ritmo de aprendizagem e dosear a matéria a dar.

Tanto quanto julgo, pela minha experiência pessoal, quando se dá uma matéria nova, a maioria dos alunos não está em condições de abranger o alcance dos novos conceitos, e tem por conseguinte dificuldade em perceber as suas consequências. É, em geral, nas aulas práticas que, ao manusear o novo conceito, se vai apercebendo das suas implicações e se vai tornando capaz de perceber as respectivas consequências. É por isso que acho que as aulas práticas são fundamentais e devem ser aproveitadas ao máximo. Não é por acaso que os professores das disciplinas técnicas querem ter laboratórios bem apetrechados para as suas aulas. É porque sabem, todos sabemos, que a melhor forma de ensinarem as suas matérias é pôr os alunos a treinar no concreto, a fazer, para verem e sentirem as coisas a acontecer.

Isto sugere que as aulas de matemática, pelo menos as práticas, deveriam funcionar numa lógica semelhante. O docente apresenta a matéria, os resultados, exemplifica e passa a estabelecer as tarefas da aula para os alunos fazerem. Para ter um laboratório de matemática equipado com o mínimo basta ter papel e lápis. É simples.

Trabalhar nas aulas desta forma, especialmente nas práticas tem inúmeras vantagens:

1 – Obriga o aluno a um contacto mais íntimo com a matéria dada, de forma imediata.

2 - Possibilita que cada aluno vá trabalhando ao seu ritmo, o que também é vantajoso.

3 – Diminui o sentimento de culpa do aluno pelo facto de não trabalhar em casa, produzindo o mesmo efeito nos pais que não têm tempo ou conhecimentos para ajudar os filhos em casa: "ele trabalha na escola!".

4 – Mostra ao aluno que as coisas não são tão complicadas como pareciam e que estão ao seu alcance, melhorando a sua auto-estima e funcionando como motivação para o trabalho.

5 – Mesmo que não haja um grande empenhamento, por parte do aluno, para seguir a matéria à medida que vai sendo dada, o facto de ter feito o seu acompanhamento no decurso das aulas práticas facilitará o seu estudo posterior.

6 – Assim, com os alunos a trabalhar e o professor a acompanhar, a tirar dúvidas, a estimular o trabalho, as aulas têm tendência a ser mais tranquilas. Cada aluno estará concentrado na sua tarefa e por isso menos sujeito a distrair-se com questões marginais.

Estas aulas devem decorrer com alguma informalidade que aproximará professor e aluno com consequências positivas no clima de trabalho que deve existir na sala de aula.

Já tive alunos que me disseram que, antes de virem para a universidade, não tinham feito sozinhos um único problema de matemática. Assim não é possível aprender. Nem matemática, nem outra coisa qualquer.

Conclusão

Dos princípios que estão expostos, faço uso há bastante tempo, desde o ano lectivo de 1976/1977, até hoje no departamento de Engenharia Metalúrgica e de Materiais da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto. Creio que com algum sucesso. Embora recebendo alunos com médias relativamente baixas, conseguia aproveitamentos na ordem dos 70 a 80%, nas disciplinas de Análise Matemática dos primeiros anos da licenciatura. Porém nos últimos tempos o panorama piorou muito, as percentagens de aproveitamento passaram para a ordem dos 40 a 50%, e a atitude dos alunos também piorou. O que me levou a tentar perceber a razão do fenómeno. O essencial das minhas conclusões está expresso acima.

É claro que os aspectos que foco não são os únicos com influência no aproveitamento dos alunos. Creio, no entanto que estas ideias poderão dar um grande impulso na melhoria do aproveitamento dos alunos, pois se os alunos não trabalharem as matérias, não me parece que consigam uma aprendizagem efectiva, mesmo que todos os outros se verifiquem.

Espero que estas reflexões sejam úteis a algum dos leitores da Gazeta, e que sirva de estímulo ou provocação para que outros colegas escrevam sobre o assunto, a dar a sua opinião e testemunho da sua experiência.

Queria também lançar um apelo a todos os colegas que ensinam matemática que contribuam com a sua participação para reabilitar a matemática em Portugal, pois ela não merece a má fama que tem. A elevação do nível matemático geral da população será certamente um factor de progresso da sociedade Portuguesa.

Bibliografia

1. George Polya, *Como resolver problemas*, Colecção Ciência Aberta, Gradiva, Lisboa, 2003.
2. Steven G. Krantz, *Como Ensinar Matemática, uma perspectiva pessoal*, Leituras em Matemática, Sociedade Portuguesa de Matemática.
3. Philip Davis, Reuben Hersh, *A experiência Matemática,* Ciência Aberta, Gradiva, Lisboa, 1995.
4. *A Matemática na Sérvia, entrevista a A. Mikovic*, Gazeta de Matemática, vol. 146, Janeiro de 2004, Sociedade Portuguesa de Matemática.

O que vem à rede...

António Machiavelo
Departamento de Matemática Pura da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

A importância de ser ou não primo

Os números primos[1] têm sido objecto de encanto e mistério para sucessivas gerações de seres humanos desde, pelo menos, a Grécia antiga até aos nossos dias. A demonstração de que há uma infinidade de primos, contida na proposição 20 do livro IX dos *Elementos* de Euclides (ver: http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html) é um monumento à elegância e ao engenho humano. Uma variação particularmente concisa dessa demonstração é[2]:

Para todo o número natural $n>1$, *qualquer divisor primo de* $n!+1$ *é maior que* n. *Q.E.D.!*


K. F. Glauss (1777-1855)


J. Hadarmard (1865-1963)


Vallée Poussin (1866-1962)

Um excelente "site" dedicado aos números primos é o *The Prime Pages*, mantido por Chris Caldwell desde 1994 em: http://www.utm.edu/research/primes.

Uma das causas do fascínio por estes números é sem dúvida o serem aparentemente "indomáveis": parecem ocorrer de um modo completamente caótico entre os números naturais, deixando a impressão de não haver nenhum padrão, nenhuma regularidade na forma como se sucedem. Mas apesar dessa aparente desorganização individual, os primos têm alguma ordem quando agrupados e "em média". Neste aspecto, o resultado mais notável é sem dúvida o conjecturado por K. F. Gauss (1777—1855) mas só demonstrado cerca de cem anos depois por C. de la Vallée Poussin (1866—1962) e J. Hadarmard (1865—1963), independentemente um do outro, resultado esse que é conhecido como *O Teorema dos Números Primos*: o número de primos até x é assimptoticamente aproximado por $x/\log(x)$. Ver: http://www.utm.edu/research/primes/howmany.shtml.

Uma família de números primos que tem merecido, há já vários séculos, uma atenção especial é a dos números conhecidos pelo nome de *primos de Mersenne*: os números primos da forma[3] $M_p=2^p-1$, por causa da sua relação com os números perfeitos[4]. Para estes números há um teste de primalidade particularmente eficiente, o teste de Lucas-Lehmer (ver http://www.utm.edu/research/primes/prove/prove3_2.html), que faz com que os maiores primos conhecidos sejam desta forma. Neste momento, e desde 15 de Maio de 2004, o maior primo conhecido é $M_{24\ 036\ 583}$, um número com 7 235 733 algarismos! Este é mais um recorde do projecto *GIMPS*, *the **G**reat **I**nternet **M**ersenne **P**rime **S**earch*, no qual o leitor poderá colaborar, como está explicado em: http://www.mersenne.org/prime.htm.

Como é que se sabe que tem 7 235 733 dígitos? Certamente que ninguém os contou um a um! O que se faz é usar a seguinte observação muito simples: como 10^{n-1} é o primeiro número com n dígitos, resulta que N tem n dígitos se e só se $10^{n-1} \leq N < 10^n$, o que é equivalente a $n-1 \leq \log_{10}(N) < n$. Daqui se conclui que: o número de dígitos de N é igual a $\lfloor \log_{10}(N) \rfloor + 1$, onde $\lfloor x \rfloor$ denota a *parte inteira* de x, isto é o maior inteiro que não ultrapassa x. O leitor poderá agora facilmente verificar, numa simples calculadora, que $M_{24\,036\,583}$ tem de facto o número de algarismos referido.

Como se pode deduzir da consulta das páginas acima mencionadas, são dispendidos grandes recursos computacionais e humanos na procura de primos gigantes. Porquê? Algumas respostas são dadas em
http://www.utm.edu/research/primes/notes/faq/why.html.

No fundo é apenas mais uma instância daquilo que nos define como humanos: a curiosidade de conhecer, de conhecer os limites da nossa espécie, e de tentar transcender esses mesmos limites. As vantagens evolutivas desta atitude deviam ser óbvias!

Nos últimos 30 anos o problema de distinguir números primos de números compostos, e o de factorizar estes últimos, ganhou toda uma outra importância devido ao advento da criptografia de chave pública. De tal modo que há quem ofereça prémios que vão desde US $20 000 até US $200 000 pela factorização de certos números! Ver:
http://www.rsasecurity.com/rsalabs/node.asp?id=2093.

Há várias conjecturas famosas sobre números primos (ver http://www.utm.edu/research/primes/notes/conjectures), das quais se destacam:

- a *conjectura de Goldbach*:
http://www.informatik.uni-giessen.de/staff/richstein/ca/Goldbach.html e
http://www.ieeta.pt/~tos/goldbach.html.
- a *Hipótese de Riemann*, que é agora um dos "problemas do milénio":
http://www.claymath.org/millennium e
http://www.utm.edu/research/primes/notes/rh.html.

Recentemente resolveram-se duas velhas questões sobre números primos: foi encontrado um algoritmo de primalidade que é "polinomial" (o tempo que o algoritmo demora é majorado por uma função polinomial no tamanho do "input"), em Agosto de 2002. Ver:
http://www.cse.iitk.ac.in/news/primality.html. e
http://www.ams.org/notices/200305/fea-bornemann.pdf.

Em Abril deste ano, Ben Green e Terence Tao, terão provado a existência de progressões aritméticas arbitrariamente longas de números primos. O respectivo trabalho, ainda não publicado e em fase de revisão, pode ser consultado em:
http://front.math.ucdavis.edu/math.NT/0404188.

Estes são dois avanços espectaculares que colocam, desde já, este início do século XXI como um momento importante na já longa história da tentativa do *Homo Sapiens* decifrar os recônditos mistérios dos números primos!

Os primeiros 100 primos

2, 3, 5, 7,	11, 13, 17,	19, 23, 29,	31, 37, 41,
43, 47, 53,	59, 61, 67,	71, 73, 79,	83, 89, 97,
101, 103,	107, 109,	113, 127,	131, 137,
139, 149,	151, 157,	163, 167,	173, 179,
181, 191,	193, 197,	199, 211,	223, 227,
229, 233,	239, 241,	251, 257,	263, 269,
271, 277,	281, 283,	293, 307,	311, 313,
317, 331,	337, 347,	349, 353,	359, 367,
373, 379,	383, 389,	397, 401,	409, 419,
421, 431,	433, 439,	443, 449,	457, 461,
463, 467,	479, 487,	491, 499,	503, 509,
521, 523,	541, ...		

[1] Números naturais, maiores que a unidade, que não podem ser escritos como produto de números menores.

[2] Para benefício dos leitores que nunca viram este argumento, observe-se que se usam aqui dois factos simples sobre os números naturais: 1) Todo o número natural maior que um tem algum divisor primo, pois ou já é primo ou então tem um divisor menor que ele e ainda maior que um, que por sua vez ou é primo ou ...etc..., e como só há um número finito de números menores que um dado número, este "etc" tem de terminar com um divisor primo do número inicialmente dado; 2) Se o número natural m for múltiplo de um número natural maior que um, então $m+1$ não o é. Portanto, dado um qualquer número natural $n>1$, por (1) existe um primo que divide $n!+1$, e por (2) este primo não pode ser nenhum dos números 2, 3, ..., n. Isto mostra que dado um número qualquer n, há sempre um primo que é maior que n, de onde resulta que o conjunto dos números primos é infinito.

[3] Não é difícil ver que 2^n-1 só pode ser primo se n o for (mas não o recíproco!).

[4] Um número diz-se *perfeito* se igualar a soma dos seus divisores, incluindo 1 mas excluindo o próprio; os primeiros quatro números perfeitos são 6, 28, 496 e 8128. Os *Elementos* de Euclides contêm a observação que se p for tal que 2^p-1 é um número primo, então o número $2^{p-1}(2^p-1)$ é perfeito. Cerca de 2000 anos depois dos *Elementos* terem sido escritos, Euler demonstrou que estes são os únicos números perfeitos pares. A existência ou não de um número perfeito ímpar é o problema de Matemática mais antigo ainda em aberto.

Fernando de Almeida Loureiro e Vasconcelos (1874-1944) - coronel, matemático e historiador

A. J. Franco de Oliveira
Centro de Estudos de História e Filosofia das Ciências da Universidade de Évora

1. Apresentação

Tomei conhecimento da existência e obra do Prof. Fernando de Vasconcelos há uma dezena de anos atrás, através da nota de rodapé inserta na página 8 da *História das Matemáticas em Portugal* de Francisco Gomes Teixeira (Academia das Ciências de Lisboa, 1934), onde se pode ler:

«Para o estudo desenvolvido da história das Matemáticas entre os gregos, hindus e árabes, não é felizmente necessário em Portugal recorrer-se a livros estrangeiros, porque temos para isso em língua portuguesa um manual excelente, intitulado: *História das Matemáticas na Antiguidade*, de que é autor o Sr. Fernando de Vasconcelos, professor no Instituto Superior de Agronomia».

Requisitei este último livro na Biblioteca da Faculdade de Ciências de Lisboa, na Rua da Escola Politécnica, e logo compreendi a justeza das observações de Gomes Teixeira. Aí nasceu, então, o desejo secreto de ver o livro reeditado, mas mal podia imaginar na altura a extensão do tempo gasto na sua preparação. Mas talvez não tivesse sido ainda possível consumar a sua realização sem o concurso feliz de algumas ajudas logísticas preciosas, nomeadamente, dos estudantes do Seminário de História e Filosofia da Matemática que regi no ano lectivo de 1997/98, na Universidade Lusófona de Humanidades e Tecnologias, os quais abraçaram com compreensão e entusiasmo a composição em processador de texto de parte do livro. O presente texto é uma adaptação do meu Prefácio e da Nota Biográfica que acrescentei na segunda edição, cuja publicação se prevê para breve.

Desde logo despertou a minha curiosidade o facto de colegas de ofício e publicações diversas da época (digamos, em traços largos, na segunda metade do século XX), na área da História da Matemática, raramente ou nunca se referirem a Fernando de Vasconcelos como historiador, ou ao seu livro, facto esse que se tornava mais intrigante à medida que ia percebendo quão extraordinário e único era o tesouro que tinha entre as mãos. Tendo sido escrito no rescaldo da I Grande Guerra, durante a agonia da I República, e publicado em data próxima de uma mudança de regime, estaria encontrada parte, mas somente uma parte, das razões para ter sido, aparentemente, votado ao esquecimento. Outras razões haverá para investigar e descobrir, mas não posso deixar de lamentar, com algum desencanto, que muitas gerações de estudantes e professores, tão carenciados de cultura matemática e de motivos para o seu gozo e usufruto, não tenham podido beneficiar, nas últimas décadas, dos conhecimentos e elegância de exposição de tão singular obra, simultaneamente erudita e acessível.

As referências do Professor Francisco Gomes Teixeira a Fernando de Vasconcelos não se esgotam na nota acima transcrita. Existe uma referência anterior, bastante mais importante para a historiografia das matemáticas em Portugal, no "Elogio Histórico de Daniel Augusto da Silva", lido na Academia das Ciências de Lisboa em sessão pública de 2 de Junho de 1916 e publicado no volume *Panegíricos e Conferências*, Coimbra, 1925, pp. 155–193, de onde se transcrevem alguns parágrafos elucidativos:

«Nada há mais prejudicial para a ciência de um povo do que o seu isolamento no meio da ciência dos outros povos. (...) Daniel da Silva foi a maior vítima deste isolamento, e algumas palavras de uma carta que me escreveu em 1877 são a expressão da sua grande mágoa por não o ter evitado.»


Fernando de Vasconcelos

Gomes Teixeira transcreve em seguida parte da carta de Daniel da Silva, da qual reproduzimos apenas o parágrafo que segue:

«A minha Memória [Memória sobre a rotação das forças em torno dos pontos de aplicação, apresentada à Academia das Ciências de Lisboa em 1850 e publicada em 1851, 2.ª série, tomo III], que tem muitíssimas coisas, além do que lembrou a Möbius [Statica, 1837], inclusivamente a correcção de um erro dele, com cuja rectificação muito se gloria Darboux, jaz ignorada, há quase vinte e seis anos, nas bibliotecas de quase todas as Academias do mundo. O que aproveita escrever em Português!».

Prossegue Gomes Teixeira, na pág. 164 e seguinte:

«Tomei por isso a liberdade de lhe aconselhar que escrevesse um resumo em francês da parte essencial da sua Memória. Eu procuraria obter a sua publicação no mesmo lugar em que apareceu o trabalho de Darboux (...). Infelizmente, poucos meses depois, a morte, roubando-o quase inesperadamente à ciência, veio destruir este projecto.

«Pensei então em redigir eu mesmo aquele resumo, mas, absorvido por outros trabalhos, fui adiando indefinidamente o cumprimento deste dever.

«Passados alguns anos, fui visitado no Porto por um filho de Daniel da Silva, o qual acabava de completar com distinção o curso da Escola Politécnica de Lisboa. Dizendo-me que tencionava concorrer a um lugar de professor desta Escola, aconselhei-o a tomar para assunto da sua Dissertação o ramo da Mecânica de que seu Pai fora o principal fundador. Indiquei-lhe o programa: expor a Astática sob forma sistemática, acompanhando a exposição das notas históricas necessárias para se ver os papéis que Möbius, Daniel e Darboux representaram na sua fundação e organização, e de indicações sobre os métodos que os três geómetras seguiram para obter os teoremas que enunciaram.

«De novo porém a sorte nos foi adversa. O jovem candidato morreu pouco tempo depois.

«O programa que acabo de indicar, foi porém realizado mais tarde pelo Sr. Fernando de Vasconcelos, assistente na Universidade de Lisboa, numa memória escrita em francês, que foi publicada nos *Annaes da Academia Polytechnica do Porto,* revista a que tenho procurado dar uma feição internacional, a fim de combater, quanto possa, o nefasto isolamento da ciência portuguesa.»

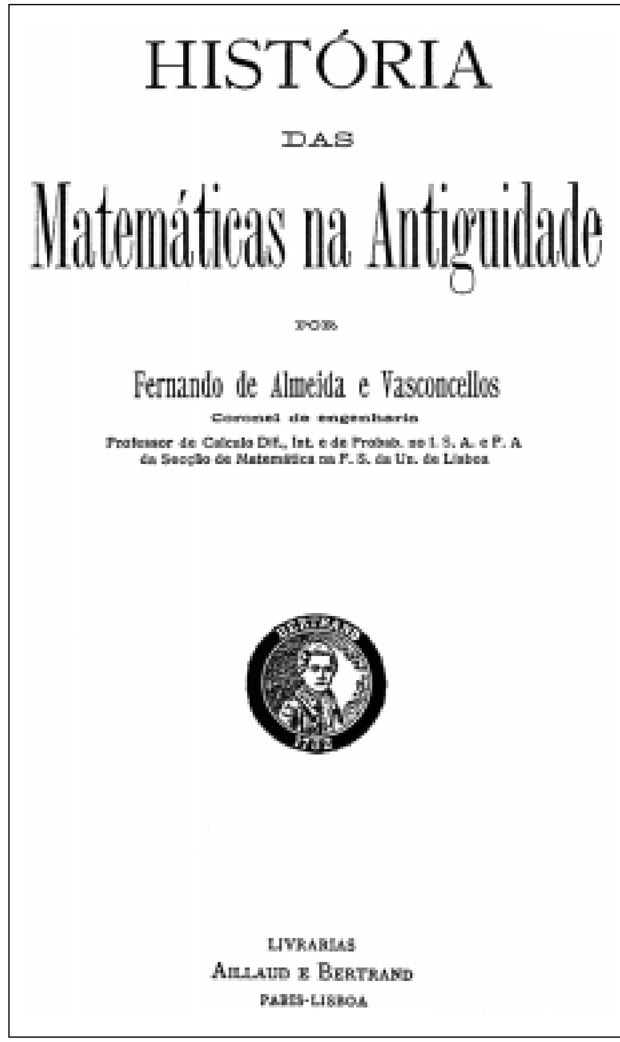
Nestas breves linhas de memória sofrida perpassam os dramas do isolamento cultural, da injustiça do esquecimento e da brevidade da vida, mas, também, a esperança renascida que traz cada nova geração, recuperando e desenvolvendo as heranças culturais, construindo novos monumentos sobre os legados dos nossos antepassados. Em escala maior, tem sido essa, em boa parte, a história cultural das civilizações, na qual as matemáticas e os seus protagonistas, grandes e pequenos, ocupam papel especialmente relevante, e foi sobre isso que escreveu Fernando de Vasconcelos. Volvidos mais de cem anos sobre aqueles dramáticos episódios da vida e obra dos nossos conterrâneos, os matemáticos portugueses já não podem invocar as mesmas razões para recear a injustiça e o ostracismo motivados pelo isolamento internacional e a dificuldade da língua. Mas as motivações que levaram Fernando de Vasconcelos a redigir a sua

História das Matemáticas na Antiguidade que, no seu pensamento

«se dirige ao grande público e assim aspira a ser compreendido por todos»,

permanecem mais actuais e válidas do que nunca. Folheando o livro, compreende-se a razão por que se tornou imperativa, a meus olhos, a sua reedição. Além de algumas opções editoriais explicadas no local próprio, juntei uma breve bibliografia mais actual, para o leitor interessado em conhecer a história das matemáticas nos períodos modernos não contemplados por Fernando de Vasconcelos e, bem assim, actualizar alguns conhecimentos sobre a matemática dos antigos, nomeadamente, sobre a matemática dos babilónios — por exemplo, a construção dos triplos pitagóricos na placa de argila em escrita cuneiforme Plimpton 322 (c. 1700 a. C.), decifrada e analisada por Neugebauer e Sachs em 1945. No que respeita às matemáticas em Portugal, o leitor da primeira edição estranhará a omissão de referências ao século XVIII e, muito particularmente, a Anastácio da Cunha.

Em todo o caso, nos manuais e compilações mais recentes encontram-se mais tópicos, e desenvolvimentos mais profundos do que os abordados pelo nosso historiador, mas o leitor, seja qual for a sua formação e grau de iniciação nas matemáticas, terá dificuldade em encontrar uma exposição de qualidade literária comparável, onde a cultura filosófica, religiosa, social e política se integre tão harmoniosamente com a cultura científica dos povos e civilizações, e onde se evidencie tão claramente a visão profundamente humanista do seu autor. A *História das Matemáticas na Antiguidade* de Fernando de Vasconcelos é uma viagem de reconciliação com as origens económicas, sociais e culturais das ciências, no mais vasto sentido, e as aspirações mais elevadas dos povos à compreensão do mundo como ele é e à construção de um mundo melhor para todos.


HISTÓRIA
DAS
Matemáticas na Antiguidade
POR
Fernando de Almeida e Vasconcellos
Coronel de engenharia
Professor de Calculo Dif., Int. e de Probab. no I. S. A. e F. A
da Secção de Matemática na F. S. da Un. de Lisboa

LIVRARIAS
AILLAUD E BERTRAND
PARIS-LISBOA

Capa da 1ª edição (1925)

2. Breve nota biográfica

Fernando de Vasconcelos nasceu a 26 de Março de 1874 em Chaves, freguesia de Sta. Maria Maior, filho de Fernando de Almeida e Vasconcelos, Capitão de Infantaria. Faleceu em Lisboa a 1 de Novembro de 1944. Frequentou o Colégio Militar com o n.º 56, em 1884–89 (2.º–6.º anos), sempre com excelentes classificações (especialmente a Português, Francês, Latim, Matemática, História, Filosofia e Geografia), tendo recebido em todos os anos lectivos diversos diplomas, prémios (primeiros e segundos) e medalhas de mérito em várias disciplinas, exceptuando as de Desenho.

Ingressou no Curso de Engenharia Militar da Escola do Exército em 1989, tendo feito os «preparatórios» na Escola Politécnica de Lisboa. Primeiros prémios nas cadeiras de Cálculo Infinitesimal, Mecânica Racional, Química Mineral e Análise Química. Proposto pelos professores respectivos (Mota Pegado e Dr. Patrocínio da Costa) para prémios nas cadeiras de Geometria Descritiva e Astronomia. Foi o primeiro classificado nos 2.º e 3.º anos do curso de Engenharia da Escola do Exército. Fernando de Vasconcelos iniciou a carreira académica como Repetidor das cadeiras de Matemática (1.ª Cadeira, Álgebra Superior, Geometria Analítica e Trigonometria Esférica) da Escola Politécnica (Nomeado em Novembro de 1897), passando a 1.º Assistente da Secção de Matemática, quando da transformação daquela instituição na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa (1911). Foi professor interino (lente) e depois professor catedrático no Instituto Superior de Agronomia, onde regeu a Cadeira de Cálculo Diferencial e Integral e das Probabilidades e o Curso de Construções Rurais — 2.ª parte do Curso de Desenho de Construções. Foi exonerado de professor catedrático, a seu pedido, a 15 de Julho de 1937.

Além da actividade académica, são igualmente importantes na vida de Fernando de Vasconcelos as carreiras militar e política.

Promovido a Alferes de Engenharia em 1895, desempenhou as funções de Oficial às Ordens no Gabinete do Ministro da Guerra, General Francisco Maria da Cunha, em 1897. Promovido a Coronel de Engenharia em 1926, passou à reserva em 1936.

Dos diversos cargos públicos que exerceu, merecem maior destaque os seguintes: 1.º secretário do Presidente do Conselho José Luciano de Castro (1898–1899); Secretário do Gabinete (oficial às ordens) do Ministro da Guerra, General Francisco Maria da Cunha (1897); Deputado da Nação pelo círculo de Beja (1905 e 1908–1910); Engenheiro consultor do Ministério da Agricultura; Engenheiro Inspector Superior de Obras Públicas (1937). Foi ainda Delegado do Instituto Superior de Agronomia junto do Comissariado-Geral do Governo na Exposição Internacional do Rio de Janeiro (1926) e nomeado para fazer parte da Comissão Portuguesa na Organização Científica do Trabalho Agrícola em França, Inglaterra, Bélgica e Holanda (1930).

Fernando de Vasconcelos teve também uma acção importante na fundação e promoção de sociedades e associações científicas em Portugal, nas primeiras décadas do séc. XX: fundou a Liga Económica Nacional (1915–1918), pertenceu à Associação dos Engenheiros Civis Portugueses, à Associação Industrial (presidente da Comissão Revisora de Contas), à Associação Central de Agricultura Portuguesa, à Sociedade de Geografia e ao Grupo Português de História das Ciências, Secção de Lisboa, de que foi fundador e primeiro presidente (1932–1934). Foi eleito membro efectivo da Academia Internacional de História das Ciências e do Comité International d'Histoire des Sciences (1934) e Presidente da Comissão Internacional de Prioridades Científicas (1934). Tomou parte no Congresso de Bilbao da Asociación Española para el Progreso de las Ciencias (1919), no Congresso do Porto da Associação Portuguesa para o Progresso das Ciências (1921), e no Congresso de Salamanca da Asociación Española para el Progreso de las Ciencias (1923). Representou o Governo Português e a Universidade de Lisboa no Congresso Internacional de Matemáticas de Toronto (1924) e foi delegado do Governo Português ao 13.º Congresso Internacional de Agricultura em Roma (1927) e relator, por parte de Portugal, do tema sobre «Organização científica do Trabalho Agrícola»; foi Presidente da Comissão Executiva do III Congresso Internacional de História das Ciências (Porto, Coimbra e Lisboa, 1934) e, finalmente, foi sócio correspondente do Circolo Matemático de Palermo e do Instituto de Coimbra, tendo ainda sido agraciado com a Ordem do Mérito Militar de Espanha e a Ordem de Avis.

3. Trabalhos publicados (Artigos, Monografias, Conferências e Lições)

[1] *Análise espectral*, Dissertação a prémio, M. Gomes Editor, Lisboa, 1892.

[2] "Organização administrativa e analfabetismo" (Relatório e Projecto de Lei apresentado à Câmara dos Deputados), 1910.

[3] "Sur la rotation des forces autour de leurs points d'application et l'équilibre astatique", *Annaes da Academia Polytechnica do Porto*, tomo VII, n.os 1, 2, 3, 1912, pp. 5–45, 65–83, 129–159. [Trad. fr. de parte de [4]]

[4] *Sobre a rotação das forças à roda dos pontos de aplicação* e *o Equilíbrio Astático*, (Memória mandada publicar pela Academia das Ciências de Lisboa), Coimbra, 1912.

[5] "Alimentação pública. A intensificação das culturas cerealíferas em Portugal", (Conferência no Ateneu Comercial de Lisboa), *Atlântida* e *Boletim da Associação Central de Agricultura Portuguesa*, 1917.

[6] "A Rotina e o trabalho cientificamente organizado. O Taylorismo", *Atlântida* e *Revista de Obras Públicas*, 1918.

[7] "Os progressos da indústria agrícola no Brasil", Conferência na A.C.A.P., por iniciativa do Instituto Superior de Agronomia — Extensão Universitária, 1923.

[8] "A numeração fraccionada no Papiro de Rhind e em Herão de Alexandria", *Associação Portuguesa para o Progresso das Ciências, Congresso do Porto (1921)*, Coimbra, 1922. [Notícia n'*O Comércio do Porto* de 21-05-1924.]

[9] "A origem grega do valor e dos números fundamentais das tábuas de senos das Siddhântas", *Asociación Española para el Progreso de las Ciencias, Congresso de Salamanca, 1924*.

[10] "As matemáticas superiores no Instituto Superior de Agronomia", *Anais do Instituto Superior de Agronomia*, Vol. II, 1925.

[11] "A Literatura matemática na Primeira Escola de Alexandria", Conferência na Academia Brasileira de Letras, Rio de Janeiro, 1925.

[12] "A Escola Ariana de matemáticas na Índia. A Tábua de senos e a Álgebra dos índios", Conferência na Academia de Ciências, Rio de Janeiro, 1925.

[13] "Engenheiros que foram matemáticos notáveis no período greco-alexandrino", Conferência no Clube de Engenharia, Rio de Janeiro, 1925.

[14] *História das Matemáticas na Antiguidade*, Aillaud & Bertrand, 1925.

[15] "L'Organisation scientifique du travail agricole (Portugal)", XIIIème Congrès International d'Agriculture, Roma, 1927.

[16] "Organização científica do trabalho agrícola", Ministério da Agricultura, C.P.O.C.T.A., 1931.

[17] "Daniel Augusto da Silva et la constitution de l'astatique. Une priorité des sciences mathématiques portugaises", *Archeion*, Vol. XVI, Paris-Roma, 1934.

[18] *Elementos de Cálculo Infinitesimal e das Probabilidades*, (Lições do Prof. Fernando de Vasconcelos no I.S.A., redigidas por Mário Santos, 2 volumes), Of. Gráf. do I.S.C.E.F., Lisboa, 1935.

Tem ainda colaboração dispersa na imprensa periódica: «Correio da Noite», «Correio da Tarde», «Época», «Luta» e «Diário de Notícias».

4. Fontes e agradecimentos

Fontes: A Universidade Técnica de Lisboa e os seus Mestres, Notas Biobibliográficas, U.T.L., Lisboa, 1956; *Grande Enciclopédia Portuguesa e Brasileira; Comem. do 1.º Centenário da Escola Politécnica de Lisboa 1837–1937*, Lisboa, 1937.

Agradecimentos: Secretaria do Instituto Superior de Agronomia; Biblioteca do Museu de Ciência da FCUL; D. Umbelina Nascimento, Directora dos S. Doc. e Publ., Reitoria da UTL; Dr. António M. Carvalho Vicente, Capitão do Colégio Militar; Dr. Manuel Brito Ferrari, Departamento de Matemática Pura da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto.

Inquérito: Como fixar investigadores em Portugal

O Presidente da República declarou na cerimónia de inauguração da Unidade de Sólidos, Líquidos e Pastosos da Labesfal (Julho, Campo de Besteiros) que "temos de ter uma acrescida capacidade científica e tecnológica. É absolutamente decisivo que se criem condições para a fixação de investigadores" e ainda que "há uma enorme falta de cientistas em todo o mundo e começa a haver em toda a Europa". Referindo-se a Portugal, disse que "hoje há condições melhores do que há vinte ou dez anos para fixar pessoas e fazer investigação".

A este respeito, a Gazeta de Matemática foi ouvir a opinião de alguns professores e investigadores em Portugal, a quem colocou as seguintes questões.

Questão 1: *Acha importante a fixação de investigadores e acha que hoje temos mais condições do que há 20 ou 10 anos, em especial na Matemática?*
Questão 2: *Como é que se explica que muitos imigrantes, sobretudo do leste, com habilitações científicas elevadas não sejam aproveitados de acordo com elas, sendo-lhes, pelo contrário, oferecidos empregos como trolhas ou empregadas domésticas? A situação de muitos jovens licenciados portugueses é idêntica, não arranjam emprego que tenha a ver com as suas habilitações!*
Questão 3: *O Ministério da Ciência já se manifestou interessado em fixar investigadores, oferecendo condições especiais a quem já tenha mais de 100 artigos (vulgo, papers). Qual é a sua opinião, em particular no que se refere ao critério dos 100 artigos?*
Questão 4: *Outros assuntos na berra: a declaração de Bolonha e o conceito de Universidade Politécnica. Em poucas palavras que pensa de Bolonha?*
Questão 5: *E das Universidades Politécnicas?*

As respostas obtidas são apresentadas a seguir, por ordem alfabética dos nomes dos seus autores.

Carlos Braumann
Universidade de Évora

Questão 1: Obviamente que é importante fixar os investigadores mais capazes se queremos o desenvolvimento da ciência e o progresso da sociedade. Infelizmente, a capacidade de fixar jovens investigadores em Matemática está muito erodida comparativamente com o que sucedia há uma ou duas décadas. A principal oferta de emprego era a carreira académica, onde havia carência de docentes. Esses lugares foram sendo ocupados e a retracção do número de estudantes não permite a abertura de novos lugares. A investigação aplicada no sector privado, embora indispensável ao nosso desenvolvimento, é ainda muito incipiente em Portugal. Há que incentivar o seu desenvolvimento e construir alternativas se não queremos desperdiçar os novos valores. Os "post-docs" são uma solução útil, mas temporária.
Questão 2: No caso dos imigrantes, é triste ver que as suas capacidades estão a ser tão mal aproveitadas, quando porventura fazem muita falta no seu país de origem, onde, porém, são muito mal remuneradas. Claro que poderíamos nós aproveitar essas capacidades. E não são obstáculos linguísticos e outros, facilmente ultrapassáveis, que o impedem, como provam vários casos de sucesso (como sucede, por exemplo, no meu Departamento). A maior dificuldade é a que resulta da minha resposta anterior. A situação dos jovens licenciados que não arranjam colocação compatível é um problema do desenvolvimento e do

alargamento do acesso ao ensino superior, sem que estivesse disponível oferta de formação adequada para técnicos intermédios. Nunca é totalmente resolúvel mas o caminho passa por essa oferta e por uma modernização da capacidade produtiva do País que produza empregos exigindo elevada qualificação académica. Também o desastre da Matemática no ensino básico e secundário, de que a sociedade e os seus políticos são responsáveis, levou a juventude a fugir das áreas tecnológicas para áreas onde há pouca oferta de emprego.

Questão 3: Claro que a fixação de mais investigadores de renome iria ter um efeito altamente positivo no desenvolvimento científico, mas seria importante também dar boas condições de trabalho aos investigadores de renome ou com elevado potencial que já cá estão. A não ser que a política seja forçá-los a sair para países onde disponham dessas condições para depois poderem voltar ao abrigo desse novo programa. Quanto ao critério dos 100 artigos, pergunto quantos investigadores de renome em Matemática satisfazem esse critério? Ou será que vamos ter um programa de fixação atractivo para um conjunto vazio (ou quase)? E será esse programa suficientemente atractivo? Quantos investigadores de topo quererão trocar uma boa posição por um contrato temporário, como parece ser o que o programa oferece?

Questão 4: Em poucas palavras, sou a favor. Sou a favor da comunicabilidade dos programas de estudo, sou a favor de se reforçar o paradigma da aprendizagem num sistema que tem estado demasiado centrado no ensino. Já concordo menos com algumas leituras abusivas do processo, como a pseudo-uniformização que se propugna. Será muito difícil atingir com 3 anos no primeiro ciclo um nível final à saída equivalente ao de outros países que não deixaram apodrecer (pelo menos tanto como nós) o ensino básico e secundário (alguns deles até têm 13 e não 12 anos de escolaridade pré-universitária). Na maioria dos casos, uma adequada inserção no mercado de trabalho vai exigir mesmo um segundo ciclo, que ficará reservado aos financeiramente dotados. Com efeito, o Estado só parece querer subsidiar, com raras excepções, a formação de um primeiro ciclo reduzido a 3 anos.

Questão 5: O País já tem Universidades suficientes para a sua dimensão. Criar mais Universidades seria absurdo. Justifica-se antes melhorar as que existem e criar ligações entre elas e os Institutos Politécnicos. E melhorar também o ensino politécnico, que deve assumir-se como tal (o que muito raramente fez), colmatando assim uma grave lacuna do nosso sistema de ensino. Tantos recursos se esbanjaram com políticas que só serviram para a degradação dos ensinos básico e secundário. Não façamos o mesmo no ensino superior para satisfazer os "lóbis" políticos e autárquicos que querem uma Universidade em cada esquina. Não esbanjemos os poucos recursos disponíveis para construir um sistema caracterizado pela ausência de um verdadeiro ensino politécnico e pela proliferação monstruosa de instituições de ensino pseudo-universitário de qualidade quase uniformemente medíocre.

Gabriela Schütz
Escola Superior de Tecnologia de Faro
Universidade do Algarve

Questão 1: Acho importante e penso que a reimplementação da carreira de investigador com condições adequadas e estabilidade facilitaria a fixação de investigadores. Suponho que actualmente existem mais condições a nível do acesso à informação e do maior número de instituições onde se produz alguma investigação.

Questão 2: Esta situação reflecte uma realidade actual e comum a outros países, que se deve principalmente às opções estratégicas dos decisores políticos e económicos.

Questão 3: Para além de quantidade não ser sinónimo de qualidade, as "condições especiais" são bastante irrealistas e seriam aplicáveis apenas a individualidades com carreira estável e consolidada, o que não se coaduna com uma perspectiva de desenvolvimento e rentabilização do investimento já realizado na formação (Praxis, Prodep, etc.).

Questão 4: Embora ainda seja prematuro comentar a aplicação da declaração de Bolonha a Portugal, parece-me que a convergência do Ensino Superior no âmbito Europeu será sempre vantajosa.

Questão 5: O investimento em formação tem proporcionado o surgimento de uma massa crítica consistente no ensino politécnico, pelo que julgo estar em curso a consolidação da afirmação deste tipo de Instituições.

Luís Merca
Instituto Politécnico de Tomar

Questão 1: Acho que é fundamental a capacidade de se fixar investigadores em Portugal não só na área da Matemática mas também nas outras áreas do saber. Duvido é que, com o estado actual das coisas, se consiga fazê-lo. Em relação a termos mais condições, para os investigadores, do que há 20 ou 10 anos atrás, é uma realidade. O desenvolvimento que houve nos últimos anos permite, hoje em dia, uma série de facilidades para os investigadores como por exemplo a evolução dos computadores. No entanto acho que falta da parte dos nossos governantes um apoio efectivo quer para a investigação quer para o ensino da Matemática. Aliás, este é um problema que vem existindo ao longo de muitos anos e tem atravessado vários governos.

Questão 2: Os nossos empresários têm de começar a ter outra mentalidade para poderem dar respostas à concorrência da globalização. Teremos de apostar na mão-de-obra qualificada independentemente das pessoas serem imigrantes ou não. No caso dos imigrantes com habilitações científicas elevadas, Portugal só tem a ganhar visto que nem foi necessário investimento para a sua formação. Por outro lado, deveríamos valorizar a formação profissional ao nível do secundário diminuindo desta forma o abandono escolar e preparando muitos jovens para o mercado de trabalho. A não existência de uma política de educação para o nosso país é também um factor que contribui para que haja muitos jovens licenciados portugueses sem emprego. Veja-se o exemplo dos professores. Já se sabia que a população estudantil em Portugal iria diminuir e no entanto as escolas superiores de educação continuaram a formar cada vez mais professores (que forçosamente vão para o desemprego).

Questão 3: Não concordo com o critério. Em primeiro lugar gostaria de perguntar porquê 100 artigos e não outro valor? Depois não deve haver muitos investigadores que verifiquem esse critério e estejam disponíveis para vir para Portugal. Acho que não passa de uma medida política sem consequência prática. Se o objectivo desta medida era realmente melhorar a investigação feita em Portugal, tenho a certeza que se se canalizasse esse esforço, por exemplo, para jovens investigadores, teríamos melhores resultados.

Questão 4: A ideia é interessante no entanto tem um grande risco que é o de nivelar o ensino superior por baixo. Não nos podemos esquecer que o MCIES já afirmou que à partida só estará garantido o financiamento para o primeiro ciclo (bacharelato).

Questão 5: Acho que alterar o nome de Institutos Politécnicos para Universidades Politécnicas não vai resolver nada. Esta alteração não vai resolver o problemas do ensino superior politécnico ser visto, por alguns sectores da nossa sociedade, como um ensino de segunda. Seria muito mais importante que houvesse uma reorganização de todo o ensino superior em Portugal e, para os Institutos que tivessem condições ser permitido atribuir o grau de Mestre ou Doutor.

Maria da Graça Marques
Universidade do Algarve

Questão 1: Parece-me que é claro que é importante a presença de investigadores e também me parece claro que hoje há mais condições – grupos de investigação organizados, maior acesso a informação, etc.

Questão 2: Em muitos casos há um problema administrativo grave de reconhecimento das habilitações científicas, pois tudo passa pela obtenção de equivalência a graus adquiridos nos países de origem e esses processos são difíceis, caros e morosos. É difícil, senão impossível, obter um emprego de índole científica sem um diploma reconhecido em Portugal. Quanto aos jovens licenciados portugueses parece-me haver um problema muito mais geral no planeamento estratégico das necessidades do país em termos da formação dos seus licenciados.

Questão 3: Não me parece que qualidade = número de papers....

Questão 4: Tem-se falado muito e debatido pouco sobre bases concretas. Prefiro não me pronunciar até ver no que vai dar a aplicação em Portugal.

Questão 5: O que é isso? Será só mudar o nome dos Politécnicos, sem mudar mais nada (para esbater os complexos de algumas pessoas)? Será que é criar algo de verdadeiramente novo, usando eventualmente algo que já existe? Será que é fazer universidades de primeira e segunda, como já aconteceu noutros sítios?

Livros contados

Paulo Ventura Araújo

Matemática e Ensino, de Elon Lages Lima

(colecção Temas de Matemática, SPM/Gradiva, 2004)
recensão por Paulo Ventura Araújo

Elon Lages Lima é autor dos melhores livros didácticos de matemática que, nos últimos quarenta anos, se escreveram em língua portuguesa. Os seus livros nas colecções *Projecto Euclides* e *Matemática Universitária,* sucessivamente reeditados pelo IMPA (Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, Brasil), não só contribuíram para a aprendizagem de gerações de estudantes, como lhes transmitiram o gosto pela exposição elegante, lúcida e ordenada de temas de matemática. Vale a pena nomear alguns desses livros: na colecção *Projeto Euclides,* o *Curso de Análise* em dois volumes (o primeiro já com onze edições) e o texto sobre *Espaços Métricos;* e, na colecção Matemática Universitária, o manual de *Álgebra Linear,* onde, pela exposição primorosa e perspectiva original, Elon consegue dar vida nova a um assunto que a profusão de livros de texto banalizou até à irrelevância. Tanto *Espaços Métricos* como *Álgebra Linear* ganharam o Prémio Jabuti atribuído pela Câmara Brasileira do Livro ao melhor livro de ciência publicado nesse país no respectivo ano (1978 e 1996).

Como Portugal não é o Brasil e, apesar da retórica oficial, os nossos laços culturais e científicos são frágeis, não terão sido assim tantos os estudantes portugueses que aprenderam matemática lendo Elon Lages Lima. Não foram muitos, e hoje ainda serão menos, porque os livros do IMPA quase não se vêem nas nossas livrarias. E é pena, porque esses manuais efémeros que enchem as prateleiras não são como os de Elon: alguns serão honestos, até cientificamente irrepreensíveis; mas quem os escreve não é, como Elon é tão obviamente, um escritor.

Que diferença há entre um escritor e um não-escritor? O primeiro pesa cada palavra e, em vez de se refugiar em neologismos, procura o nome apropriado, vernáculo, para cada novo conceito; o segundo acha que qualquer nome serve, desde que a terminologia seja coerente. Àquilo que o primeiro chama "ziguezague", o segundo chamaria, sem corar, uma "z-configuração". O primeiro sabe que atrás de cada convenção matemática há uma história que importa clarificar, mesmo que com isso se alongue a exposição; o segundo é todo pela eficiência descarnada, pelo lema que se segue à definição e antecede o teorema, tudo militarmente numerado.

Para cumprir a sua vocação de escritor, Elon tem escrito assiduamente, sempre acerca de matemática. Depois dos manuais universitários, dedicou nos últimos anos a sua atenção ao ensino médio (equivalente ao nosso secundário), dirigindo um curso de aperfeiçoamento para professores que funciona no IMPA desde 1990 e lançando, como apoio ao curso, uma colecção de livros, *Meu Professor de*

Matemática, que reúne já 19 títulos, dos quais 12 da sua autoria (sozinho ou em parceria). São livros elementares, que esclarecem e aprofundam os temas curriculares de matemática desse grau de ensino; o seu valor e utilidade, porém, transcendem em muito o fim imediato para que foram escritos: qualquer professor ou estudante de matemática, em qualquer país ou grau de ensino, poderia lê-los com gosto e proveito (se a língua não fosse obstáculo).

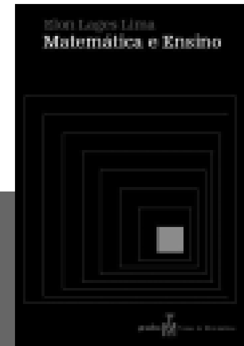
O livro aqui em apreço, *Matemática e Ensino,* editado em Portugal conjuntamente pela SPM e Gradiva, apareceu originalmente como o 16.º volume da colecção *Meu Professor de Matemática.* Para a edição portuguesa adaptaram-se a ortografia e a terminologia. O livro está dividido em 17 breves capítulos independentes. *Grosso modo,* os capítulos 1, 15, 16 e 17 tratam do ensino da matemática nas suas diversas vertentes (pedagógicas, metodológicas, sociais), ao passo que os restantes se ocupam de temas matemáticos específicos (da geometria sintética e analítica, da combinatória, da álgebra linear e da análise).

No primeiro capítulo, Elon entrevista-se a si próprio sobre o ensino da matemática no Brasil. Ainda que alguns problemas tenham no Brasil uma gravidade sem paralelo entre nós, como sejam os miseráveis salários e a desqualificação social dos professores, há uma pergunta que não perde pertinência: por que razão o ensino da matemática tem, lá como cá, piores resultados do que as outras disciplinas? Há por certo razões específicas para este mau desempenho, e Elon enumera algumas: a matemática é um saber cumulativo, que não perdoa lacunas anteriores; o seu ensino requer precisão, cuidado e ordem; e, finalmente, a sua aprendizagem exige esforço, o que vai contra a corrente das modernas pedagogias ("no passado, ele [o medo da matemática] era repartido com o medo do Latim, mas este foi abolido, juntamente com quase tudo que requeria trabalho no currículo escolar").

Os capítulos 15 e 16 são ensaios onde Elon discute algumas das grandes e desencontradas tendências que têm moldado o ensino da matemática: a chamada matemática moderna com a sua "conjuntivite" e excesso de conceptualização; a manipulação obsessiva desligada da conceptualização (pecha de alguns livros de texto actuais); a crença nos computadores como remédio milagroso para guindar o ensino a uma modernidade instantânea.

O capítulo 17 reproduz uma entrevista de Elon a Nuno Crato publicada em 2001 no semanário *Expresso.* Nela se fala do começo da investigação matemática no Brasil, da criação do IMPA, do próprio percurso pessoal de Elon, e por fim do ensino da matemática, com palavras duras para o domínio das "ciências" da educação, em detrimento dos conteúdos matemáticos, na formação de professores.

Os assuntos propriamente matemáticos, que ocupam a maior porção do livro, iniciam-se com três capítulos sobre geometria plana: polígonos convexos (cap. 2), soma de ângulos de um polígono (cap. 3) e polígonos equidecomponíveis (cap. 4). A comparação, no capítulo 2, de várias possíveis caracterizações, locais ou globais, de polígono convexo, é muito instrutiva e contém o germe de um dos mais profícuos estudos da matemática actual, o da geometria convexa. No capítulo seguinte, uma questão aparentemente trivial, a do cálculo da soma de ângulos de um polígono, é pretexto para uma elegante demonstração de que qualquer polígono (convexo ou não) pode ser decomposto num número finito de triângulos justapostos. (Há no entanto um pequeno deslize que não compromete a



validade da demonstração: quando se diz, nas pp. 29-30, que "a diagonal DB não pode conter outros vértices além de D e de B", conviria acrescentar que a mesma diagonal não cruza nenhum lado do polígono.) O famoso teorema de Bolyai (pai), de que dois polígonos com a mesma área são necessariamente equidecomponíveis, ocupa o capítulo 4; é de assinalar a inclusão do refinamento deste resultado por Hadwiger e Glur, os quais provaram que, usando apenas translações e meias-voltas, dois quaisquer polígonos equidecomponíveis podem ser recortados e rearranjados de forma a sobreporem-se um ao outro.

O capítulo 5 contém uma rápida introdução ao conceito de grafo, com a novidade de também se usar o clássico problema das pontes de Königsberg para explicar, de forma muito sugestiva, a noção de gráfico dual.

A pergunta "por que é que o espaço tem 3 dimensões?" dá o mote ao capítulo 6, que contém uma cuidada reflexão sobre aqueles postulados geométricos que, implícita ou explicitamente, traduzem a tridimensionalidade do espaço.

Estes primeiros capítulos matemáticos do livro (2 a 6) situam-se ao nível da melhor literatura de divulgação matemática: aquela que seduz pela inteligência, explicando honestamente como funcionam os pequenos brinquedos (fragmentos ou prenúncios de teorias mais sofisticadas) que expõe ao leitor, em vez de o querer deslumbrar com a narração de grandes feitos de cuja essência não lhe dá a menor pista.

Os restantes capítulos sobre temas matemáticos (7 a 14) não são de nível inferior, mas o seu conteúdo e tom são diferentes: procuram clarificar controvérsias, corrigir erros e abrir pontos de vista novos em assuntos do currículo escolar que, de tão repisados, se diriam incapazes de suscitar interesse no leitor experiente. Mas Elon ultrapassa com brilho esse desafio: quem diria que havia algo de novo a contar sobre a equação de segundo grau, a divisão de grandezas em partes proporcionais, os sistemas de equações lineares, os logaritmos, o crescimento linear ou exponencial? A propósito da equação de segundo grau, tema indiscutivelmente "paleontológico", Elon, usando a convexidade de um ramo de hipérbole, fornece uma interpretação visual da desigualdade entre as médias aritmética e geométrica; a mesma interpretação permite discutir o número de raízes em função dos coeficientes e é pretexto para uma introdução ao importante método iterativo de cálculo aproximado de raízes.

Desta habilidade em contornar o óbvio e olhar as coisas de um novo ângulo poderíamos dizer, levianamente, que é como tirar água de uma pedra. Mas, porque tínhamos a vista cansada, não víamos a fonte que se escondia atrás da pedra; com este livro, Elon ensina-nos a olhar melhor.

Fazemos votos de que edição tão oportuna, como são sempre as edições de livros excelentes, tenha o merecido sucesso e encoraje os editores a prosseguir a empreitada.

Porto, 26 de Setembro de 2004

Esta secção propõe-se publicar recensões aprofundadas de livros de Matemática editados recentemente em português, dando preferência a livros que interessem a um público alargado. Agradecemos aos leitores da Gazeta de Matemática o envio de sugestões de livros que julguem merecedores da nossa atenção. Contacto do editor da secção: Paulo Ventura Araújo (FCUP); e-mail: paraujo@fc.up.pt

Os portugueses discutem pouco

Graciano de Oliveira
Universidade Lusófona, Lisboa

É impressionante a quantidade de questões de importância, ou mesmo de decisões vitais, que passam sem debate. Sabemos, desde há uns anos, que tem de haver decisões e que não se pode ficar eternamente pelo debate nem, para decidir, se pode esperar a conclusão do debate (se é que os debates alguma vez se concluem...) nem se pode esperar que, como resultado do debate, se alcance a unanimidade ou se esteja muito próximo. Mas o debate é fundamental bem como a existência de correntes de opinião em vez da indiferença. Sem decisões não há liderança mas também não a há sem debate e sem fortes correntes de opinião que as decisões apoiem ou contrariem. A liderança é coisa que muito escasseia nos meios académicos. A liderança, não equivalendo a dar ordens, pressupõe a existência de ideias (tanto por parte de quem lidera como de quem não o consegue) e estas raramente surgem, e muito menos se consolidam, sem passarem o teste da discussão. Muito mais dificilmente granjeiam apoio consciente sem esse teste. A simples definição de liderança poderia ocupar várias páginas mas não vou por aí, prefiro enumerar questões candentes e pouco debatidas. Por isso mesmo pouco conhecidas: quem duvidar que faça perguntas e verifique quantas respostas do tipo "não sei bem", "talvez", "mais ou menos", "não estou muito a par" ou o famoso "nim" obtém. Quem sabe o que preconiza a Declaração de Bolonha e é capaz de a defender ou atacar com argumentos sólidos? O mesmo a respeito da avaliação universitária. Prós e contras?

O argumento frequente, pelo menos de forma implícita, de que "se nos países avançados é assim...por que não há-de ser cá?" parece-me pouco convincente.

Que dizer da proposta da Ministra de atrair para Portugal quem tenha 100 artigos (em português dos nossos dias mais conhecidos por *papers*) publicados?

Que é que a Ministra pretende? Importar muitos matemáticos próximos da reforma? Não acho mal, os idosos são, em geral, encantadores e sabem histórias maravilhosas extraídas de uma longa experiência com as quais todos aproveitariam. Pessoalmente, à medida que os anos passam, acho cada vez mais que os idosos devem ser respeitados. Além disso, são os únicos assumidamente excluídos e guetizados em lares-depósitos, coisa que hoje, na idade da integração, ninguém se atreve a defender para qualquer outra minoria. Provavelmente teremos de dar parabéns à Ministra por esta manifestação de bons sentimentos. Para mim o problema está mais em reduzir o critério à contagem dos artigos, independentemente do conteúdo, de acordo com a moda corrente. Por que não limitar-se antes a procurar atrair cientistas com, no mínimo, 80 anos?

Os debates orais, vivos e acalorados, são indispensáveis apesar de acontecer muito que neles se perca o fio à meada e se digam dislates ou se enverede pelo trivial, esquecendo o importante. O que mais escasseia são os debates escritos onde se podem expor ideias pensadas, estudadas, examinadas e amadurecidas. Além de que escrever é diferente de falar...

Que dizer da avaliação universitária e das montanhas de dossiers com colecções de sumários e etc. que produziu para contentamento dos industriais da celulose? Valeu a pena?

E que dizer da preparação de professores? Que preparação científica e que preparação pedagógica? Que pensamos nós? É difícil responder. O tema foi posto à discussão no Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática de 1996 a 2000. Para descanso dos portadores das ideias dominantes, a participação foi quase nula. Provavelmente porque está tudo bem e nada há a dizer ou, o que é mais provável, porque a antipatia do presidente da SPM nesse período tenha desmotivado.

Bolonha vai para a frente sem se saber o que é?

A Gazeta abriu uma secção de cartas dos leitores no volume anterior a este. Tivemos a sorte de contar com cartas muito interessantes. Que a nossa boa sorte continue e se fortaleça.

Competições internacionais de Matemática de 2004

Ercília Sousa
Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Como já vem sendo habitual, Portugal participou em duas Competições de Matemática Internacionais no ano de 2004, as Olimpíadas Internacionais de Matemática e as Olimpíadas Ibero-Americanas de Matemática.

A selecção dos estudantes que representaram Portugal nestas competições foi feita pela equipa do Projecto Delfos, de entre os alunos que obtiveram medalhas na prova da categoria B nas três últimas edições das Olimpíadas Nacionais de Matemática, e dos resultados que obtiveram nos estágios de preparação efectuados no âmbito do Projecto Delfos, de Abril a Julho de 2004, no Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra.

As quadragésimas quintas Olimpíadas Internacionais de Matemática realizaram-se entre 4 e 18 de Julho de 2004 em Atenas, na Grécia, contando com a presença de 85 países e um total de 486 estudantes.

Portugal participou pela décima sexta vez com uma equipa constituída por seis alunos, Domingos Ramos Lopes da Escola Secundária da Gafanha da Nazaré, Eduardo Manuel Dias da Escola Secundária Domingos Sequeira em Leiria, João Diogo Ferreira da Escola Secundária Pedro Alexandrino da Póvoa de Santo Adrião, João Eduardo Casalta Lopes da Escola Secundária José Falcão em Coimbra, José Diogo Rio Fernandes da Escola Secundária de Gondomar e Tomás Barato Goucha da Escola Secundária Ginestal Machado em Santarém e por dois docentes do Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra, Daniel Pinto e Júlio Severino Neves.

O melhor resultado da equipa foi conseguido por Domingos José Ramos Lopes e João Diogo Silva Ferreira, tendo cada um recebido uma Menção Honrosa.

Equipa das Olimpíadas Internacionais de Matemática.
Da esquerda para a direita; primeira Fila: José Diogo Rio Fernandes, Tomás Barato Goucha, Júlio Severino Neves, Guia do Grupo e Eduardo Manuel Dias; segunda Fila: Daniel Pinto, Domingos José Ramos Lopes, João Eduardo Casalta Lopes e João Diogo da Silva Ferreira.

Equipa das Olimpíadas Ibero-Americanas de Matemática. Da esquerda para a direita; primeira Fila: Amílcar Branquinho, João Nuno Mestre Fernandes, Carlos Filipe Magalhães Santos e Margarida Melo; segunda Fila: João Diogo Ferreira e João Eduardo Casalta Lopes.

Em Setembro decorreram as Olimpíadas Ibero-Americanas de Matemática, que são convocadas pela Organização dos Estados Ibero-Americanos e organizadas pelo país designado por esta organização. Este ano foram realizadas de 17 a 26 de Setembro, em Castellón, Espanha, sob a égide do Ministério da Educação Cultura e Desporto Espanhol.

Estiveram presentes nas Olimpíadas Ibero-Americanas todos os 22 países convidados, facto que aconteceu pela primeira vez na história das Olimpíadas Ibero-Americanas, dado que não é usual todos os países convidados participarem.

A equipa portuguesa foi constituída por quatro alunos. Dois desses alunos já tinham integrado a equipa que se deslocou à Grécia, o João Diogo da Silva Ferreira e o João Eduardo Casalta Lopes.

A estes dois juntaram-se o Carlos Filipe Magalhães Santos e o João Nuno Mestre Fernandes Silva, ambos da Escola Secundária da Maia. A delegação portuguesa foi ainda constituída pelos docentes do Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra Amílcar Branquinho e Ana Margarida Melo.

Os resultados obtidos foram duas Medalhas de Bronze, conquistadas por João Eduardo Casalta Lopes e João Diogo Ferreira, e duas Menções Honrosas, para João Nuno Mestre Fernandes Silva e Carlos Filipe Magalhães Santos.

Na competição por equipas, **a equipa que ficou em primeiro lugar** era constituída pelo português João Eduardo Casalta Lopes, pelo brasileiro Rafael Daigo Hirama, pelo salvadorenho Nelson Iván González Magaña e pelo colombiano Jonathan de Jesús Montaño Martínez.

Ainda no âmbito destas olimpíadas realizou-se, de 15 a 17 de Setembro, o Simpósio Ibero-Americano de Ensino da Matemática, «Matemática para o século XXI», na Universidade Jaume I de Castellón com a participação de mais de trezentos docentes.

Finalizamos deixando por curiosidade um dos problemas das Olimpíadas Internacionais de Matemática realizadas na Grécia, para que os leitores se apercebam do grau de dificuldade e excelência destas Olimpíadas.

Um inteiro é dito *alternante* se, na sua representação decimal, quaisquer dois dígitos consecutivos têm paridade diferente. Determine todos os inteiros positivos n tais que n tem um múltiplo que é alternante.