Gazeta de Matemática

N.º 0160

Publicação quadrimestral
da Sociedade Portuguesa de Matemática
Ano LXXI | Abril 2010
4,20€

O Problema da Formiga

19 | Na Linha de Frente: Dividir para Governar
[Fabio Chalub]

24 | Uma Mente Não Menos Brilhante. Os *grooks* de Pier Hein
[Natália Bebiano e J. Craveiro de Carvalho]

Índice

2 Editorial por Jorge Buescu

3 Atractor
[No Rasto da Tartaruga]

5 Recreio por Jorge Nuno Silva
[Velhos Problemas Maravilhosos]

7 Artigo Convidado por António Guedes de Oliveira
[O Problema da Formiga]

16 Canto Délfico por Amílcar Branquinho e Alexander Kovacec
[Coordenadas Trilineares e Baricêntricas]

19 Na Linha de Frente por Fabio Chalub
[Dividir para Governar]

24 Apanhados na Rede por António Machiavelo
[Hipácia de Alexandria]

23 Bartoon por Luis Afonso

24 [Uma Mente Não Menos Brilhante. Os *grooks* de Piet Hein] por Natália Bebiano e F. J. Craveiro de Carvalho

29 [O Planeamento de Projectos] por Rui Feiteira e Marília Santos

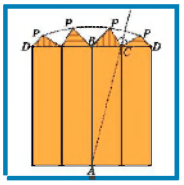
37 [Entrevista a Carlos Grosso. O elogio do manual deve ser feito na escola] por Silvia Nogal Dias

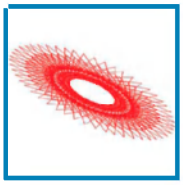
39 O Que É... por Pedro Martins Rodrigues
[Uma Expansão-Beta?]

45 [Recorrência de Polígonos - Uma Abordagem Dinâmica] por José Ricardo Camões de Oliveira

58 Notícias

62 Cartas da Direcção por Nuno Crato
[O Muito que Falta Fazer]





Anuncie aqui!

Já reparou que um anúncio na Gazeta é visto por mais de 2.000 leitores, todos eles potenciais interessados em Matemática? Nenhum se desperdiça! A Gazeta é o local próprio para anunciar tudo quanto respeite a actividades matemáticas: programas de Mestrado e Doutoramento, livros, workshops ou debates, acontecimentos que interesse dar a conhecer e que devam ficar registados para o futuro... O que não é publicitado é como se não existisse!

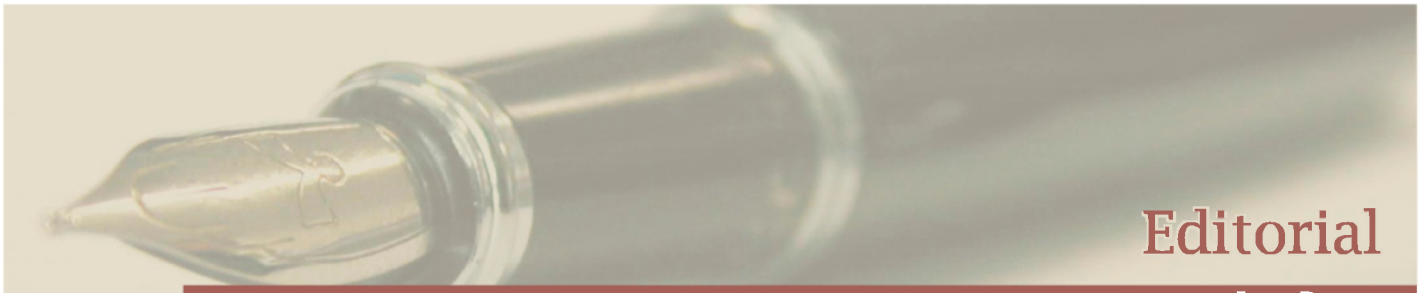
Tabela de Preços [páginas interiores]

	Ímpar	Par
1 página	590,00 €	490,00 €
1/2 página	390,00 €	290,00 €
1/4 página	220,00 €	170,00 €
1/8 página	120,00 €	120,00 €

Descontos: Os Sócios Institucionais da Sociedade Portuguesa de Matemática têm direito a um desconto de 15%.

Encartes: É possível enviar encartes. Para mais detalhes consultar a página na web: http://www.spm.pt

[Aos valores indicados deverá ser adicionado o IVA à taxa legal em vigor.]



Editorial

por **Jorge Buescu**
[Universidade de Lisboa]

O leitor que percorra casualmente o índice da *Gazeta de Matemática* pode ser levado a pensar que desistimos de falar de matemática em si e nos virámos para outras áreas, como a biologia ou as ciências sociais e humanas. De facto, o que pensar quando os títulos dos artigos são "O Problema da Formiga" e "No Rasto da Tartaruga" e os conteúdos vão da poesia às eleições nos Estados Unidos da América, das figuras históricas a velhos jogos maravilhosos?

Essa conclusão seria diametralmente oposta à realidade. Na verdade, a *Gazeta* é e continuará a ser sempre sobre matemática. O que se passa é que a matemática não existe apenas nos livros, mas de facto no mundo de todos os dias. Como mostra o tema de António Guedes de Oliveira, ela é importante até para uma formiga numa superfície, quando tenta minimizar a distância percorrida entre dois pontos. A "tartaruga" invocada pelo Atractor é um exemplo simples mas extremamente eficaz de um algoritmo matemático, que está na base de uma linguagem de programação, em acção.

E sim, a matemática está relacionada com todos os aspectos da vida. Natália Bebiano e Craveiro de Carvalho fornecem-nos aquelas que julgamos serem as primeiras traduções dos fantásticos *grooks* de Piet Hein em português. António Machiavello mostra-nos o que tem a ver a Hipácia ficcionada em *Agora* com a real. Fabio Chalub mostra-nos como a matemática tem tido uma voz activa na política americana.

Não, caro leitor, não foi a *Gazeta* que passou a ocupar-se de outros assuntos que não a matemática. É a matemática que está mesmo em todo o lado, desde que tenhamos olhos para a ver.

O nosso mundo transpira matemática lindíssima por todos os poros. Como dizia o poeta sobre o binómio de Newton, há pouca gente a dar por isso. Nesta *Gazeta* é bem visível o esforço dos que dão por isso ao transmitirem essa beleza.

spm SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

Veja a lista de vencedores

XXVIII OLIMPÍADAS PORTUGUESAS DE MATEMÁTICA

CATEGORIA A (8º e 9º ano)

OURO
João Augusto Ferreira Machado Escola Secundária do Restelo
Miguel Martins dos Santos Escola Secundária de Alcanena
Salomé Dias Afonso Escola Básica 2,3 Martim de Freitas
PRATA
David Pires Tavares Martins Escola Secundária de Mirandela
Luís Manuel Freire Rebelo dos Santos Ass. Esc. 31 Janeiro
Marco Abrantes Colégio Vasco da Gama
BRONZE
Beatriz Henriques Xavier Escola Básica Integrada de Vale Rosal
Cristiana Silva Caldeira Escola E. B. 2,3/S Pedro Ferreira
Guilherme Costa Filipe Escola Secundária de D. Luísa de Gusmão
Luís C. A. Espírito Santo Escola E. B. 2, 3 Dr. Francisco Colaço
Pedro Manuel Malheiro Camilo Escola Básica 2,3 de Valongo
Rodrigo Alves Lopes Escola Secundária Ferreira Dias

CATEGORIA B (10º a 12º ano)

OURO
João Miguel Magalhães Santos Escola Secundária da Maia
Raúl Q. do Vale N. Penaguião Escola Secundária Santa Maria
Ricardo Correia Moreira Colégio Paulo VI
PRATA
Diana Zorro Nobre M. Macedo Esc. Sec.3º Ciclo D. Manuel I
Frederico Oliveira Toulson Colégio Valsassina
João Pedro Martins Santos Escola Secundária de Alcanena
BRONZE
Alexandre Miguel Torres de Aragão Esc. Sec. Carlos Amarante
Daniel Oliveira Figueiredo Escola Secundária de Homem Cristo
David Bidarra Castro Pinto Escola Secundária Infanta D. Maria
Gonçalo Vitorino Bonifácio Escola Secundária José Saramago
Jorge Miguel Ribeiro Dias Esc. Sec. .3.º ciclo de S. João da Talha
Rita Fernandes Neves Escola Secundária de Gondomar

Banco Espírito Santo · Ministério da Educação · Ciência Viva · Ciência.Inovação 2010 · Texas Instruments · Porto Editora · edp · wta

No âmbito de uma colaboração acordada entre a Gazeta e o Atractor, este é um espaço da responsabilidade do Atractor, relacionado com conteúdos interactivos do seu *site* (*www.atractor.pt*). Quaisquer reacções ou sugestões serão bem-vindas para atractor@atractor.pt.

No Rasto da Tartaruga

"An algorithm must be seen to be believed."
Donald Knuth

A *geometria da tartaruga* tem sido bastante usada para ensinar conceitos de geometria. A ideia básica é construir objectos geométricos a partir de movimentos de um ponto (a tartaruga) que, ao deslocar-se, pode deixar ou não um rasto visível (usar ou não a caneta). Os movimentos e as decisões sobre deixar o rasto são expressos através de ordens, e uma sequência de ordens que inclua deixar um rasto cria um desenho, que vamos supor a duas dimensões.

Na versão mais simples, a tartaruga pode avançar ou recuar uma dada distância, tem uma orientação, podendo rodar sobre si própria de um ângulo dado, para a esquerda ou a direita, e tem associado o estado da caneta (a deixar ou não rasto).

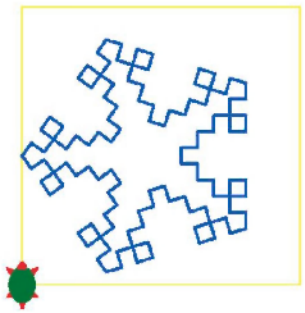
Existem vários programas de computador que permitem a utilização da *geometria da tartaruga*, sendo o desenho normalmente obtido no ecrã. As ordens para a tartaruga podem ser vistas como instruções de uma linguagem de programação (o Logo é a mais usada), a qual poderá ter outras instruções para, por exemplo, efectuar repetições ou testes de condições. Executando-se um programa destes, obter-se-á um desenho.

Uma das formas de descrever certas curvas é usar sistemas de regras de reescrita de sequências de símbolos. Por exemplo, com a regra $F \rightarrow FrFlF$ e partindo do símbolo F, obtemos, num primeiro passo, $FrFlF$ e, num segundo, $FrFlF\ r\ FrFlF\ l\ FrFlF$ (espaços em branco apenas para melhor compreensão). Se interpretarmos os símbolos F como uma ordem de avançar e l e r como ordens de virar à esquerda e à direita, temos uma descrição de uma curva em termos de *geometria da tartaruga*. Estes símbolos poderão ser parametrizados com valores de distâncias e ângulos, e o processo de reescrita pode ser realizado através de chamadas recursivas a rotinas correspondentes a cada regra.

O programa seguinte usa a regra $F \rightarrow FrFlFlFrF$ para desenhar sobre cada lado de um pentágono regular uma linha conhecida por linha (poligonal) de Koch com ângulos rectos.

```
rotina linha_de_Koch :d
    se :d < 6
      então
        em frente :d ; retorna
    fim de se
    seja :d3 :d/3
    linha_de_Koch :d3 ; à direita 90
    linha_de_Koch :d3 ; à esquerda 90
    linha_de_Koch :d3 ; à esquerda 90
    linha de Koch :d3 , à direita 90
    linha_de_Koch :d3
    retorna

seja n 5 ; seja d 45 ; seja a 360/n
sem caneta
em frente  45 ; à direita  a/2
caneta
repete  n
  linha de Koch  c ; à direita  a
fecha
```

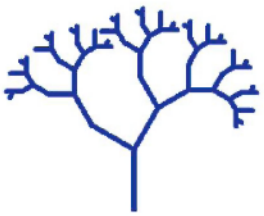
Como critério de paragem da recursão usou-se a condição de ser $d<6$, com d o comprimento passado à rotina recursiva, e sendo apenas desenhado um segmento de recta com esse tamanho. O resultado é o da figura: representa uma aproximação da curva de Koch.



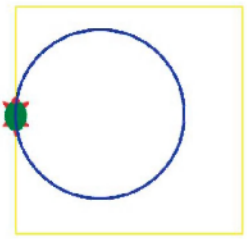
Caderno_1
ter a-feira, 20 d: Abril d: 2010 16:3i:21

```
rotina A :d
seja :df :d*k
se :d < 6
então
em frente :df
sem caneta ; para trás :df
caneta
retorna
fim de se
seja :dr :d-:df
à direita 30
em frente :df ; A :dr
à esquerda 60 ; B :dr
à direita 60
sem caneta ; para trás :df
caneta
à esquerda 30
retorna

rotina B :d
seja :df :d*k
em frente :df
se :d >= 6
então
A :d-:df
fim de se
sem caneta ; para trás :df
caneta
retorna

seja k 0.28
à direita 90 ; em frente 40
à esquerda 120
caneta
A 50
```

Com um programa que use as regras $A \rightarrow rfAlBrbl$ e $B \rightarrow fAb$, em que f e b são interpretados como movimentos para a frente e para trás, respectivamente, obtém-se uma forma arborescente como a da figura.



Analisemos outro exemplo do uso da *tartaruga*. Uma circunferência é o conjunto de pontos que distam igual medida de um ponto fixo, o centro. Esta é uma descrição métrica da curva. Contudo, quando esboçamos circunferências, frequentemente traçamo-las sem marcar previamente o centro, tentando obter uma curva fechada (se seguirmos ao longo da curva sempre no mesmo sentido, partindo de um ponto fixado, voltamos a este ponto), simples (sem auto-intersecções) e a curvar sempre do mesmo modo, o que impõe uma certa forma. Este procedimento corresponde a uma descrição geométrica das circunferências que pode servir de definição se as circunferências forem as únicas curvas que a satisfazem. E, de facto, o traço de uma curva plana duas vezes diferenciável está contido numa circunferência se e só se a curvatura da curva é constante e positiva. Nesse caso, a curvatura é igual ao inverso do raio da circunferência. (Pelo contrário, embora a circunferência tenha largura constante, não é a única curva com essa propriedade, como regista um módulo da exposição *Matemática Viva*.)



Esta definição de circunferência liberta-a de coordenadas e pode ser implementada na *tartaruga* pelo programa indicado em baixo.

```
em frente 45
seja n 200 ; seja d 1 ; seja a 360/n
caneta
repete  n
  em frente d ; à direita a
fecha
```

Além das implementações em computador, e tendo em atenção a pouca idade de muitos dos potenciais interessados, existem modelos mais realistas, com tartarugas a passear e a desenhar sobre folhas de papel. É o caso de um módulo desenvolvido pelo Atractor no âmbito de um projecto financiado pelo Ciência Viva. As limitações mecânicas que necessariamente existem diminuem a precisão possível nos desenhos se estiverem envolvidos valores pequenos ou em que possa haver acumulação de erros, assunto que poderá ser explorado com este módulo. M

Caderno_1
terça-feira, 20 de Abril de 2010 16:31:25

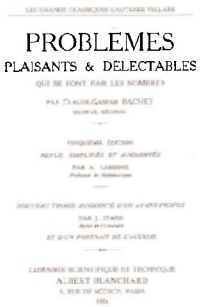
por Jorge Nuno Silva
[Universidade de Lisboa]

Velhos Problemas Maravilhosos

Ao longo da história da matemática, os problemas e questões recreativas surgem como simples curiosidades, mas às vezes protagonizam papéis mais relevantes. Entre os autores das colecções de problemas que chegaram até nós, encontramos alguns matemáticos famosos. Hoje falamos brevemente de dois deles, o que nos leva até às origens mais remotas de uma área de investigação matemática contemporânea.

Bachet de Méziriac (1581-1638) é conhecido hoje em dia principalmente por ter sido o autor da tradução da *Aritmética de Diofanto* em cujas margens Fermat enunciou o seu célebre resultado. Mas este membro da Académie Française notabilizou-se também por ter escrito uma das primeiras obras de matemática recreativa, cuja influência se propagou por outros autores. A sua obra *Problèmes Plaisans et Delectables qui se Font par les Nombres* foi publicada em 1612 e reeditada várias vezes.

Bachet de Méziriac


PROBLEMES
PLAISANTS & DELECTABLES

Capa da última edição de *Problèmes*

Os seus problemas variavam entre numéricos, truques de cartas, de pesagens, de capacidades, etc. Alguns eram muito antigos, tendo já aparecido em *Propositiones ad Acuendos Juvenes*, de Alcuíno de Iorque, no final do século VIII, mas a colecção apresenta muitas questões originais. Vejamos alguns exemplos.

Qual é o menor número de pesos necessários para pesar qualquer número inteiro de quilos de 1 a 40, numa balança de pratos, se os pesos se podem colocar em ambos os pratos?

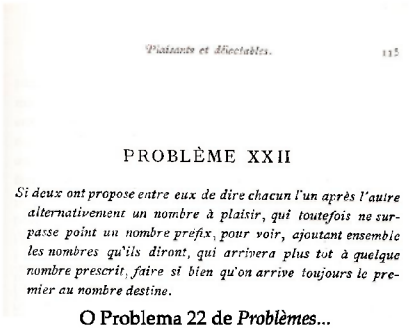
Entre outros, o historiador da matemática Eberhard Knobloch, que nos visitará em breve aquando do 23.º Encontro do Seminário Nacional de História da Matemática (*http://ludicum.org/snhm23/*) estudou a génese deste tipo de problema.

Cad:rno_1
ter a-feira, 20 d: Abril d: 2010 16:3 :29

Um outro:

De quantas formas se pode dispor as dezasseis cartas Ás, Rei, Dama e Valete dos quatro naipes num quadrado de modo a que não haja repetição de naipe ou face em nenhuma fila, coluna ou diagonal?

Contudo, há um problema especial para nós, o 22.º, por se relacionar com a Teoria de Jogos Combinatórios, área de interesse crescente nos nossos dias, a que se têm dedicado matemáticos do estatuto de John Horton Conway:



Plaisants et délectables. 135

PROBLÈME XXII

Si deux ont propose entre eux de dire chacun l'un après l'autre alternativement un nombre à plaisir, qui toutefois ne surpasse point un nombre prefix, pour voir, ajoutant ensemble les nombres qu'ils diront, qui arrivera plus tot à quelque nombre prescrit, faire si bien qu'on arrive toujours le premier au nombre destine.

O Problema 22 de *Problèmes...*

Dois jogadores alternam, somando um número natural não superior a 10 à quantidade anterior (partem do zero). Ganha quem atingir 100.

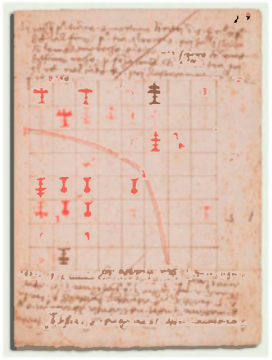
Bachet resolve-o, mostrando que se deve começar por nomear 1 e depois sucessivamente 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78 e 89.

Hoje enuncia-se este tipo de problema em forma subtractiva, ilustrando-o com uma pilha a que se vão retirando feijões. São os chamados *Jogos de Subtracção*.

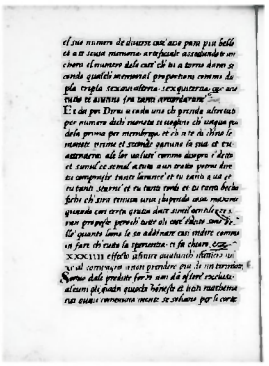
O célebre jogo do *Nim*, o primeiro a ser objecto de um artigo de investigação matemática, da autoria de Charles Bouton em 1902, e que deu origem à Teoria de Jogos Combinatórios, é um descendente próximo deste tipo de jogo. No *Nim* há várias pilhas de feijões e cada jogada consiste em escolher uma delas e retirar-lhe um número positivo de feijões. Ganha quem retirar o último, isto é, vence o último a jogar. Fica como mais um problema para os leitores descobrir a estratégia óptima para jogar *Nim*.

Mas há uma origem mais remota. Luca Pacioli (1445 – 1517), o célebre matemático italiano, para além da sua obra maior, *Summa de Arithmetica* (1494), *Geometria, Proportioni et Proportionalita*, escreveu um livro também de matemática recreativa: *De Viribus Quantitatis*, entre 1496 3 1508, que não chegou a publicar.

O seu problema 34 é também um problema aditivo.



Uma página de *De Ludo*



Uma página do *De Viribus Quantitatis* onde surge o Problema 34

Aqui podem somar-se parcelas até 7 e o objectivo é atingir 30.

Pacioli tinha interesses variados, tendo também escrito uma obra sobre xadrez, *De Ludo Scacchorum*, cujas ilustrações alguns atribuem a Leonardo Da Vinci.

Caderno_1
ter a-feira, 20 de Abril de 2010 16:31:33

por António Guedes de Oliveira
[Departamento de Matemática, Universidade do Porto]

O Problema da Formiga

Quem for a Lisboa, à exposição *Matemática Viva* que está no Pavilhão do Conhecimento, encontra um problema cuja solução discutimos aqui, e que interessa a uma imaginária formiga que vive no seu imaginário mundo. Ponha-se o leitor na pele da formiga e resolva o problema. Pode depois testar a sua solução, voltando à exposição.

1. No quadro de uma exposição

No Pavilhão do Conhecimento – Ciência Viva, no Parque das Nações, em Lisboa, há uma exposição permanente chamada *Matemática Viva*. Nesta exposição existe um módulo que se chama "O Problema da Formiga", onde está um prisma recto de base quadrada (ver a fotografia em baixo), relativamente ao qual se põe o seguinte problema:

"A superfície do bloco de madeira mostrado na fotografia é 'o mundo' onde vive uma formiga imaginária, que quando se desloca entre dois pontos quaisquer escolhe sempre, de entre todos os caminhos possíveis, o mais curto.

Uma ponta do fio está presa junto de um dos vértices – A – da base do paralelepípedo. Tente, com a ajuda do fio e para vários pares de pontos, encontrar os caminhos mais curtos, unindo os dois pontos de cada par. Descubra, em particular, um caminho mais curto, unindo o vértice – P – mais afastado de A e verifique, com a ajuda do fio, se a sua resposta está correcta. Para isso, comece por apertar com os dedos o fio (esticado) junto ao ponto P; se a sua resposta estiver correcta, deve poder chegar com esse bocado de fio a todos os outros pontos da superfície (porque estão mais perto de A)".

A exposição foi organizada pela Associação Atractor – Matemática Interactiva, que mantém uma página muito interessante na Internet. Em particular, o leitor pode encontrar quer o texto acima transcrito quer a fotografia em *http://www.atractor.pt/matviva/geral/PF/PF.html*.

Tive ocasião de resolver este problema, e apresentei a sua solução (em conjunto com um grupo de professores estagiários) de diferentes modos, incluindo um artigo [1] e um texto interactivo na própria página do Atractor – em *http://www.atractor.pt/matviva/geral/formiga/formi2/frames.html*.

Vou tornar a expor esta solução aqui brevemente, antes de expor também, pelo menos parcialmente, a solução de um outro problema que me foi proposto pelo Professor Arala Chaves (a quem agradeço aqui publicamente), membro da direcção da Associação Atractor. O que me foi proposto foi que estudasse analogamente o que aconteceria com outros "mundos da formiga". Considerei então o mesmo problema, tomando outros prismas de base poligonal regular em lugar do prisma de base quadrada representado na exposição e, posteriormente, tomando cilindros no mesmo lugar. Aqui exponho então, também brevemente, as soluções que encontrei para estes novos problemas.

Note-se que estas soluções utilizam o facto de a altura dos prismas ser muito superior às arestas das bases, ou ao raio da base, no caso do cilindro. Para unificar os diversos casos, suponho que todos os prismas estão inscritos

Caderno_1
ter a-feira, 20 de Abril de 2010 16:31:38

num cilindro cuja altura é pelo menos três vezes o raio da base, e que quer o cilindro quer os prismas são rectos: considerando que a sua base é horizontal, as geratrizes do cilindro, assim como as arestas não horizontais dos prismas, são verticais.

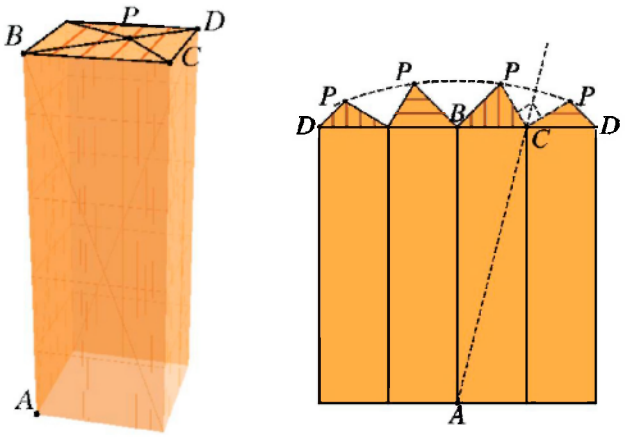


Figura 1: Planificação-solução do "Problema da Formiga"

Vamos chamar *geodésica* a um "caminho de formiga" – ou seja, a um caminho na superfície do prisma que liga dois pontos dados cujo comprimento é *o menor possível* entre os caminhos que ligam esses pontos. Interessa-nos conhecer o ponto P[1] *mais afastado de A pelo caminho mais curto*, isto é, o ponto P tal que uma geodésica de A a P é tão comprida quanto possível. Vou chamar $d(A, X)$ ao comprimento de uma geodésica de A a X (é a distância no prisma de A a X). Por vezes chama-se *antípoda* de A ao ponto P atrás referido, cuja distância a A é máxima. Para simplificar um pouco as coisas, vou chamar *prisma* ao que, em rigor, é a superfície do prisma, onde não incluo a base inferior (inacessível à formiga...).

Comecemos então por estudar as geodésicas de A a outros pontos. No que se segue, vou considerar uma planificação especial a que chamo *planificação-solução* do problema, que é apresentada na figura 1. Para tornar mais fácil a sua interpretação, considero que existem na face superior do prisma riscas paralelas a duas arestas. O leitor conhece certamente outras planificações do prisma, em que este "é cortado" ao longo de uma aresta vertical, como aqui, mas em que a base superior, S, é apresentada inteira. A aresta de corte vertical neste caso é a aresta que contém o ponto D que está diametralmente oposto a A. Chamo B ao outro extremo da aresta vertical que contém A, C ao vértice de S que está representado na planificação à direita de B (e à esquerda de D) e A à face vertical que contém A e C (e B, naturalmente).

A solução é baseada nesta planificação, em que S está cortada em quatro partes triangulares, congruentes duas a duas. Note-se que a semi-recta $\dot{A}C$ forma um ângulo de 45º com as duas semi-rectas de origem C que delimitam os triângulos com vértice neste ponto.

A primeira ideia que está por detrás desta solução é a de que qualquer trajecto da formiga na superfície do prisma (curto ou comprido) pode ser seguido numa planificação qualquer, embora na planificação possa haver descontinuidades que advêm dos cortes, uma vez que os pontos dos segmentos por onde cortamos as arestas são representados, pelo menos, duas vezes na planificação (no caso do ponto P em cima, são mesmo quatro os representantes). Com esta ressalva, isto é, descontando as distâncias no plano entre duas representações dos mesmos pontos, os caminhos têm o mesmo comprimento no prisma e na planificação. Consequentemente, um segmento de recta numa planificação pode não corresponder a uma geodésica no prisma, mas se uma geodésica do prisma corresponder a um caminho contido numa planificação, esse caminho tem de ser um segmento de recta. Por exemplo, na planificação do prisma em que a face S é "levantada" sobre a aresta $[BC]$, os segmentos de

[1] Nos casos que aqui consideramos, este ponto é único. Mas note-se que podia não o ser – não é único noutras superfícies.

Caderno_1
ter a-feira, 20 de Abril de 2010 16:37:42

recta que unem o representante de D a A não têm o mesmo comprimento. O mais curto, o que corresponde à geodésica, é o que não atravessa a aresta $[BC]$. Portanto a geodésica está contida na superfície lateral do prisma. Em baixo, onde está assinalado **2.**, ilustra-se esta afirmação, justificando-a melhor.

O que a *planificação-solução* apresentada em cima tem de especial é precisamente a propriedade seguinte:

Teorema 1. *Uma geodésica de A a um ponto X qualquer do prisma corresponde na planificação-solução a um segmento de recta que liga o representante de A a um dado representante de X. Reciprocamente, qualquer segmento de recta a ligar o representante de A a um representante de um dado ponto X corresponde no prisma a uma geodésica de A a X.*

Com este teorema vai ser fácil resolver o "Problema da Formiga". Para justificar o teorema, por sua vez, vou considerar três casos distintos. Considero sucessivamente: 1) que $X \in A$; 2) que X está na outra face vertical que contém C e 3) que $X \in S$. Note-se que nos dois primeiros casos, na planificação só existe um representante de cada ponto X. No terceiro caso, já há pontos do prisma com dois representantes na planificação e há um ponto, o antípoda de A, como veremos, com quatro representantes. Vamos, em cada caso, pensar nos diversos caminhos que ligam A ao ponto considerado e ver que o mais curto, ou os mais curtos, conforme o caso, são exactamente os que correspondem na planificação-solução aos segmentos de recta que ligam o representante de A a um dos representantes de X. Usamos os dois lemas que se seguem.

Lema 2. *Dados dois pontos distintos do plano, P e Q, e dada r, a mediatriz do segmento de recta [PQ], um ponto X está do mesmo lado de r que P se e só se dista de P menos que dista de Q.*

Demonstração. Creio que o leitor sabe que r é o *lugar geométrico* dos pontos à mesma distância de P e Q e parto deste facto. Isto é, para um ponto X do plano, designando por $\overline{XP}$ o comprimento do segmento de recta $[XP]$.

$$\overline{XP}=\overline{XQ} \Leftrightarrow X \in r$$

Suponhamos que X está do mesmo lado de r que P e seja Y o ponto de intersecção de $[XQ]$ com r (faça um desenho, caro leitor, por favor). Então

$$\begin{aligned} \overline{XQ} &= \overline{XY}+\overline{YQ} \\ &= \overline{XY}+\overline{YP} \quad \text{(porque } Y \in r\text{)} \\ &> \overline{XP} \end{aligned}$$

porque o lado de um triângulo é sempre menor do que a soma dos outros dois. Reciprocamente, consideremos que $\overline{XQ}>\overline{XP}$. Então, nem X está em r, já que não é verdade que $\overline{XQ}=\overline{XP}$, nem está do mesmo lado de r que Q, porque então seria $\overline{XP}>\overline{XQ}$, como acabámos de ver. Portanto, está do mesmo lado de r que P.

O segundo lema diz que "não se pode ir depressa por desvios".

Lema 3. *Se Y e Z estão numa geodésica g que liga A a X, a parte de g entre Y e Z é também uma geodésica a ligar estes pontos.*

Demonstração (sem as definições exactas...). Suponhamos que, dos dois pontos, é o ponto Y que está mais próximo de A no caminho g, e seja g_1 a parte de g entre A e Y, g_2 a parte entre Y e Z e g_3 a parte entre Z e X.

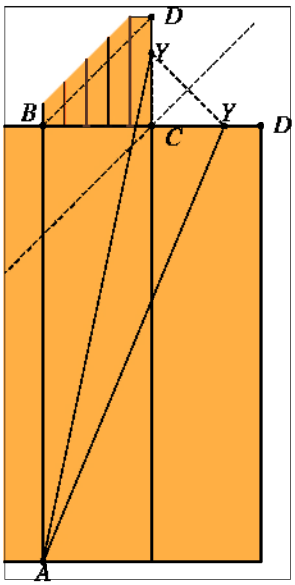
Como o comprimento de g, $d(A,X)$ é a soma dos comprimentos de g_1, de g_2 e de g_3, se existisse um caminho mais curto a ligar Y a Z e substituíssemos g_2 por esse caminho, obteríamos um caminho mais curto de A a X do que a geodésica g. Mas isso não acontece por definição de geodésica.

Em presença destes lemas, tão fáceis, afinal, talvez o leitor se pergunte quantos lemas mais aí virão. Não, leitor, não vem mais nenhum, pelo menos para resolver este problema e o próximo, em que o mundo da formiga é um prisma hexagonal: o Teorema 1 é uma consequência bastante directa destes dois resultados, quando usados de certa maneira, que vamos ver caso a caso, utilizando a simetria da figura. É por causa da simetria que se consideram só os três casos referidos atrás, isto é, em que o ponto X pertence sucessivamente a uma das duas faces verticais que contêm C, ou que está em S. Pela mesma razão, neste último caso admito que o ponto pertence ao triângulo $[BCD]$. A ideia por detrás disto é a de que se resolvem claramente de modo semelhante os restantes casos.

Caderno_1
ter a-feira, 20 de Abril de 2010 16:37:47

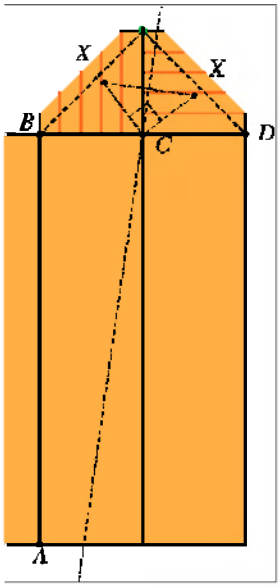
1. ($X \in A$) Neste caso é bastante claro que não pode haver nenhum caminho no prisma entre os pontos A e X com menor comprimento do que o segmento de recta que une os seus representantes. Em particular, qualquer caminho que cruze alguma aresta do prisma é mais comprido do que este segmento.

2. (X está na face vertical que contém C diferente de A) Aqui, o problema já se complica ligeiramente, porque não é imediato que um caminho que atravessa a aresta $[BC]$, cruza a base S e volta a atravessar a aresta $[CD]$ não possa ser uma geodésica. Vamos supor por momentos que um tal caminho é realmente uma geodésica, e que Y é o ponto onde o caminho atravessa a aresta $[CD]$. Pelo Lema 3, então, a parte do caminho de A a Y também seria uma geodésica e, portanto, sendo tão curta quanto possível, corresponderia ao segmento de recta que une o representante de A ao representante de Y que está na aresta vertical da planificação ao lado. Mas então este segmento não podia ser mais comprido do que o segmento que liga o representante de A ao representante de Y que está à direita na mesma figura. Ora isso não acontece, já que r, a *mediatriz* do segmento que une os dois representantes (a tracejado na figura), separa A e o representante de X da direita do representante de X da esquerda, e isto significa que A está mais próximo do primeiro do que do segundo, pelo Lema 2. De facto, C está na mediatriz r, que está a 45° relativamente à horizontal (e à vertical). Portanto, essa mediatriz intersecta a recta AB num ponto à mesma distância de B que C. Mas nós assumimos que, em particular, $\overline{AB} > \overline{BC}$, pelo que A não está no mesmo lado da mediatriz que B e que o representante à esquerda de Y.



Então o caminho mais curto no prisma entre A e um ponto da superfície lateral está todo contido nesta superfície, já que é o que corresponde ao segmento de recta que une os pontos da planificação correspondentes. Em particular, o ponto pertencente à superfície lateral do prisma que está mais afastado de A é o ponto D; por outro lado, é fácil ver que o ponto de S mais próximo de A é B.

3. ($X \in S$) Aqui, não é difícil ver que uma geodésica de A a X só pode cruzar uma única aresta horizontal: em alguns casos, cruza a aresta $[BC]$, noutros, cruza a aresta $[CD]$. Para estudar os caminhos que atravessam a aresta $[BC]$, podemos utilizar a planificação em que a base S assenta inteira sobre esta aresta; podemos utilizar a planificação em que assenta inteira sobre a aresta $[CD]$ para estudar os outros caminhos (num caso e noutro a geodésica vai corresponder a um segmento de recta). Então, para decidir quando é que é uma e quando é que é outra a aresta que é cruzada pela geodésica, represento na figura ao lado uma mistura das duas planificações, onde todos os pontos do triângulo $[BCD]$ estão representados duas vezes. O ponto a verde, por exemplo, na planificação onde S está representada pelo quadrado à esquerda (inacabado, na figura) representa D e na planificação onde S está representada pelo quadrado à direita representa B. É importante notar que os representantes de X numa planificação e noutra *diferem de uma rotação de 90° em torno de C*.



A planificação-solução tem uma parte da primeira planificação e uma parte da segunda – a parte que é delimitada superiormente pela semi-recta de origem C que forma com a semi-recta AC um ângulo de 45° orientado no sentido directo (isto é, contrário ao dos ponteiros do relógio) e a parte delimitada pela que forma um ângulo de 45° orientado no sentido retrógrado (no sentido dos ponteiros do relógio), respectivamente. Vou chamar s_1 à primeira destas semi-rectas e s_2 à segunda.

Vejamos que isto confere com o que é afirmado no Teorema 1. No caso do ponto X da figura, por exemplo, o representante à esquerda é o que pertence à planificação-solução, porque está abaixo da semi-recta s_1, enquanto o representante à direita está acima da semi-recta s_2. De facto, ao rodarmos no sentido retrógrado o sistema constituído pelas duas semi-rectas com origem C que passam pelos representantes de X e pela mediatriz do segmento que liga estes representantes, a tracejado na figura ao lado, obtemos aquele que, na figura 1, é constituído pela recta AC e pelas semi-rectas s_1 e s_2.

Caderno_1
ter a-feira, 20 de Abril de 2010 16:37:52

Mas note-se que isso acontece precisamente porque o representante de A está do mesmo lado da referida mediatriz que o de X da esquerda, isto é, pelo Lema 2, porque, dos dois representantes, é o da esquerda o que está mais próximo do ponto que representa A.

Os pontos que têm na figura 2 um representante à esquerda situado acima da semi-recta s_1 têm o representante à direita colocado abaixo de s_2. É este, o da direita, o representante mais próximo do representante de A. Na planificação-solução estão representados unicamente pelo representante mais próximo, situado no triângulo colocado sobre a aresta $[CD]$. Finalmente, os pontos do prisma representados por elementos de s_1 são os pontos representados por elementos de s_2, já que o ângulo formado por estas semi-rectas é de 90°. A cada segmento a ligar A a um destes representantes corresponde o segmento que liga A ao outro; os segmentos têm o mesmo comprimento, uma vez que A pertence à mediatriz do segmento que une os dois representantes – a recta AC. A cada um dos segmentos corresponde, portanto, uma geodésica.

Não seria muito difícil agora, com estes argumentos, obter uma verdadeira prova do Teorema 1. Em particular, é fácil ver que o ponto mais afastado de A na figura 1 corresponde a um dos vértices de um dos quatro triângulos. Portanto, ou é P ou é D. O Lema 2, aplicado aos representantes mais à direita de D e P, permite concluir que é P.

Se o leitor vive em Lisboa ou perto, ou tem ocasião de visitar Lisboa, sugiro-lhe que reserve algum tempo para visitar em especial a exposição *Matemática Viva*, que lhe asseguro valer a pena. Então detenha-se junto ao prisma e experimente a veracidade do que aqui é dito. Em particular, veja com os seus próprios olhos (e "com as mãos", uma a marcar o ponto, a outra a esticar o fio) que são quatro as geodésicas que ligam A a P, e que cada uma atravessa a sua aresta de S. Se é céptico, ou só meticuloso, e vai munido de uma fita métrica, aqui lhe digo como localizar P na diagonal $[BD]$ de S: considere o ponto médio O da diagonal (o centro de S, portanto), considere o ponto P e o ponto C, e o triângulo t com estes três vértices. Vejamos que t é semelhante ao triângulo da face A de vértices B, C e A. De facto, se imaginarmos que "levantamos" para a vertical a face S rodando-a 90° em torno da aresta $[BC]$, de modo a que fique no plano de A, e que depois a rodamos nesse plano 45° em torno de C no sentido retrógrado, vemos (agora com o espírito) que os lados de t ficam dois a dois paralelos aos deste triângulo. De facto, vemos que a semi-recta CP se vai sobrepor à semi-recta s de origem C que *não* contém A mas está contida na recta AC, que a diagonal $[BD]$ fica horizontal e que o segmento $[CO]$ fica vertical. É fácil seguir este raciocínio na figura 1, à direita. Então, para calcularmos a distância de B a P basta multiplicar o comprimento da diagonal de s pelo número $k=1/2(1+a/h)$, onde a é a aresta de S e h a altura do prisma.

Não lhe dou estes valores porque nunca fiz a experiência. Estou muito certo do que vai encontrar, sim, senhor leitor, porque isto é matemática...

2. Outros mundos da formiga (1): prismas hexagonais

Podemos aplicar o mesmo método noutros prismas [2], com bons resultados, como veremos. Aqui vou considerar com algum detalhe o que acontece num prisma recto de base hexagonal regular e mencionar brevemente o que se passa com os outros prismas com base em polígonos regulares com $2n$ lados. Na verdade, pode aplicar-se o mesmo método no caso dos prismas construídos sobre polígonos com um número ímpar de lados, mas a notação complica-se um pouco.

Na figura 2 vê-se (parcialmente) uma planificação do prisma de base hexagonal que tem as propriedades descritas no Teorema 1. Vou chamar de novo S à face horizontal (hexagonal, agora), B ao vértice de S que está sobre A e D ao vértice que está diametralmente oposto a A. Chamo agora C_1 e C_2 aos dois vértices consecutivos intermédios, contados a partir de B.

Começo por desenhar um rectângulo R com as dimensões 6 por h (6 é o perímetro do hexágono). Chamemos A ao ponto médio da base inferior e B ao ponto médio da base superior, uma vez que vão ser os únicos representantes destes pontos do prisma. Dividindo uma metade da base superior, a da direita, por exemplo, em três segmentos iguais, encontramos C_1 e C_2.

A seguir, desenho três segmentos: d_1, o segmento correspondente à diagonal $[BD]$ do prisma (que forma um ângulo de 60° com a horizontal), d_2, o segmento que se obtém rodando d_1 em torno de C_1 num ângulo igual, no

Cad: rno_1
ter a-feira, 20 d: Abril d: 2010 16:37:57

sentido retrógrado, e d_3, o segmento que se obtém rodando d_2 em torno de C_2 de novo num ângulo de 60° e de novo no mesmo sentido. Isto está representado na figura 2. Intersecto agora d_1 com a semi-recta de origem C_1 que forma com a semi-recta AC_1 um ângulo a amplitude de 30°, no sentido directo, e intersecto d_2 com a semi-recta que forma um ângulo de amplitude igual, mas no sentido retrógrado. Encontrei assim dois representantes de um ponto P_1. Depois, intersecto d_2 com a semi-recta de origem C_2 que forma com a semi-recta AC_2 um ângulo igual no sentido directo e, finalmente, intersecto d_3 com a semi-recta de origem C_2 que forma com AC_2 um ângulo igual, no outro sentido, assim encontrando dois representantes de um outro ponto, P_2.

Procedendo à esquerda da recta AB como ao espelho, determinam-se todos os pontos necessários para construir a planificação mostrada parcialmente na figura 2.

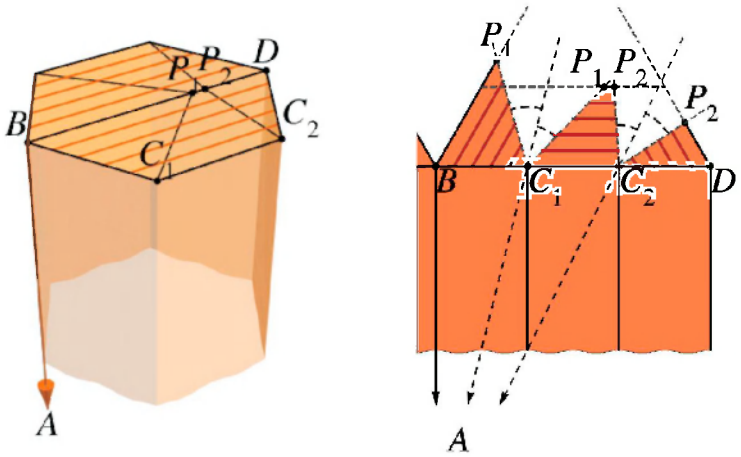
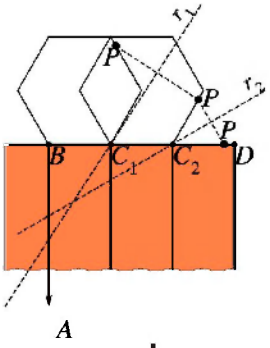


Figura 2: Planificação-solução do "Problema da Formiga" – que vive num prisma hexagonal

Para vermos que os pontos do rectângulo R distam do ponto A do plano o mesmo que os pontos que representam distam do ponto A do prisma, vou, em lugar de repetir integralmente o raciocínio de trás, limitar-me a explicar a figura ao lado, em que se vêem três representantes de um ponto dado de uma das arestas de S e as mediatrizes r_1 e r_2 dos segmentos com extremidade nestes representantes, dois a dois, sucessivamente, da esquerda para a direita. Pretendo ver através do Lema 2 que o primeiro representante está mais afastado de A do que o segundo, e este do que o terceiro. Para esse efeito, noto, primeiro, que o declive de r_1 é menor ou igual a $\operatorname{tg}(90° - \frac{90°}{3}) = \sqrt{3}$, altura do hexágono (seria igual se P fosse o vértice D), o que significa que a distância a B do ponto de intersecção de r_1 com AB é menor ou igual a $\sqrt{3}$. Em seguida, noto que o declive de r_2 é $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Isto significa que o ponto A está abaixo de ambas as rectas e permite tirar a conclusão enunciada atrás.



Falta agora ver que A está mais próximo de B do que de P_1, de P_1 do que de P_2 e, finalmente, de D do que de P_2. Fica o leitor convidado a explicar isto, usando o Lema 2 na figura 2.

Portanto, o ponto do prisma mais afastado de A é P_2 – mas desconhecemos se a formiga estará informada disto.

Na verdade, o problema não se pode considerar resolvido, porque estamos a presumir um facto que precisa de ser "confirmado": temos de ver que, de facto, ao efectuarmos a construção de trás, na diagonal [BD] obtemos

Caderno_1
ter a-feira, 20 de Abril de 2010 16:3 ::31

a sucessão de pontos, por esta ordem, B, P_1, P_2 e finalmente D. Ao leitor interessado em fazer isto por ele próprio, agradeço e dou algumas sugestões para continuar. Ao outro, agradeço também, e convido-o a passar já à próxima secção, que acho que o vai interessar.

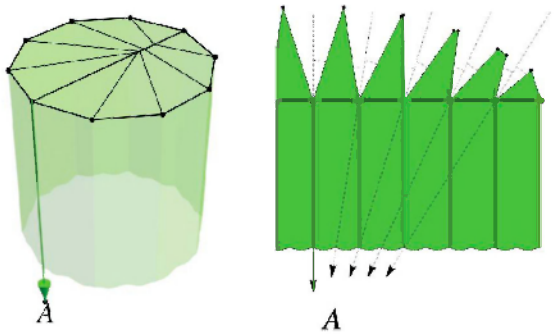


Figura 3: Planificação-solução do "Problema da Formiga" – num prisma dodecagonal

Simpático leitor:

Eu não encontrei nenhum argumento "sintético" (isto é, "não-analítico", no sentido de não precisar de coordenadas) para provar isto. Eis o que fiz e o que o convido a refazer:

Com base nos declives das rectas AC_1 e AC_2, calculei o declive da recta que une C_1 ao representante da esquerda de P_1 e o declive da recta que une C_2 ao representante da direita de P_2. Calculei depois a ordenada destes representantes, colocando os eixos com origem em B de tal modo que D pertença ao semi-eixo positivo dos xx e A ao semi-eixo negativo dos yy. Subtraí essas ordenadas a $\sqrt{3}$, ordenada do representante de D sobre d_1, e assegurei-me de que dava um número positivo para $h>3$ (número que vem a ser o comprimento do segmento $[P_1P_2]$).

Se quer verificar os seus resultados pelos meus, eu notei que a recta AC_1 tem declive h e que a recta AC_2 tem declive $\frac{h}{2}$, e obtive que a recta que une C_1 ao representante da esquerda de P_1 e a recta que une C_2 ao representante da direita de P_2 têm declives dados por $\frac{\sqrt{3}\,h+1}{\sqrt{3}-h}$ e $\frac{\sqrt{3}\,h-2}{h+2\sqrt{3}}$, respectivamente, que, consequentemente, as ordenadas do representante de P_1 e do representante de P_2 são $\frac{3h+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\,h-2}$ e $\frac{3h-2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\,h+4}$, respectivamente, o que, depois de subtraídas sucessivamente a $\sqrt{3}$, nos dá o valor final de $\frac{3h-4\sqrt{3}}{h(3h+\sqrt{3})-2}$ para o comprimento do segmento $[P_1P_2]$.

Já não o convido, leitor, a confirmar que situação análoga se obtém no caso dos prismas rectos de base em polígonos regulares com $2n$ lados, porque acho que isso iria extravasar o alcance que quero que tenha este texto. Em duas palavras, fui capaz de mostrar [2], usando argumentos menos elementares à mistura, que se pode obter em cada caso uma planificação nas condições do Teorema 1 e que é do tipo da figura 3, um rectângulo encimado por "uma série de $2n$ dentes", quatro triangulares e os restantes quadrangulares. Note-se que os ângulos marcados na figura, todos congruentes, vão ficando sucessivamente mais pequenos à medida que n cresce.

3. Outros mundos da formiga (2): o cilindro

Vamos agora ver alguns pormenores de um processo para encontrar num cilindro "alto" o ponto P mais afastado (sempre do ponto de vista de uma formiga que lá vivesse) de um ponto A da sua base. Como dissemos atrás, admitimos que o raio da base do cilindro é 1 e que a altura é $h>3$.

Caderno_1
ter a-feira, 20 de Abril de 2010 16:3 :35

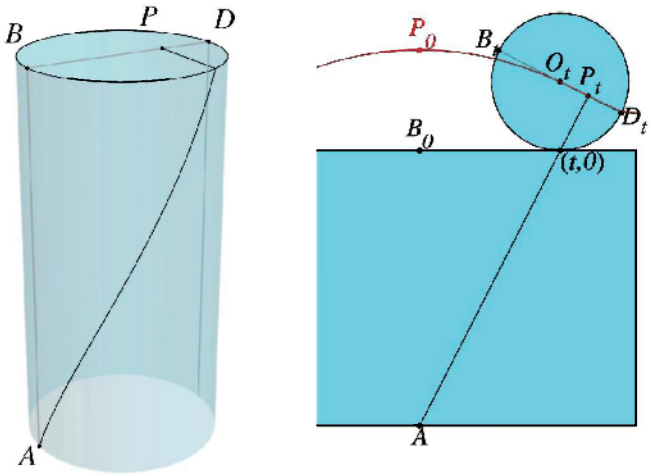


Figura 4: Ponto mais afastado de A num cilindro e respectiva geodésica

Pode provar-se que aqui não é possível construir uma planificação como as de trás. O que vamos fazer é trabalhar com muitas planificações (na verdade, um número infinito) ao mesmo tempo, "parando" em cada momento na planificação que mais convier aos nossos propósitos de então.
De facto, para cada ponto C da circunferência C que delimita a base superior, S, consideramos uma planificação, obtida "levantando" S através de uma rotação de 90º (ou $\frac{\pi}{2}$, uma vez que vamos preferir esta unidade para medir as amplitudes dos ângulos) em torno da recta horizontal r tangente a C, e depois "abrindo" a superfície lateral do cilindro pela aresta vertical que passa pelo ponto D, que está diametralmente oposto a A, até ficar sobre o plano que contém S, na sua nova posição.

O leitor pode, no entanto, pensar ao contrário: pode imaginar que "a tampa" S é levantada sobre B, o ponto da aresta superior que está na vertical de A, que é nesta posição que se corta e "espalma" a superfície lateral, e que depois se roda S sem a deixar deslizar sobre a aresta superior do rectângulo R em que a face lateral se transformou. Vou descrever nestes termos aquilo que concluí, estudando o problema com métodos um pouco menos elementares do que os de trás, que não vou tentar descrever.

• Para cada ponto situado no diâmetro $[BD]$ suficientemente próximo de B (a uma distância inferior ou igual a $\frac{h}{h-1}$, mais precisamente) há uma única geodésica a ligar A a P. Esta geodésica é constituída pela geratriz $[AB]$ e pelo segmento $[BP]$.

• Para cada ponto X que não esteja nessas condições, obtém-se uma geodésica se se levantar e rodar S conforme foi descrito atrás até que X, A e o ponto de contacto estejam alinhados (como na figura 4, por exemplo). Mais precisamente, a geodésica é constituída pelas curvas que se obtêm reconstruindo o cilindro, a partir do segmento que une A ao ponto de contacto e do segmento que une este ponto a X, na face lateral e em S, respectivamente. Prova-se que para cada ponto só há uma "posição de alinhamento" (isto é, uma planificação onde ficam alinhados) e que nesta posição a recta AX intersecta o diâmetro $[BD]$, pelo que o ponto mais afastado está necessariamente neste diâmetro.

• O ponto P mais afastado, na sua posição de alinhamento, é o vértice de um ângulo recto formado pela recta AP com o diâmetro $[BD]$. Só existe um ponto em $[BD]$ nestas condições.

Caderno_1
ter a-feira, 20 de Abril de 2010 16:3 :38

A figura 4 mostra o ponto P mais afastado de A, a respectiva geodésica e a planificação correspondente à posição de alinhamento. A notação é baseada no processo de "levantar e rodar" atrás descrito: supõe-se que ao fim de um tempo t, que vai de 0 a π, o ponto de contacto vai de B a D com velocidade uniforme. B_t é a posição de B no instante t, P_t a de P, etc. Portanto, em particular, P_0 é a posição inicial de P.

Na figura, o diâmetro $[B_tD_t]$ forma com a vertical um ângulo de $(\pi-t)$rad, pelo que a recta AP_t forma com a horizontal um ângulo com a mesma amplitude. Podemos, assim, calcular o valor de $\overline{B_0P_0}=\overline{B_tP_t}$: o ponto O_t, o ponto P_t e o ponto de coordenadas $(t,0)$ constituem os vértices um triângulo rectângulo semelhante ao triângulo cujos vértices são o ponto de coordenadas $(t,0)$, o ponto B_0 e o ponto A. Então t é a solução da equação

$x\,\mathrm{sen}(\pi-x)=h\cos(\pi-x)(t>\frac{\pi}{2})$ e $\overline{B_0P_0}=\cos(\pi-x)$.

E interessante notar que o caminho percorrido por B_t (ou por D_t) quando t percorre os valores de O a π consiste em parte numa curva que creio que o leitor conhece, uma *ciclóide*. Os pontos que não estão em C percorrem o que se chama uma *ciclóide curta*, à excepção de O, que percorre um segmento de recta paralelo às bases de R.

Pode provar-se em particular que o ponto P_t da figura 4 é o ponto da "ciclóide curta de P" mais próximo de A. Isto, entre muitas outras coisas, é feito num trabalho muito interessante do Prof. Eduardo Marques de Sá, da Universidade de Coimbra [3], dedicado a estudar os pontos mais afastados de um ponto dado e as geodésicas em cilindros quaisquer, isto é, com uma altura superior ou não a três vezes o raio da base. E um trabalho feito com grande fôlego, com grande saber, em que vemos aparecer, por exemplo, uma outra ciclóide, cujo estudo das propriedades é um auxiliar precioso no estudo das propriedades do ponto que se procura, em função da altura do cilindro.

Não vou tentar expor esse trabalho, que talvez pertença a um mundo um pouco diferente daquele por onde viajámos. Deixo-o aqui, caro leitor, esperando que tenha gostado da viagem e que tenha aprendido alguma coisa com ela, o que é a melhor razão, afinal, para o turismo intelectual com que nos entretemos.

Referências:

[1] **Ferreira, D., Gageiro, C., Oliveira, A. Guedes de, Pereira, J., e Ribeiro, C.**, (2002). "Acerca de um Problema Encontrado numa Exposição de Divulgação Matemática", *Matemática Universitária* (Sociedade Brasileira de Matemática), 33, 1-11.

[2] **Oliveira, A. Guedes de**, (2007). "Farthest Point on the Surface of a Regular Prism and of the Cylinder", documento de trabalho.

[3] **Sá, E. Marques de**, (2008). "On the Intrinsic Geometry of a Right Circular Cylinder", manuscrito, em preparação.

OCTOBER 1-3 @ UNIVERSIDADE DO MINHO. BRAGA

3rd Iberian Mathematical Meeting

www.imm3.spm.pt ..... imm10@math.uminho.pt

Organization:

spm SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

Real Sociedad Matemática Española

Cad: mo_1
ter a-feira, 20 d: Abril d: 2010 16:3 ::18

por Amílcar Branquinho e Alexander Kovacec
[Departamento de Matemática, Universidade de Coimbra]

Coordenadas Trilineares e Baricêntricas

"Barys" (do grego *βαριο*) significa *pesado*. Se contemplarmos um segmento *AB* como uma alavanca e desejarmos equilibrar um peso α aplicado em *A* com um peso β aplicado em *B*, então o fulcro da alavanca deve estar exactamente no ponto $P=\alpha A+\beta B$. Isto é consequência da lei de Arquimedes mencionada na *Gazeta de Matemática* 155.

Caro Leitor,

Entre as frases explosivas que se costumam disparar a investigações e resultados matemáticos está a famosa "para que é que isto serve?" Nós, matemáticos, também não ajudamos muito pois, por uma parte, acreditamos em geral que a matemática é uma arte com uma justificação essencialmente estética e, por outro lado, não costumamos estar empenhados nas suas aplicações reais, que consideramos propriedade privada de engenheiros e físicos. Desta vez, esperamos alegrar-vos com uma teoria geométrica de grande interesse na resolução de problemas complexos sobre triângulos.

Definamos para quaisquer quatro pontos *W*, *X*, *Y* e *Z*, com $Y\neq Z$ pertencentes a uma recta o quociente de segmentos orientados (ou vectores) da seguinte forma:

$$\frac{\overrightarrow{WX}}{\overrightarrow{YZ}} = \varepsilon \frac{|WX|}{|YZ|}$$

em que $|WX|$ denota a distância entre *W* e *X*, $|YZ|$ a distância entre *Y* e *Z* e ε vale 1 se os vectores $\overrightarrow{WX}$ e $\overrightarrow{YZ}$ têm o mesmo sentido ou -1 no caso contrário. Sejam agora *A*,*B* dois pontos (distintos) no plano ou no espaço e designemos $g=g_{AB}$ a recta por eles definida. Para qualquer ponto $P\in g$ define-se (α,β) como as *coordenadas baricêntricas* de *P* (relativamente a *A*, *B*), por

$$\alpha = \frac{\overrightarrow{PB}}{\overrightarrow{AB}} \quad \text{e} \quad \beta = \frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{AB}}.$$

Usaremos também a notação $P=\alpha A+\beta B$, que retém a informação dos pontos relativamente aos quais se calculam as coordenadas baricêntricas.

Se contemplarmos um segmento *AB* como uma alavanca e desejarmos equilibrar um peso *a* aplicado em *A*, com um peso β aplicado em *B*, então o fulcro da alavanca deve estar exactamente no ponto $P=\alpha A+\beta B$. Isto é consequência da lei de Arquimedes mencionada na *Gazeta de Matemática* 155.

Os sinais das coordenadas baricêntricas (α, β) de $P=\alpha A+\beta B$ dependem da posição de *P* relativamente aos pontos *A*,*B*. Ambas as coordenadas são positivas se e só se *P* está entre *A* e *B*, situação esta que denotamos por *A*-*P*-*B*. No caso *A*-*P*-*B* é fácil demonstrar que o ponto $P=\alpha A+\beta B$ divide o segmento *AB* na porção $\beta:\alpha$. Em qualquer caso, notemos que a soma das coordenadas baricêntricas de um ponto é sempre igual a 1.

Também é possível calcular as coordenadas baricêntricas de um ponto *P* usando cálculo vectorial. Para tal, escolha-se um ponto $O\notin g_{AB}$ e considerem-se os segmentos *OA* e *OB*. Traçando rectas paralelas às rectas de suporte de *OA* e *OB*, passando por *P*, determinam-se os pontos P_A e P_B. É claro $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OP_A}+\overrightarrow{OP_B}$ (ver figura 1).

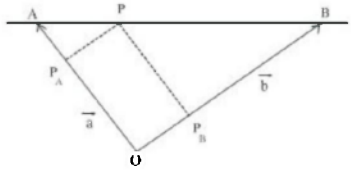


Figura 1

Tendo em conta a semelhança de triângulos, $\Delta AP_AP\approx\Delta AOB\approx\Delta PP_BB$, obtém-se

$$\frac{|OP_A|}{|OA|} - \frac{|P_BP|}{|OA|} = \frac{|PB|}{|AB|} \quad \text{e} \quad \frac{|OP_B|}{|OB|} = \frac{|P_AP|}{|OB|} = \frac{|AP|}{|AB|}.$$

Caderno_1
ter a-feira, 20 de Abril de 2010 16:3 :24

Por outras palavras, sendo (α,β) as coordenadas baricêntricas de P relativamente a A e B, temos $\overrightarrow{OP}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$. Tendo o necessário cuidado com os sinais, sobretudo nos casos P-A-B e A-B-P, obtém-se igualmente $\overrightarrow{OP}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$. Assim, as coordenadas baricêntricas de P são as coordenadas da representação única de P enquanto combinação linear de $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$. Esta forma de calcular as coordenadas baricêntricas é importante, mas não é tão satisfatória como a primeira, pois depende da escolha de O (um ponto *exterior* à recta).

Passemos agora às coordenadas baricêntricas em duas dimensões. Três rectas não concorrentes, ou três pontos não colineares do plano, determinam um triângulo ΔABC. A recta $c=g_{AB}$ define no plano dois semiplanos. Designamos por *semiplano positivo* e denotamo-lo por H^+_c, aquele semiplano que contém o interior do triângulo. No caso contrário, esse semiplano designa-se por *semiplano negativo* e denota-se por H^-_c. Procedendo de igual modo para as restantes rectas $a=g_{BC}$ e $b=g_{CA}$ obtemos H^+_a, H^-_a, H^+_b e H^-_b. As sete regiões determinadas pelas intersecções de três semiplanos estão etiquetadas pelos sinais na figura 2. (Um ponto em $H^+_a \cap H^+_b \cap H^-_c$ está na região (+,+,-) etc.)

Dado um ponto P qualquer do plano, sejam P_a, P_b e P_c as distâncias de P às rectas a, b e c, munidas dos sinais positivo ou negativo conforme P está no respectivo semiplano positivo ou negativo. Mais, sejam h_a, h_b e h_c as distâncias de A, B, C às rectas a, b e c; por outras palavras, considerem-se h_a, h_b e h_c as alturas do triângulo ΔABC.

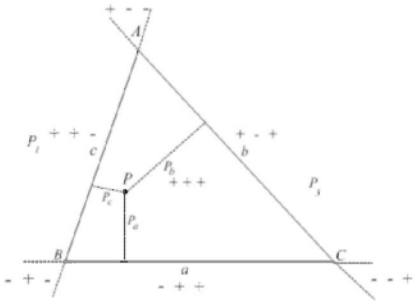


Figura 2

Definem-se as *coordenadas trilineares* e *coordenadas baricêntricas* do ponto P relativamente a A, B, C pelos ternos

$$\mathrm{tri}(P)=(p_a:p_b:p_c) \text{ e } \mathrm{bar}(P)=\left(\frac{p_a}{h_a},\frac{p_b}{h_b},\frac{p_c}{h_c}\right).$$

Com o uso dos "dois pontos" no caso das coordenadas trilineares queremos identificar ternos a menos de proporcionalidade. Concretamente, para qualquer real $r\neq 0$, considera-se $(p_a:p_b:p_c)=(rp_a:rp_b:rp_c)$.

Um ponto tem primeira coordenada baricêntrica nula se e só se pertencer à recta a, segunda coordenada baricêntrica nula se e só se pertencer à recta b e terceira coordenada baricêntrica nula se e só se pertencer à recta c; como é evidente, temos $\mathrm{bar}(A)=(1,0,0)$, $\mathrm{bar}(B)=(0,1,0)$ e $\mathrm{bar}(C)=(0,0,1)$. Mais uma vez, as coordenadas baricêntricas têm soma 1.

Problema 1.
Mostre que a soma das coordenadas baricêntricas de P é igual a 1.

Sugestão: calcule as áreas de alguns triângulos obtidos na figura 2 introduzindo certos segmentos adicionais.

Assim, do conhecimento sobre duas das três coordenadas baricêntricas podemos deduzir a sua terceira coordenada baricêntrica.

Problema 2.
Sejam $\vec{a}$ e $\vec{b}$ dois vectores aplicados num ponto O definindo em O um ângulo diferente de 0 e π. Sejam α, $\beta>0$. Então o vector $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$ define uma semi-recta com origem O. Em que razão divide esta semi-recta o segmento que liga as extremidades dos vectores $\vec{a},\vec{b}$?

Dado um triângulo e um seu vértice, uma *ceviana* é um segmento de recta que o une ao lado oposto do triângulo.

Problema 3.
Demonstre o Teorema de Ceva: *Num triângulo ΔABC, dados os pontos $X\in BC$, $Y\in CA$ e $Z\in AB$, as cevianas, AX, BY, CZ são concorrentes num ponto P fora das rectas de suporte dos lados de ΔABC se e só se*

$$\frac{\overrightarrow{BX}}{\overrightarrow{XC}}\cdot\frac{\overrightarrow{CY}}{\overrightarrow{YA}}\cdot\frac{\overrightarrow{AZ}}{\overrightarrow{ZB}}=1.$$

Problema 4.
Deduza a partir do Teorema de Ceva as seguintes proposições:

Caderno_2
ter a-feira, 20 de Abril de 2010 1:31:45

Canto Délfico

[Coordenadas Trilineares e Baricêntricas]

(I) As medianas de um triângulo intersectam-se num ponto designado *baricentro*.

(II) As bissectrizes de um triângulo intersectam-se num ponto designado *incentro*.

(III) As alturas de um triângulo intersectam-se num ponto, designado *ortocentro*.

(IV) Sejam T_a, T_b e T_c os pontos de tangencia da circunferência inscrita em ΔABC, de lados a, b, c, respectivamente. Então as cevianas AT_a, BT_b e CT_c intersectam-se num ponto que se designa *ponto de Gergonne* ou *ponto de Nagel*.

Problema 5.

(I) Quais são as coordenadas baricêntricas do baricentro? E quais as do incentro? Em particular, mostre que as coordenadas trilineares do incentro I são $\mathrm{tri}(P)=(a:b:c)$ onde a, b, c são os lados do triângulo, opostos aos vértices A, B, C, respectivamente.

(II) As coordenadas trilineares do circuncentro dum triângulo são dadas por

$$(\sin 2\hat{A}:\sin 2\hat{B}:\sin 2\hat{C}).$$

Problema 6.

(I) Sejam AX, BY, CZ cevianas de ΔABC concorrentes em I. Então vale:

$$\frac{\overrightarrow{AI}}{\overrightarrow{AX}}\cdot\frac{\overrightarrow{BI}}{\overrightarrow{BY}}\cdot\frac{\overrightarrow{CI}}{\overrightarrow{CZ}}\leq\frac{8}{27}$$

(II) No caso de I ser o incentro de ΔABC, então tem-se:

$$\frac{1}{4}<\frac{\overrightarrow{AI}}{\overrightarrow{AX}}\cdot\frac{\overrightarrow{BI}}{\overrightarrow{BY}}\cdot\frac{\overrightarrow{CI}}{\overrightarrow{CZ}}<\frac{8}{27}.$$

BANCO ESPIRITO SANTO

FUNDAÇÃO CALOUSTE GULBENKIAN

Câmara Municipal de Leiria

3º mat oeste matemática na região oeste

FCT Fundação para a Ciência e a Tecnologia

por Fabio Chalub
[Universidade Nova de Lisboa]

Dividir para Governar

Não falta aos matemáticos vontade de melhorar o mundo... Em 2007 foi proposto, por um americano radicado em França, um sistema eleitoral capaz de tornar os parlamentos mais representativos. Cada eleitor deveria classificar os candidatos em certos graus progressivos e o escolhido seria aquele que obtivesse a maior mediana. Mas, no país do hexágono, não poderia ser diferente: em vez da política, o algoritmo serve agora para concursos de vinhos. Enquanto isto, no outro lado do Atlântico...

Em 1812, o governador do Massachusetts, Estados Unidos, Elbridge Gerry, alterou as leis do Estado de forma a maximizar a possibilidade de o seu próprio partido, o Democrata-Republicano, que à época se alternava no poder com o partido Federalista, eleger deputados na legislatura seguinte. O mecanismo usado, conhecido como *Gerrymandering* (uma mistura de Gerry com "salamandra"), consistia em redesenhar os distritos eleitorais, cada um responsável pela eleição de um assento no parlamento, de forma a garantir ao máximo a formação de maiorias para o seu partido, por mais pequenas que fossem.

Figura 1: O *cartoon* original que celebrizou a expressão *gerrymander*, publicado no *Boston Gazette*, notando similaridades entre a nova distribuição de distritos eleitorais em Massachusetts e uma salamandra.

Tal estratégia só pode prosperar em sistemas eleitorais distritais de voto maioritário, onde uma minoria no total de votos pode sair vencedora na eleição dos seus representantes. Uma demonstração dramática de tal possibilidade foi a eleição em 2000 do ex-presidente George W. Bush no colégio eleitoral, mesmo após a derrota no voto popular.

Com o tempo, o *Gerrymandering* espalhou-se para outros Estados, gerando distritos eleitorais de formatos cada vez mais bizarros. Os anos de divulgação do censo, os múltiplos de 10, eram anos de febre cartográfica, em que equipas multidisciplinares, trabalhando para cada um dos partidos, eram encarregadas de propor novos mapas – ficando a cargo do partido no poder aprovar um desenho que o ajudasse a se perpetuar.

Apesar de genericamente ser considerado uma fraude, tendo sido proibido no Reino Unido, na Austrália e na Alemanha, que incumbiram organismos não partidários de redesenhar os distritos de acordo com as recontagens periódicas de eleitores (e não com as maiorias instantâneas de representantes), os Estados Unidos não apenas permitem distritos com forma bizarra, como uma decisão do Supremo Tribunal de 2006 garante o direito de cada Estado mexer no seu mapa distrital a qualquer momento (e não apenas após os censos decenais). Mesmo assim, o censo de 2010 será um grande momento de *Gerrymandering*, com a única regra fixa de que cada distrito deve ter aproximadamente o mesmo número de eleitores.

Aproveitando o encontro conjunto anual de 2009 da American Mathematical Society com a

Caderno_2
terça-feira, 20 de Abril de 2010 1:31:56

Mathematical Association of America, apenas um ano antes do novo censo, uma equipa de especialistas resolveu propor uma série de medidas capazes de, pelo menos no início, tornar menos dependente do poder vigente a forma de dividir o bolo [1].

Aliás, a analogia não é despropositada. Uma questão matemática antiga é como dividir um bolo em n partes de forma justa, ou seja, tal que cada parte tenha um valor de (pelo menos) $1/n$ do total. Mais precisamente: se queremos dividi-lo por dois gulosos, cada um deve avaliar a sua parte em pelo menos metade de como vê o total (não é obrigatório ser do mesmo tamanho: a Maria pode preferir um pedaço menor e ficar com a cereja do topo, enquanto o João quer quantidade). A solução para n=2 é conhecida: o primeiro propõe uma divisão e o segundo escolhe a parte que deseja. Para valores maiores de n, a questão é mais subtil.

Agora o problema não é de todo distinto, mas muito mais complexo. Deve dividir-se o Estado em pedaços. Quais as regras a seguir?

Em geral, as leis em cada Estado exigem "compacidade" e "contiguidade"; apenas o Arkansas não exige nenhum dos dois. Contiguidade é similar ao conceito matemático de "conexidade por caminhos": dados dois pontos num distrito, existe uma linha que os liga, totalmente contida no distrito. Isto não evita algumas formas estranhas, como o 4.º distrito de Illinois, na figura 2. Já o conceito de "compacidade", apesar do nome semelhante, não corresponde a nenhum conceito matemático claro, apenas uma vaga noção de que as fronteiras não se devem espalhar muito.

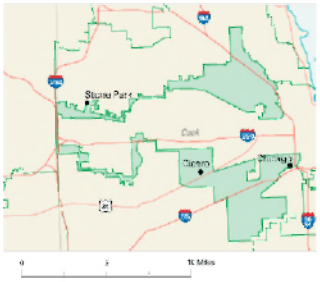


Figura 2: Quarto distrito congressional de Illinois, composto por duas regiões de maioria hispânica ligadas por uma fina linha ao longo de uma estrada.

Tais regras foram introduzidas na legislação para evitar o hábito de *Gerrymandering*, mas como não havia um apelo a conceitos bem definidos, o seu efeito foi sempre muito limitado. A ambição da sessão durante o encontro conjunto de 2009 foi a de criar um medidor quantitativo da "bizarria" da forma de cada distrito e tentar minimizá-la. Este é um problema clássico de optimização com restrições: afinal não apenas todos os distritos devem ter aproximadamente a mesma população, mas as linhas que dividem os distritos devem respeitar as fronteiras dos condados (muito mais estáveis).

Figura 3: Os distritos menos e mais bizarros encontrados no estudo, referente à eleição da 109.ª legislatura.

As restrições também foram enunciadas na mesma reunião, pelo cientista social Sam Hirsh: basicamente, os redesenhos de distritos devem ser feitos para aumentar a competitividade (ou seja, para diminuir o número de assentos garantidos para um dos dois partidos dominantes – de facto, dos 435 lugares de deputados no Capitólio, em Washington, apenas 30 não são considerados seguros para um ou outro partido) e aumentar a representatividade das minorias (ou seja, garantir que certos grupos tenham consistentemente representantes e até que o seu número seja maior do que a proporção da população).

Mas, afinal, como se mede a bizarria de um conjunto? Na definição de Chambers e Miler, dados dois quaisquer pontos num distrito, a bizarria é a probabilidade de a linha recta que os une ser parcialmente fora do próprio distrito [2]. Desta forma, um círculo ou um quadrado tem bizarria zero, diferente de uma estrela ou de uma lua crescente. Pode procurar-se mapas eleitorais que diminuam a bizarria, ou mesmo evocar um limiar acima do qual um novo distrito não é aceitável. Num segundo passo foi necessário levar em consideração as fronteiras dos Estados, que são fixas, e considerar não as linhas rectas, mas o menor caminho dentro do Estado. Em seguida, foram introduzidas as densidades populacionais no cálculo da medida de bizarria.

Ainda não foi proposto nenhum redimensionamento de acordo com o novo critério, mas a percepção cada vez maior de que o *Gerrymandering* tem de ser limitado tem levado a discussões em esferas mais amplas do que o habitual. Se a matemática vai ajudar a aperfeiçoar a democracia ou se todo este estudo servirá apenas para concursos de vinhos, o tempo dirá.

Referências

[1] **Cipra, Barry.**, News Focus (2009). "Joint Mathematics Meetings: Can Mathematics Map the Way Toward Less-Bizarre Elections?" *Science*, 13 de Fevereiro de 2009: Vol. 323. no. 5916, p. 874.

[2] **Chambers, Christopher P. and Miller, Alan D.**, (2007). "A measure of bizarreness", N.º 1272, *Working Papers*, California Institute of Technology, Division of the Humanities and Social Sciences.

Caderno_2
terça-feira, 20 de Abril de 2010 1:32:01

por António Machiavelo
[Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto]

Hipácia de Alexandria

Quão fiel à História é o filme *Ágora* de Alejandro Amenábar? O que é que se sabe exactamente sobre Hipácia, a sua vida e a sua obra? E qual a responsabilidade de São Cirilo de Alexandria no seu assassinato?

Hipácia de Alexandria (séc. IV–V) é a única mulher anterior ao período renascentista que sabemos, com alguma certeza, ter-se dedicado à matemática. Filósofa neoplatónica, astrónoma e matemática, mestre estimada pelos seus alunos e discípulos, Hipácia é mais conhecida pela sua morte violenta do que pela sua vida. Barbaramente assassinada, muito provavelmente pelos *parabolani*[1] – uma espécie de milícia e "guarda pessoal" do patriarca cristão de Alexandria, disfarçada de organização de benevolência –, Hipácia foi ainda uma das vítimas de um dos maiores crimes de sempre contra a memória colectiva da humanidade – a sistemática tentativa de destruição do conhecimento "pagão" pelos cristãos que começavam a dominar o império romano[2] – e de uma campanha de silêncio com vista a proteger os responsáveis por tão monstruoso flagício[3].

O filme mais recente do realizador espanhol Alejandro Amenábar, *Ágora*[4], reconta a história de Hipácia, tomando certas liberdades ficcionais e narrativas, como é natural. Tendo eu, há já bastante tempo, lido o livro de Maria Dzielska citado na primeira nota de rodapé, assim como alguns artigos sobre este assunto, pareceu-me, ao ver o filme, que havia algumas incorrecções históricas no que dizia respeito aos escassos factos que são conhecidos. Isso levou-me a revisitar o assunto e acabei por perceber que é mais difícil – e portanto interessante – do que parecia à primeira vista apontar incorrecções ao argumento do filme. O objectivo da presente rubrica é desafiar o leitor a fazê-lo, indicando alguns apontadores fidedignos para iniciar tal tarefa.

Hipácia (talvez) num pormenor do quadro *A Escola de Atenas* de Rafael

[1]Ver: Maria Dzielska, *Hypatia of Alexandria*, Harvard University Press, 1995, pp. 83–100, e em especial p. 96. Professora de História Romana na Universidade Jaguelónica de Cracóvia, Dzielka apresenta neste seu livro um trabalho erudito e muito cuidado sobre a vida de Hipácia.

[2]Ver ainda o artigo (disponível no *site* JSTOR): Polymnia Athanassiadi, "Persecution and Response in Late Paganism: The Evidence of Damascius", *The Journal of Hellenic Studies* 113 (1993), 1–29. Neste contexto, a história da destruição "da" Biblioteca de Alexandria é uma fonte de intenso debate ainda nos dias de hoje. Ver *http://en.allexperts.com/e/l/li/library_of_alexandria.htm* e o livro recente de Pablo de Jevenois, *Biblioteca de Alexandria: o Enigma Revelado*, Ésquilo, 2009.

[3]Ver Dzielska, obra citada, pp. 99–100 e os dois últimos parágrafos da segunda secção do artigo, disponível *on-line*: Michael A. B. Deakin, "Hypatia and Her Mathematics", *The American Mathematical Monthly* 101 (1994) pp. 234–243.

[4]*http://agorathemovie.com.*

Caderno_2
ter a-feira, 20 de Abril de 2010 1:32:13

Em primeiro lugar, é necessário ter uma ideia pormenorizada das fontes[5] e de onde advém o conhecimento que temos da vida e da obra de Hipácia. Sobre este assunto nada melhor do que ler o artigo "The Primary Sources for the Life and Work of Hypatia of Alexandria" de Michael A. B. Deakin, disponível no *site* Hypatia of Alexandria, mantido por Howard A. Landman:

http://www.polyamory.org/~howard/Hypatia

Destas fontes destaco aqui apenas o relato do hediondo assassinato de Hipácia feito por Sócrates Scholasticus, um historiador eclesiástico seu contemporâneo, e as cartas de Sinésio de Cirene, um aluno de Hipácia que viria a ser bispo de Ptolemaida (hoje Tolmeitha, na Líbia). Ambos cristãos, dão no entanto uma imagem bastante favorável de Hipácia, por outros considerada uma "pagã" – apesar de a evidência histórica sugerir fortemente que não participava em cerimónias de carácter religioso[6] –, deixando claro que ela era uma pessoa tolerante naquilo que dizia respeito à religião de cada um.

Já o mesmo não pode ser dito, de forma alguma, de Cirilo de Alexandria, que se tornou bispo desta cidade no ano de 412. As fontes históricas descrevem-no como "*impetuoso, sedento de poder e incansável na busca de autoridade*[7]. Muito se tem escrito sobre o envolvimento de Cirilo no assassinato de Hipácia. O estudo cuidado de Dzielska deixa muito poucas dúvidas sobre a responsabilidade moral de Cirilo, como a sua ânsia de poder o leva a uma campanha de difamação e intriga, fomentando animosidade contra Hipácia[8]. Tudo indica tratar-se de um assassinato político, com o objectivo de adquirir poder total sobre Alexandria. As provas circunstanciais são avassaladoras, mas há ainda algo que considero muito significativo e que ninguém parece notar: abundam os textos e cartas escritos por Cirilo[9] e, no entanto, não há uma única linha escrita sobre a morte, tão cruel e imoral, de uma figura tão distinta na cidade da qual ele era o suposto líder espiritual! Outra coisa se esperaria de alguém que foi canonizado, sendo agora São Cirilo, e que é um dos "pais" e "doutores" da Igreja, celebrado tanto por católicos como por várias outras ideologias cristãs[10].

Muito do que se sabe sobre a personalidade de Hipácia deve-se a algumas cartas de Sinésio de Cirene, seu aluno e grande admirador. Traduções das cartas, para inglês, podem ser encontradas em[11]:

http://www.livius.org/su-sz/synesius/synesius_cyrene.html

Relativamente a estas cartas, há um facto que deveras me intriga: porque é que se conhecem as cartas de Sinésio dirigidas a Hipácia e nenhuma desta a Sinésio? Uma vez que nada nos chegou de Hipácia e há inúmeros textos de Sinésio que sobreviveram até aos nossos dias (o que é natural, uma vez que os cristãos "ganharam"), não seria muito mais natural ter as cartas que Hipácia dirigiu ao seu ex-aluno, e não o contrário? Simplesmente não encontro qualquer explicação para este estranho facto, nem qualquer comentário sobre o assunto! Fica apenas aqui registado o mistério, na esperança de que algum leitor desta rubrica tenha uma epifania.

Sobre o pouco que se sabe acerca dos eventuais trabalhos matemáticos de Hipácia, ver Michael A. B. Deakin, *Hypatia and Her Mathematics*, disponível em:

http://www.maa.org/pubs/Calc_articles/ma055.pdf

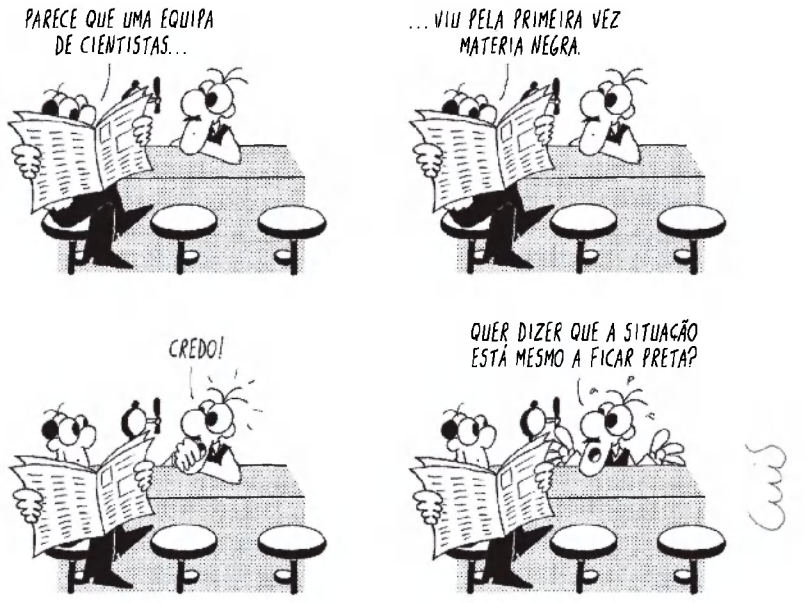
Espero que os leitores desta rubrica aceitem o desafio acima lançado, de separar as especulações dos factos sobre a vida, a obra e a morte de Hipácia, reflectindo de modo crítico acerca das diversas opiniões expressas tanto nas fontes acima indicadas como neste próprio artigo. Recuperar a verdade e eliminar falsidades e disparates é um dos melhores tributos que se podem fazer à memória de uma tão notável personagem da história da humanidade[12]. ∎

[5] Para algumas traduções ver *http://cosmopolis.com/people/hypatia.html*.
[6] Dzielska, obra citada, p. 83.
[7] Dzielska, obra citada, p. 84 e p. 144, nota 88.
[8] Dzielska, obra citada, p. 97 e anteriores.
[9] Ver: *http://www.tertullian.org/fathers/index.htm* para algumas traduções para inglês.
[10] Há em solo português uma estátua a Cirilo, no Sameiro, em Braga. Não conheço nenhuma dedicada a Hipácia.
[11] Onde também se pode ler um divertidíssimo e satírico elogio da calvície escrito por Sinésio.
[12] Sobre o pormenor do quadro *A Escola de Atenas* de Rafael aqui apresentado há também um mistério: o de saber se de facto representa Hipácia ou não. Não consegui encontrar nenhuma fonte fidedigna sobre este assunto, mas ver, por exemplo: *http://www.newbanner.com/AboutPic/athena/raphael/nbi_ath4.html* e *http://www.mlahanas.de/Greeks/SchoolAthens.htm*. Ambos contam a mesma história, mas sem indicar qualquer fonte, não passando assim de mero boato.

Caderno_2
ter a-feira, 20 de Abril de 2010 1:32:18

Bartoon

por **Luis Afonso**



Publicação gentilmente autorizada pelo autor.

Público, 26/12/2009

Ficha Técnica

Director Jorge Buescu [Universidade de Lisboa]

Vice-Directores J. Pimentel Nunes [Instituto Superior Técnico]
Adérito Araújo [Universidade de Coimbra]
Rogério Martins [Universidade Nova de Lisboa]

Conselho Editorial Afonso Pedrosa Pinto [Escola S/3 S. Pedro Vila Real]
Carlota Simões [Universidade de Coimbra]
Elisabete Rodrigues [Faculdade de Psicologia e Ciências da Educação da Universidade de Lisboa]
Graciano de Oliveira [Universidade Lusófona de Humanidades e Tecnologia]
Henrique Leitão [Universidade de Lisboa]
João Filipe Queiró [Universidade de Coimbra]
José Francisco Rodrigues [Universidade de Lisboa]
José Miguel Rodrigues de Sousa [Escola Secundária Felismina Alcântara, Mangualde]
Juan-Miguel Gracia [Univ. Vitoria, Espanha]
Lina Fonseca [Escola Superior de Educação, Viana do Castelo]
Luís Madureira [antigo professor na Esc. Sec. Padre António Vieira]
Maria do Céu Pinto [Universidade de Coimbra]
Manuel Domingos Oliveira Cadete [Universidade Agostinho Neto]
Paulus Gerdes [Universidade Eduardo Mondlane, Maputo, Moçambique]
Raquel Escórcio [E. S. Maria Amália Vaz de Carvalho]
Roberto Ramalho [Univ. Pernambuco, Recife, Brasil]
Teresa Almada [Universidade Lusófona de Humanidades e Tecnologia]

Redactores António Pereira Rosa [ES Mª Amália Vaz de Carvalho]
Daniel Pinto [Universidade de Coimbra]

Assistentes Editoriais Renata Ramalho [SPM]
Ana Figueiredo [SPM]
Sílvia Dias [SPM]

Revisão Margarida Robalo

Concepção e mantuenção do portal Web Pedro Quaresma [Universidade de Coimbra]

Design Filipe Branco

Impressão Dossier - Comunicação e Imagem.

Propriedade Sociedade Portuguesa de Matemática,
Av. da República 45, 3º Esq. 1050-187 Lisboa
Tel.: 21 793 97 85 | Fax: 21 795 23 49
E-mail: spm@spm.pt

Tiragem 1.900 Exemplares

ISSN 0373-2681

ICS 123299

Depósito Legal 159725/00

Capa Imagem alusiva ao artigo "O Problema da Formiga"

Caderno_2
ter a-feira, 20 de Abril de 2010 1:32:24

por **Natália Bebiano & F. J. Craveiro de Carvalho**
[Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra]

Uma Mente Não Menos Brilhante[1]
Os *grooks* de Piet Hein

Associado ao jogo *Hex* aparece, quase sempre, o nome do americano John Nash. Contudo, tal jogo foi inventado anteriormente por um dinamarquês chamado Piet Hein. Falando em Nash, Hein será sempre uma personalidade periférica. Mas será mesmo? Homem de interesses variados, foi poeta também e é essa vertente que exploraremos neste artigo, com a tradução de alguns poemas seus que revelam conhecimento científico.

1. O homem

Em começos do século XX, nasceu na Dinamarca Piet Hein, filho de um engenheiro e de uma activista do movimento feminista, médica de profissão.

Era descendente directo do herói holandês com o mesmo nome que, em 1628, aprisionou ao almirante espanhol Benavides a riquíssima Esquadra de Prata na Baía das Matanzas, nos mares de Cuba.

É difícil dizer com precisão quem foi Piet Hein. Aos dezanove anos iniciou estudos no Institute for Theoretical Physics da Universidade de Copenhaga, mais tarde Institute Niels Bohr. Enquanto assistia a uma aula de Física Quântica dada por Werner Heisenberg, idealizou um dos seus mais famosos *puzzles*: o *Soma Cube*.

Anos mais tarde, nova inclinação vocacional levou-o a cursar Engenharia na Technical University de Copenhaga, dedicando-se aos mais variados inventos, tecnológicos, utilitários ou estéticos.

Em 1940, a Alemanha invadiu a Dinamarca e Piet Hein, presidente de uma união antinazi, passou à clandestinidade. Revelou-se então um poeta prolífico, cujos poemas plasmavam uma filosofia estóica de resistência ao nazismo. Durante a Segunda Guerra Mundial, publicou no reputado jornal *Politiken* muitos dos seus poemas, sob o pseudónimo Kumbel Kumbell, e estudou diversas línguas para os traduzir e internacionalizar.

Em 1942, enquanto pensava no *Problema das 4 Cores*, que teimava em resistir aos mais variados ataques de especialistas e amadores, inventou o *Con-Tac-Tix*, conhecido por *Polígono* na Dinamarca. Em finais dos anos 40, o jogo seria reinventado (independentemente) por John Nash, em Princeton. Popularizado por Martin Gardner nas colunas da revista *Scientific American*, celebrizar-se-ia com o nome de *Hex*.

Os talentos artísticos de Piet Hein vão além da poesia e da invenção de jogos e *puzzles* matemáticos. A sua espantosa e multímoda criatividade estendeu-se a outros domínios, encontrando-se também impressivamente representado no *design* e na arquitectura dinamarqueses, sobretudo com as formas da sua superelipse e do seu superelipsóide. Cultor de diversas artes e ciências, descrito como *"scientist, mathematician, inventor, author, and poet"* [1], dá razão a Leibniz, quando este diz não haver homens mais inteligentes do que aqueles capazes de inventar jogos.

[1] O título deste artigo alude, naturalmente, ao livro *A Beautiful Mind: A Biography of John Forbes Nash, Jr.*, de Sylvia Nasar.

Caderno_2
ter a-feira, 20 de Abril de 2010 1:32:33

2. *Grooks*

Qualquer esboço biográfico de Piet Hein mencionará que este inventou uma forma de poema curto, chamada *grook* ou, em dinamarquês, *gruk*. Não obedecendo a uma estrutura formal, ao contrário de, por exemplo, o *haiku*, três versos de 5, 7 e 5 sílabas, ou o *limerique*, cinco versos, de esquema rimático a, a, b, b, a, tendo os dois primeiros e o último versos 9 sílabas, e 6 os dois versos restantes, é difícil saber que tipo de poema inventou Hein. Dizer que os *grooks* [2] são poemas aforísticos curtos, *"characterized by irony, paradox, brevity, precise use of language, sophisticated rhythms and rhymes and often satiric nature"*[2] não é, particularmente, esclarecedor. Na realidade, uma tal caracterização permite, na poesia portuguesa recente, a aproximação de poetas, cultores do poema curto, tão distintos como Alexandre O'Neill e Sophia de Mello Breyner Andresen.

O carácter breve e aforístico encontra-se, por exemplo, em:

Que maneira a nossa
de usar as coisas!

Fica-nos sempre a maçaneta
na mão!

de O'Neill

ou

Perfeito é não quebrar
A imaginária linha

Exacta é a recusa
E puro é o nojo.

de Sophia.

O recurso ao paradoxo é documentado, por exemplo, com

No comboio havia um compartimento especial para tímidos, mas estava sempre ocupado.

retirado de [3] ou com

Dizem que no outro mundo o sol é mais brilhante
E brilha sobre campos mais floridos
Mas os olhos que vêem essas maravilhas
São olhos apodrecidos

que surge em [4].

Quanto à ironia (triste) ou à sátira, podemos considerar, de Sophia,

Onde está ele o super-homem? Onde?
- Encontrei-o na rua ia sozinho
Não via a dor nem a pedra nem o vento
Sua loucura e sua irrealidade
Lhe serviam de espelho e de alimento

ou, de forma mais directa e arrasadora, em O'Neill,

- O senhor engenheiro hoje não engraxa?
- Engraxo na Baixa.

Poderíamos falar ainda na brevidade e no divertimento puro de [3]:

Pula pula
g
como o g da pul a

ou, estando no Alentejo, na brevidade e na profundidade de [5]

Cortaram os trigais. Agora
a minha solidão vê-se melhor.

(Não há brinde para quem adivinhe de quem é a fala que Sophia recria.)

"... precise use of language, sophisticated rhythms and rhymes", inerentes à criação poética, são predicados que contribuem para o distanciamento do poema em relação à linguagem baça (apropriando-nos aqui de uma expressão de Gastão Cruz) do dia-a-dia.

O uso da rima nos *grooks* é, por sua vez, frequente mas irregular, o que não espanta dada a inexistência de uma forma fixa.

Mais do que falar num novo tipo de poema, parece adequado falar numa etiqueta criada por Hein para os seus poemas.

[2] "caracterizados pela ironia, o paradoxo, a brevidade, um preciso uso da linguagem, ritmos e rimas sofisticados terem frequentemente natureza satírica".

Caderno_2
ter a-feira, 20 de Abril de 2010 1:32:37

3. *Grooks* Matemáticos

Hoje em dia, encontrar exemplares dos livros de Hein é uma tarefa de recompensa incerta. Nos locais habituais, *Amazon* ou *eBay*, encontram-se, por vezes, exemplares usados, mas a preços excessivos. O *site* [2] possui uma colecção razoável e, recentemente, incluiu uma nota sobre a publicação de dois volumes de *grooks*. Escolhemos para traduzir oito pequenos poemas de Piet Hein, sendo um dos critérios da escolha alguma proximidade com a matemática, mais geralmente, com a ciência.

O Aritmética da Cooperação enuncia, recorrendo a duas das quatro operações elementares, uma regra a ter presente quando se agrupam, na vida diária, pessoas para resolver um qualquer problema, enquanto o *Única Solução* e o *Primeiro as Últimas Coisas* reflectem sobre duas questões conhecidas de quem faz ciência.

A resolução de um qualquer problema em investigação raramente é seguida de um ponto final. Em geral, e muitas vezes atestando a importância da investigação em curso, novas questões vão sendo levantadas. Já *Primeiro as Últimas Coisas* é uma crítica divertida, nem por isso menos devastadora, da irrelevância cantante de tanta coisa que vai proliferando nas revistas da especialidade.

Atomiríades remete para o chamado efeito de dominó ou, uma designação mais apelativa, o *efeito de borboleta*. Um bater inocente das asas de uma borboleta, em Portugal, origina um ciclone na Nova Zelândia.

Em *Revelação à Meia-noite* subjaz a ideia de que o que julgamos conhecer pode ter aspectos que nos escapam e o que pensamos estar tão distante pode, afinal, estar, não diremos ao virar da esquina, mas mais próximo do que esperamos. De outro modo, como a Catedral de Burgos, com os seus 30 metros de altura[3] pode ser pintada na cabeça de um alfinete, uma qualquer imagem microscópica pode ser transformada numa tela de metros por metros.

O processo matemático que leva a obter-se o plano projectivo, a partir de uma esfera, é descrito em *Indo ao Fundo das Coisas*. A sofisticação matemática, alguma apesar de tudo, é equilibrada com a expressão comum "saber o chão que se pisa".

Finalmente, *Paralelismo* é uma sóbria homenagem a Euclides, cujos *Elementos* são um monumento de grandeza, independentemente de se saber quem foi o seu verdadeiro autor.[4] Que rectas paralelas se intersectam no infinito era uma coisa que se aprendia na infância escolar. Piet Hein saberia, não duvidamos, que, introduzindo o infinito, isto é, passando da geometria afim à projectiva, deixa de haver rectas paralelas, ou seja, rectas que não se intersectam. A eficácia matemática do poema não diminui por Euclides, morto, descobrir que, afinal as malditas rectas divergem, conclusão contrária à verdade matemática, mas que torna o *grook* bem mais divertido.

4. Pequena antologia

A Aritmética da Cooperação

Quando se juntam comissões
há uma regra útil e prática:
quem tem talento faz diferença,
mas os idiotas aumentam.

The Arithmetic of Co-operation

When you're adding up committees
there's a useful rule of thumb:
that talents make a difference,
but follies make a sum.

A Única Solução

Vamos ter de arranjar mais
pessoas que resolvam problemas –
por cada solução encontrada
dez novos são originados.

The Only Solution

We shall have to evolve
problem-solvers galore –
since each problem they solve
creates ten problems more.

[3] António Gedeão, *Poesias Completas* (1956 - 67), Portugália Editora.
[4] http://www-history.mcs.st-and.ac.uk

Caderno_2
ter a-feira, 20 de Abril de 2010 1:32:41

Primeiro as Últimas Coisas

Soluções para problemas
são fáceis de encontrar:
o problema é uma boa
contribuição.
O que realmente é uma arte
é torcer a mente
e obter um problema que encaixe
numa solução.

Last Things First

Solutions to problems
are easy to find:
the problem's a great
contribution.
What's truly an art
is to wring from your mind
a problem to fit
a solution.

Atomiríades

A natureza, parece, é o nome vulgar
para milhares e milhares e milhares
de partículas no seu jogo infinito.
de bilhar de bilhar de bilhar.

Atomyriades

Nature, it seems, is the popular name
for milliards and milliards and milliards
of particles playing their infinite game.
of billiards and billiards and billiards.

Revelação à Meia-noite

Toda a gente
pensa no Infinito
como um oito
deitado.
Mas de repente
apercebo-me
de que o oito é
o Infinito levantado.

Revelation at Midnight[5]

Infinity's taken
by everyone
as a figure-of-eight
written sideways on.
But all of a sudden
I now comprehend
that eight is Infinity
standing on end.

Indo ao Fundo das Coisas

A nossa morada terrena
contrair-se-á progressivamente
até cada antípoda ficar
sobre o seu antípoda.

Getting Down to Fundamentals

It will steadily shrink,
our earthly abode,
until antipode stands
upon antipode.

[5] http://missrumphiuseffect.blogspot.com/2007/07/poetry-friday-infmity.html

Caderno_2
terça-feira, 20 de Abril de 2010 1:32:42

Então, juntas as solas,	*Then, soles together,*
desaparecido o planeta,	*the planet gone,*
saberemos o chão	*we'll know the ground*
que nós pisamos.	*that we rest upon.*
Paralelismo	*Parallelism*[6]
"Rectas paralelas	*"Lines that are parallel*
encontram-se no Infinito!"	*meet at Infinity!"*
Insistia	*Euclid repeatedly,*
Euclides repetidamente,	*heatedly,*
acaloradamente.	*urged*
Até que morreu	*Until he died.*
e chegou a essas paragens:	*and so reached that vicinity:*
aí	*in it he*
descobriu que as malditas rectas	*found that the damned things*
divergiam.	*diverged.*

(traduções de Francisco José Craveiro de Carvalho)

Uma observação final. Em 1973, a *Moraes Editores* publicou um volume com o título de *Gruks*, sendo as traduções de David Glyn Evans. Estranhamente, este livro não consta nos arquivos da Biblioteca Nacional.

Referências

[1] http://en.wikipedia.org (Piet Hein, Denmark)

[2] http://chat.carleton.ca/~tcstewar/grooks/

[3] **Alexandre O'Neill,** (2002). *Poesias Completas*, Assírio & Alvim.

[4] **Sophia de Mello Breyner Andresen,** (1966). *Livro Sexto*, Livraria Morais Editora.

[5] **Sophia de Mello Breyner Andresen,** (2004). *O Nome das Coisas*, Editorial Caminho.

Bibliografia

http://en.wikipedia.org (*Grook*)

[6] http://scienceblogs.com/thescian/2007/02/piet_hein.php

Caderno_2
ter a-feira, 20 de Abril de 2010 1:32:43

por **Rui Feiteira** [Escola Secundária Poeta António Aleixo, Portimão]
Marília Pires [Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade do Algarve]

O Planeamento de Projectos

Nos nossos dias, com o anunciado advento das grandes e pequenas obras públicas, a gestão e o planeamento desses projectos ganham especial importância. Neste artigo pretendemos mostrar o papel que a matemática pode desempenhar nesse planeamento, ajudando assim a poupar o dinheiro dos contribuintes.

Introdução

Todos já se depararam com notícias sobre o atraso de grandes ou pequenas obras públicas. Foi assim com o Centro Cultural de Belém, com a Expo'98, com os estádios do Europeu de Futebol de 2004, com o túnel do Rossio, com a ponte de Viana do Castelo... Nalguns casos os atrasos só causam transtornos às populações, como foi o caso da ponte de Viana do Castelo, mas noutros há prazos a cumprir, ligados aos eventos que se irão desenrolar na obra que está por concluir. Para minimizar os atrasos e não comprometer a realização dos eventos, normalmente tem de ser feito um enorme esforço financeiro. Se nalgumas vezes estes atrasos se devem a acidentes não previsíveis, noutras tudo parece ficar a dever-se à falta de planeamento prévio e/ou ao rigor na observação dos prazos de construção.

Uma das ferramentas que têm sido mais utilizadas internacionalmente para apoio ao planeamento de grandes ou pequenas obras é o algoritmo conhecido por PERT-CPM.

Neste artigo, através de pequenos exemplos, pretendemos mostrar o funcionamento e a importância deste algoritmo e o motivo que levou à sua intensa utilização como uma ferramenta de apoio à decisão, nos últimos quarenta anos.

O algoritmo PERT/CPM

O algoritmo de **P**ERT (iniciais de **P**rogram **E**valuation and **R**eview **T**echnique) foi criado nos Estados Unidos como resposta à solicitação governamental de desenvolver um míssil balístico que pudesse competir com os soviéticos, o mais rapidamente possível. Nasceu assim o programa Polaris, em que a rapidez, o planeamento e o rigor eram fundamentais. Era necessário ter uma ideia precisa das fases do programa que podiam ser desenvolvidas em paralelo e das que tinham de ser desenvolvidas sequencialmente, assim como também era necessário saber com precisão quais as fases a que se deveria afectar o maior número de meios humanos e materiais. Uma equipa de cientistas criou o algoritmo de PERT a fim de melhor projectar a execução das fases do programa. Este revelou-se tão eficiente que a sua utilização permitiu diminuir o tempo global de realização do projecto, dos sete anos inicialmente previstos para apenas quatro. Dados os bons resultados obtidos, o que começou por ser um segredo militar altamente guardado depressa se expandiu, com enorme sucesso, ao planeamento industrial.

Paralelamente ao algoritmo PERT, uma outra equipa independente desenvolveu o algoritmo CPM (iniciais de **C**ritical **P**ath **M**ethod). Este algoritmo destina-se fundamentalmente a estudar a data em que projectos de grandes dimensões podem ser terminados, permitindo calcular a duração do projecto, as tarefas críticas,

Caderno_2
terça-feira, 20 de Abril de 2010 1:32:49

identificar as folgas nas actividades, e está na base de algoritmos para controlar tempos e recursos. A diferença fundamental entre as duas abordagens consiste em que o CPM lida com tempos bem determinados e o PERT com tempos não determinísticos, de acordo com uma função de distribuição de probabilidade conhecida, ou não. Informalmente, os dois métodos passaram a ser usados em conjunto e conduziram a uma única técnica, que se passou a designar por PERT-CPM[1]. A utilidade desta ferramenta no planeamento de grandes projectos que sejam constituídos por muitas actividades, que devam ser executadas numa determinada ordem, com tempos de duração independentes uns dos outros, sendo as precedências das actividades perfeitamente conhecidas, é inquestionável.

A análise de um projecto deverá começar pela identificação das actividades que o compõem e das relações de precedência existentes entre elas. Neste ponto devemos referir que existem modelos distintos de representação de um projecto a partir de um grafo – nuns as actividades são associadas aos arcos (como fazemos neste trabalho) e noutros são associadas aos vértices. Num modelo em que as actividades estão associadas aos arcos, representa-se um projecto por um grafo orientado ponderado em que cada tarefa corresponde a um arco. Cada etapa do projecto é representada por um vértice. O início do projecto é representado pelo vértice inicial e a sua conclusão é representada por um vértice final. Como o nome indica, o vértice inicial corresponde à etapa onde tudo começa e, por isso, não chega nenhum arco ao vértice inicial, enquanto o vértice final corresponde à etapa onde tudo está concluído e, assim, não pode sair nenhum arco do vértice final. De referir que não pode haver mais nenhum vértice no grafo com estas características. O peso de cada arco corresponde à duração estimada da tarefa que lhe diz respeito. O grafo deve ser desenhado de modo a traduzir fielmente as relações de precedência das tarefas.

Vejamos um pequeno exemplo, talvez pouco real, de um projecto. Uma revista dispõe de 16 horas para editar um número especial sobre um grande acontecimento social. A tabela seguinte mostra quais as tarefas a desenvolver, as durações esperadas e as suas interdependências (adaptado de Feiteira, 2007).

Tarefas	Duração (horas)	Tarefa Antecedente
A. Comprar rolos fotográficos	1	-
B. Preparar câmaras fotográficas	1	A
C. Fotografar a quinta	3	B
D. Fotografar a entrada dos convidados	2	C
E. Fotografar o beberete	1	B
F. Revelar os filmes	2	D, E
G. Preparar a edição da revista	5	D, E
H. Imprimir a revista	3	G, F

Quadro 1

Comecemos por traduzir a tabela anterior por um grafo orientado em que cada tarefa corresponde a um arco e cada vértice a uma etapa do projecto. O vértice 1 corresponde ao início e o vértice 8 ao fim do projecto.

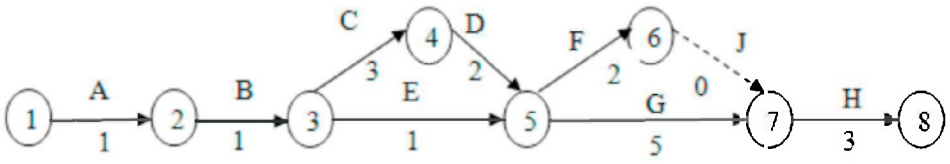


Figura 1

[1]Para sermos mais precisos, o CPM é utilizado quando os tempos são determinísticos sem estar conjugado com o PERT. Este último utiliza como modelo de simplificação o CPM aplicado a tempos médios.

Caderno_2
ter a-feira, 20 de Abril de 2010 1:31:53

Esta representação gráfica tem a grande vantagem de tornar claras as relações de dependência entre as actividades a realizar. Uma das regras para a construção do grafo é não desenhar arcos paralelos, isto é, arcos com o mesmo vértice inicial e o mesmo vértice final. Esta foi a razão que nos levou a incluir a actividade fictícia J com duração nula, a fim de cumprir essa regra e a precedência das actividades G e F sobre a actividade H. A razão desta regra prende-se com a ambiguidade que resultaria na determinação do caminho crítico, como veremos mais adiante. Veremos também, à frente, outras situações em que é necessária a introdução de arcos correspondentes a actividades fictícias. Da análise do grafo podemos perceber melhor como se desenrolam as tarefas necessárias para completar o projecto. Por exemplo, podemos concluir que: as actividades C e E dependem de B; a actividade F só se pode iniciar depois de D e E estarem concluídas; as actividades C e E podem eventualmente ser realizadas simultaneamente, assim como as D e E e as F e G.

A duração do projecto obtém-se determinando o caminho mais longo entre os vértices que representam o seu início e o seu fim. A esse caminho chama-se *caminho crítico* e às actividades correspondentes aos arcos que constituem o *caminho crítico* chamam-se *tarefas* (ou *actividades) críticas*. Estas são as tarefas para as quais um eventual atraso de realização representaria um aumento correspondente da duração global do projecto. Uma primeira tentativa de determinação do *caminho crítico* pode passar pela determinação do comprimento de todos os caminhos entre o vértice 1 e o vértice 8 no grafo orientado da figura 1. Neste grafo existem quatro caminhos distintos entre o vértice inicial e o vértice final, que identificamos no quadro 2, com os seus respectivos comprimentos.

Caminho	Comprimento
A-B-C-D-F-J-H	1+1+3+2+2+0+3=12
A-B-C-D-G-H	1+1+3+2+5+3=15
A-B-E-G-H	1+1+1+5+3=11
A-B-E-F-J-H	1+1+1+2+0+3=8

Quadro 2

O caminho mais longo corresponde ao *caminho crítico*. Assim, o *caminho crítico* é Início-A-B-C-D-G-H-Fim e tem a duração de 15 horas. Logo, a revista consegue ter a edição especial preparada antes das 16 horas. A figura 2 mostra, a vermelho, o *caminho crítico*.

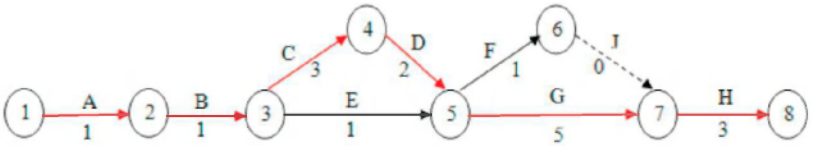


Figura 2

Em grandes projectos, não seria exequível analisar explicitamente todos os caminhos em tempo útil. Usa-se então um algoritmo análogo ao de Dijkstra, mas para determinar o caminho mais longo. Para determinar o caminho crítico, este algoritmo rotula cada vértice, com o tempo mais cedo em que as tarefas precedentes ficam concluídas, ou seja, com o tempo correspondente ao completar da etapa a que o vértice diz respeito. O valor de cada rótulo de um vértice, a vermelho na figura 3, é o máximo entre os valores correspondentes à soma da duração de cada tarefa que termine nesse vértice, com o rótulo do vértice onde cada uma dessas tarefas se iniciou.

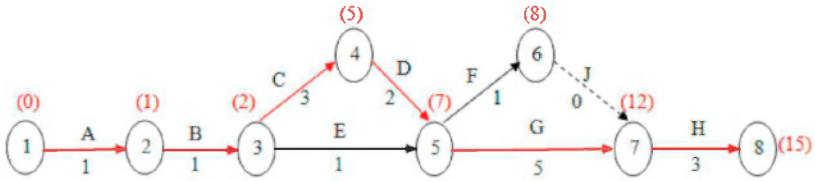


Figura 3

Caderno_2
ter a-feira, 20 de Abril de 2010 1:3:57

Vamos exemplificar com o cálculo do rótulo do vértice 5. Neste vértice terminam duas tarefas: E e D. A tarefa D começa no vértice 4, que tem rótulo 5, e dura 2 unidades de tempo. A soma correspondente à tarefa D é, pois, 7. A tarefa E começa no vértice 3, que tem rótulo 2, e duração 1 unidade de tempo. A soma correspondente à tarefa E é, pois, 3. Repare-se que estas somas representam o tempo mais cedo em que a tarefa fica concluída. Como a etapa 5 só fica concluída quando todas as tarefas que nela terminam estão realizadas, então temos de atribuir ao vértice 5 o rótulo 7. Para os outros vértices, procede-se de forma análoga. Formalmente, o tempo mais cedo (TE)[2], da etapa *j*, é dado em função dos tempos mais cedo dos nós precedentes através de

$$TE_j = \max_i \{TE_i + d_{ij}\} \quad (1)$$

em que d_{ij} representa a duração duma tarefa que se inicia no vértice *i* e termina no vértice *j*, sendo este máximo calculado para todas as tarefas que terminam em *j*. Aplicando (1) à etapa 5, teríamos:

$$TE_5 = \max_i \{TE_3 + d_E, TE_4 + d_D\} = \{2+1,5+2\} = 7$$

Obviamente, o tempo mais cedo do vértice final representa o tempo mínimo para a duração de todo o projecto. A partir dos rótulos dos vértices e do tempo de duração das tarefas, é agora fácil identificar o *caminho crítico*. Com efeito, se $d_{ij} = TE_j - TE_i$, então a tarefa que se inicia no vértice *i* e termina no vértice *j* é crítica.

Este algoritmo utiliza ainda outra função de tempo: o tempo mais tarde. Esta função determina as datas mais tardias para o início de cada etapa que não afectem a data de conclusão do projecto, ou seja, que não interfiram na duração do *caminho crítico*. No exemplo apresentado, de muito pequena dimensão, não se chega a perceber muito bem o interesse desta função, mas em grandes projectos assume grande importância, pois é através dela, como veremos, que se podem calcular as folgas para as actividades não críticas.

Para calcular o **tempo mais tarde** (TL)[3] de uma actividade, começamos no vértice final com o tempo igual à duração do projecto: $TL_7 = TE_7 = 15$. Depois virá $TL_6 = TL_7 - 3 = 12$. Geralmente, temos

$$TL_i = \min_j \{TL_j - d_{ij}\} \quad (2)$$

sendo o mínimo calculado para todas as tarefas que se iniciam no vértice *i*. Aplicando (2) à etapa 5, teríamos:

$$TL_5 = \{TL_6 - d_F, TL_7 - d_G\} = \{12-2,12-5\} = 7$$

Finalmente, costuma representar-se o grafo orientado que sumariza toda esta informação, colocando sobre cada vértice um rectângulo com os seus tempos mais cedo (à esquerda) e mais tarde (à direita).

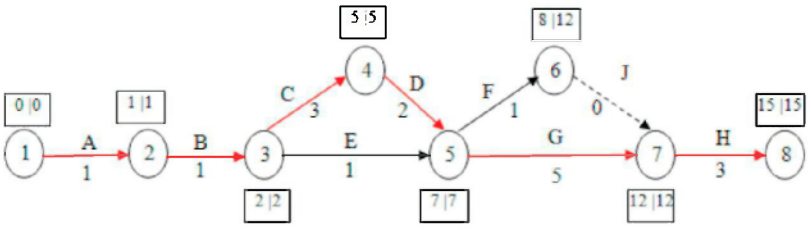


Figura 4

Neste exemplo, que é bastante simples e tem poucas actividades, os tempos mais cedo e mais tarde têm o mesmo valor em quase todos os vértices. Mesmo assim, podemos analisar, por exemplo, a tarefa E. O seu início mais cedo é no tempo 2 e o seu fim mais tarde é no tempo 7. Como a tarefa só tem a duração de 1 unidade de tempo e podemos gastar 5 unidades de tempo na sua execução, isto significa que a tarefa tem 4 unidades de

[2] TE são as iniciais de Time Earlier.
[3] TL são as iniciais de Time Later.

Caderno_2
ter a-feira, 20 de Abril de 2010 1:3 :0

tempo de folga, sem comprometer a duração do projecto. Uma análise semelhante pode ser feita para a tarefa F, que também tem 4 unidades de tempo de folga. Em geral, a utilização das folgas não pode ser cumulativa, isto é, se se usar alguma folga numa actividade não crítica, isso irá afectar a folga das actividades não críticas seguintes. E claro que as actividades críticas não podem sofrer qualquer atraso, pois iria irremediavelmente comprometer o tempo total de duração do projecto.

Vejamos um outro exemplo em que a evidência da utilidade destas duas funções é mais notória e em que se percebe a necessidade de introduzir actividades fictícias para conseguir desenhar o grafo com todas as precedências respeitadas.

Tarefas	A	B	C	D	E	F	G
Duração	10	7	2	2	2	4	5
Tarefa Antecedente	—	—	—	A	A	B	C
Tarefas	H	I	J	K	L	M	N
Duração	3	3	2	3	2	1	1
Tarefa Antecedente	C	G	G	D, E	E, F, I	K, L	E, F, I

Quadro 3

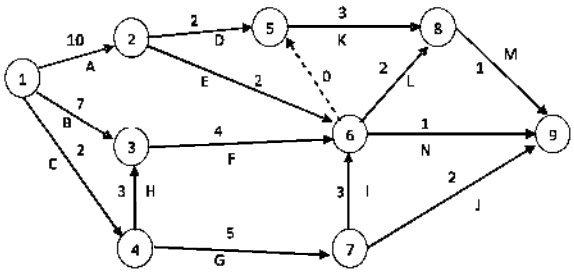


Figura 5

Calculando o tempo mais cedo e o tempo mais tarde de cada vértice, obtemos os valores mostrados na figura 6. Unindo os vértices em que os dois valores dentro dos quadrados são iguais, pelo caminho de maior comprimento, obtém-se o *caminho crítico*, sendo as actividades críticas as que correspondem aos arcos que constituem o caminho e que na figura estão representadas por arcos de linha mais espessa.

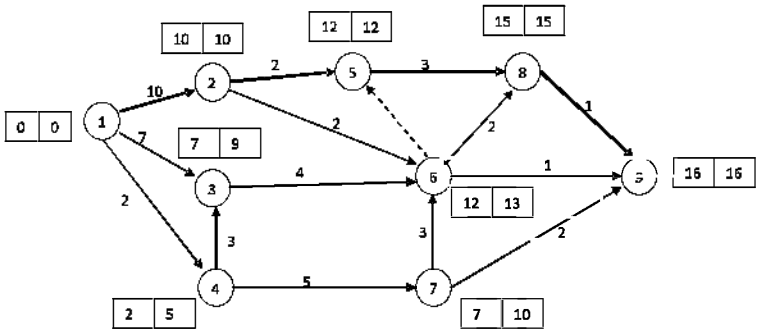


Figura 6

Caderno_3
ter a-feira, 20 de Abril de 2010 15:36:33

Todas as outras actividades, que não são críticas, têm alguma folga. Por exemplo, a actividade (1,3) tem duração igual a 7 unidades e inicia-se no instante 0. Mas, como o tempo mais tarde da etapa 3 é 9, esta actividade não necessita de ser concluída antes do instante 9. Temos assim 2 unidades de tempo de folga para esta tarefa. Claro que se usarmos toda a folga nesta tarefa, a tarefa seguinte, (3, 6), deixa de ter qualquer folga.

Quase tão importante como a determinação das actividades críticas é a gestão das folgas das actividades não críticas. No exemplo apresentado, tratava-se de perceber o que é melhor do ponto de vista económico: usar as duas unidades de folga na tarefa (1, 3) ou usar uma unidade nessa tarefa e outra na tarefa (3, 6) ou ambas na actividade (3, 6).

A incerteza da duração de um projecto

Na vida real nem sempre é muito fácil determinar exactamente o tempo de duração de uma tarefa. Por exemplo, se estivermos a pensar num projecto de decoração (tipo *Querido, Mudei a Casa*) e tivermos atribuído 5 horas para a pintura das paredes, 2 horas para tempo de secagem e 1 hora para pendurar os quadros e, de repente, começar a chover, o tempo de secagem pode passar de 2 para 4 horas. Ou pode estar um dia de sol abrasador e a secagem não precisar de mais de 30 minutos.

Foi a pensar em situações imponderáveis que foi desenvolvido um modelo que tem em conta a incerteza associada às durações das actividades. No caso de se desconhecer a distribuição de probabilidade associada à duração das tarefas, utiliza-se a distribuição Beta, baseada em três estimativas para os tempos das actividades, para descrever a duração das mesmas:

p – estimativa pessimista – estimativa mais pessimista para o tempo necessário à concretização do projecto;

o – estimativa optimista – estimativa mais optimista para o tempo necessário à concretização do projecto;

m – estimativa provável – corresponde à estimativa de tempo mais provável para a concretização do projecto.

Os valores desta distribuição estão inteiramente contidos no intervalo $]\mu-3\sigma, \mu+3\sigma[$, onde μ e σ são respectivamente a média e o desvio-padrão da distribuição. Nestas condições, μ e σ são dados por:

$$\mu = \frac{o + 4m + p}{6} \qquad (3)$$

$$\sigma^2 = \frac{(p-o)^2}{36} \qquad (4)$$

Suponhamos que para o nosso primeiro exemplo, o quadro 4 apresenta os valores para a estimativa optimista (o), a pessimista (p) e a mais provável (m), assim como a respectiva média (μ) e o desvio padrão (σ) [determinados de acordo com (3) e (4), com duas casas decimais].

Tarefas	o	p	m	μ	σ^2
A	0.5	1.5	1	1.00	0.03
B	0.5	1.5	1	1.00	0.03
C	3	4	3	3.00	0.11
D	0.8	2.6	2	1.90	0.09
E	0.7	1.2	1	0.98	0.01
F	1	2.5	2	1.92	0.06
G	4	7	5	5.17	0.25
H	2	3.5	3	2.92	0.06

Quadro 4

Podemos agora, de acordo com o quadro 2, construir o pior cenário para cada um dos caminhos antes descritos.

Caderno_3
terça-feira, 20 de Abril de 2010 15:36:37

Caminho	Comprimento
A-B-C-D-F-J-H	1.5+1.5+4+2.6+2.5+0+3.5=15.6
A-B-C-D-G-H	1.5+1.5+4+2.6+7+3.5=20.1
A-B-E-F-J-H	1.5+1.5+1.2+2.5+0+3.5=10.2
A-B-E-G-H	1.5+1.5+1.2+7+3.5=14.7

Quadro 5

O caminho mais longo, utilizando as estimativas pessimistas, é novamente Início-A-B-C-D-G-H-Fim com a duração de 20.1 horas, ou seja, aproximadamente 1 dia e cerca de 4 horas superior ao limite de tempo disponível para pôr a revista na rua. Em princípio, este é um limite superior para a duração do projecto e é de esperar que a probabilidade de este valor ser atingido seja muito pequena.

A duração total do projecto dada pela soma das durações das actividades críticas, se designarmos por

$$D_T = \sum_{i \in C} D_i$$

(em que C é o conjunto das actividades críticas).

Como cada uma das durações é aleatória, D_T, é também uma variável aleatória com média dada por

$$\mu_T = \sum_{i \in C} \mu_i \qquad (5)$$

em que μ_i representa a duração média da actividade *i*. Admitindo a independência estatística entre as durações das actividades, a variância da duração será dada por

$$\sigma^2_T = \sum_{i \in C}' \sigma^2_i \qquad (6)$$

em que σ_i^2 representa a variância da actividade *i*. A determinação rigorosa da distribuição de probabilidade para a duração do caminho crítico é impraticável na maior parte dos casos devido à sua complexidade. Para simplificar a determinação da duração total do projecto, o PERT recorre ao Teorema do Limite Central, que afirma que a soma de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas pode ser aproximada por uma distribuição normal, desde que o número de parcelas seja suficientemente grande. O número de actividades do nosso exemplo não é elevado, mas mesmo assim vamos aplicar este resultado. Nesta fase da análise, o algoritmo PERT introduz uma hipótese simplificativa: o tempo de realização do projecto é controlado pela duração do *caminho crítico* médio, que consiste no caminho determinado para valores médios das durações das actividades (Tavares *et al*, 1996). Sendo assim, para analisar a rede temos de analisar o *caminho crítico* utilizando os valores médios. Obviamente, esta simplificação poderá fazer com que a nossa análise se afaste da realidade, mas, apesar de tudo, pode fornecer-nos uma boa estimativa.

Calculemos agora, para o nosso exemplo, a duração média e a respectiva variância. Por (5) temos que: μ_T=1+1+3+1.9+5.17+2.92=14.99 e por (6) σ^2_T=0.03+0.03+0.11+0.09+0.25+0.06=0.57. Assumindo que a duração do projecto pode ser descrita por uma distribuição normal, podemos calcular a probabilidade de o projecto terminar antes das *d* unidades de tempo. Suponhamos que pretendemos saber qual é a probabilidade de se concluir o projecto num período entre 14 e 16 horas. Seja *X* o número de horas necessárias para que o projecto fique concluído. Então *X* segue uma distribuição normal com média 14.99 horas e desvio padrão $\sqrt{0.57}$; 0.75 horas, ou seja, $X : N(14.99, 0.75)$. Estamos interessados em calcular

$$P(14<X<16)=P(X<16)-P(X<14)$$

Caderno_3
ter a-feira, 20 de Abril de 2010 15:36:40

Standartizando, obtemos

$$P(z < \frac{16 - 14.99}{0.75}) - P(\frac{14 - 14.99}{0.75}) = \phi(1.34) - 1 + \phi(1.74).$$

Utilizando uma tabela da distribuição normal reduzida, verificamos que para um argumento igual a 1.74, a probabilidade é de 0.9066 e para um argumento de 1.34 a probabilidade é 0.9099. Logo, temos que

$$\phi(1.34)-1+\phi(1.74)=0.8165$$

Poderíamos ainda tentar calcular qual o prazo w que não é ultrapassado com, por exemplo, 95% de probabilidade.

$$P(X < W) = 0.95 \Leftrightarrow P(z < \frac{W - 14.99}{0.75}) = 0.95.$$

O valor de 95% é obtido, aproximadamente, em 1.645. Temos então que

$$\frac{W - 14.99}{0.75} = 1.645 \Leftrightarrow W \approx 16.$$

Segundo as estimativas do quadro 4, o projecto deve estar finalizado, com 95% de probabilidade, num máximo de aproximadamente 16 horas, conforme tinha sido requerido.

Considerações finais

Este algoritmo utiliza simultaneamente duas ferramentas que os alunos de Matemática Aplicada às Ciências Sociais estudam: teoria de grafos e distribuição normal (que pode ser estudada nos modelos de probabilidade). Vemos assim um modo de conjugar dois temas que, normalmente, são ensinados de forma estanque. Neste texto tratámos um exemplo de pequena dimensão, como têm de ser os exemplos tratados na aula, e, por isso, necessariamente pouco real. Devido à sua pequena dimensão, assumimos como verdadeira uma consequência do teorema do limite central que é apenas válida para um maior número de actividades. Aceitámos como válida esta hipótese para mostrar o poder desta conjunção entre grafos e probabilidade. Na aula, com ajuda da calculadora gráfica, podemos facilmente ultrapassar o constrangimento do cálculo da probabilidade pedida.

Pensamos que este é também um bom exemplo para trabalhar com os alunos de Matemática A do 12.º ano como uma aplicação da distribuição normal, mesmo sem formalizar o conceito de grafo. Na realidade, a utilização que se faz dos grafos neste problema é bastante intuitiva e está ao alcance de qualquer aluno, mesmo que não tenha estudado nenhum capítulo a eles dedicado. A utilização deste algoritmo põe em evidência a importância que alguns métodos matemáticos podem desempenhar no apoio às decisões das empresas.

Bibliografia

Crisler, N., Fisher, P., Froelich, G., (1994). *Discrete Mathematics Through Applications*, Nova Iorque, W. H. Freeman and Company.

Departamento do Ensino Secundário, (2001). *Programa de Matemática Aplicada às Ciências Sociais*, Lisboa, Ministério da Educação.

Tavares, L., Oliveira, R., Themido, I., Correia, F., (1996). *Investigação Operacional*, Lisboa, McGraw-Hill.

Feiteira, R., (2007). *Grafos para Todos – Sobre o desenvolvimento da Teoria de Grafos no 3.º Ciclo do Ensino Básico.* (Tese de Mestrado, Universidade do Algarve), Lisboa, APM.

Caderno_3
ter a-feira, 20 de Abril de 2010 15:36:43

Entrevista a Carlos Grosso, coordenador do Centro de Avaliação e Certificação de Manuais Escolares da SPM

por Sílvia Nogal Dias
[Gabinete de Comunicação da SPM]

"O elogio do manual deve ser feito no ensino"

Os primeiros manuais escolares avaliados e certificados pela SPM chegam às escolas no próximo ano lectivo.

Que importância tem a avaliação e certificação de manuais escolares para o sistema de ensino?

Com a possibilidade de haver uma organização científica a cuidar da avaliação e certificação dos manuais, contamos que eles saiam com uma correcção científica máxima. E isso vai ter repercussões no ensino e na aprendizagem da matemática, porque se os conceitos são transmitidos de forma mais correcta também serão apreendidos mais correctamente.

Quais as vantagens de existir uma certificação prévia dos manuais antes de estes serem adoptados pelas escolas?

Os manuais eram publicados com liberdade pelas editoras, embora tivessem de ser submetidos a revisão científica, e o mercado era regulado pelas escolhas das escolas. As editoras e os autores tinham toda a conveniência em que os manuais não tivessem quaisquer erros científicos, mas é difícil detectar pequenas incorrecções que necessitam da revisão científica profunda que este processo consegue.

Quais os principais critérios utilizados para avaliar um manual?

Em primeiro lugar, a correcção científica das definições propostas para os objectos matemáticos e as suas propriedades. A nossa principal preocupação é que estes objectos sejam apresentados de forma clara e rigorosa, com a linguagem adaptada, tanto quanto possível, ao nível etário a que se destinam os manuais. Em segundo lugar, prestar atenção ao encadeamento lógico dos assuntos e verificar se os enunciados traduzem claramente o que se pretende questionar. Depois, verificar se os exercícios estão bem resolvidos. E em último lugar, se há gralhas de português.

É possível fazer-se um balanço da qualidade dos manuais revistos?

Podemos dizer que os manuais que saírem para o mercado com a certificação da SPM cumprem a função que lhes é destinada, que é a de ajudarem os professores a ensinar e os alunos a aprender. Se os manuais de Matemática não apresentarem erros científicos, a sua potencialidade como ferramenta pedagógica é claramente acrescentada. O manual escolar deve ser um pilar fundamental de conhecimentos para professores e alunos. O elogio do manual deve ser feito no ensino.

Quantos manuais foram certificados até agora?

Até agora fizemos a avaliação de oito manuais (dois de cada um dos anos: 1.º, 3.º, 5.º e 7.º). O Ministério da Educação decidiu que, neste primeiro ano do processo, a certificação seria apenas para aqueles anos do Ensino Básico. No próximo ano, já haverá avaliação e certificação de manuais do ensino secundário.

Que importância tem para a SPM ser, em parceria com a SPE, a única entidade certificadora aprovada para todas as disciplinas de Matemática, em todos os anos de escolaridade?

Este é um motivo de orgulho. Somos reconhecidamente competentes para o Ministério da Educação para desempenhar esta função e isso traduz o empenho da SPM em envolver-se neste processo. A SPM tem lutado sempre pela melhoria do ensino da Matemática e não poderia deixar passar esta oportunidade.

Qual é o papel da SPE neste processo?

A SPE colabora nas equipas, fornecendo professores com uma sólida formação em estatística, que terão maior intervenção no que diz respeito aos manuais do ensino secundário.

Há mais algum aspecto deste processo que gostaria de destacar?

O programa aprovado pelo Ministério da Educação criou algumas dificuldades a quem produziu e também a quem avaliou os manuais,

Caderno_3
ter a-feira, 20 de Abril de 2010 15:3 :5 0

nomeadamente quando se refere às operações no conjunto dos números naturais. A adição e a multiplicação são operações fechadas neste conjunto, mas o mesmo não acontece com a subtracção e com a divisão, mesmo tratando-se da divisão inteira. Desde cedo que as crianças compreendem que se a dois retirarmos dois não sobra nenhum, ou que se dividirmos seis em conjuntos de dois, o resto da divisão será zero. É necessário que o zero seja introduzido juntamente com os números naturais, mas o programa, admitindo implicitamente o zero, nunca refere que não faz parte do conjunto dos números naturais. Como tal, devia introduzir-se o conjunto dos "números inteiros absolutos". O programa também refere que as fracções podem ser entendidas como operadores e muitos autores seguiram essa indicação. Mas o número representado por uma fracção não é um operador, apesar de podermos ter operadores associados a fracções. O número três não é um operador mas "o triplo de" já o é. Da mesma forma, não se pode dizer que ½ seja um operador, mas sim "a metade de". ☐

Princípios gerais de actuação da SPM na actividade de Avaliação e Certificação de Manuais Escolares

1. A Sociedade Portuguesa de Matemática orgulha-se de ser uma entidade avaliadora e certificadora de manuais escolares para todos os anos de escolaridade do Ensino Básico e Secundário e para todas as disciplinas de Matemática. Encaramos esta nossa actividade com modéstia, pois sabemos estar a pronunciar-nos sobre um trabalho demorado e paciente de profissionais experientes. Encaramos também esta actividade com precaução, pois sabemos que há escolhas subtis e difíceis e que a redacção de manuais frequentemente obriga os seus autores a opções delicadas. Finalmente, encaramos esta actividade com elevado sentido de responsabilidade, pois sabemos como erros e atrasos de decisão podem comprometer um trabalho de equipas que envolve muito trabalho e muitos recursos.

2. Os manuais escolares são instrumentos fundamentais da aprendizagem. São guias e referências dos professores — por isso têm de ser referências correctas e bem organizadas. São guias e referências dos alunos — por isso devem também ser fáceis de ler e claros nas explicações. São instrumentos de trabalho, com exemplos que professores e alunos devem poder seguir e utilizar e com exercícios adequados e formativos — por isso devem ter exercícios de vários graus de dificuldade e que permitam um trabalho colectivo e individual para assimilação das matérias.

3. A principal preocupação e o principal objectivo da SPM nesta actividade é contribuir, mesmo que modestamente, para que os manuais escolares estejam cientificamente correctos e estejam bem organizados, de acordo com os conteúdos curriculares. A SPM reconhece o papel prioritário dos Autores e conhece a função das editoras; de forma alguma pretende perturbar o seu trabalho.

4. A SPM reconhece aos Autores a liberdade de seguir diferentes orientações pedagógicas, utilizar diferentes meios e propor diferentes actividades. Não pretende interferir nestas opções. Contudo, pode sugerir alternativas perante opções que julgue incoerentes. A SPM reconhece que a diversidade de estilos dos manuais escolares é saudável e altamente positiva.

5. A avaliação promovida pela SPM incide em primeiro lugar na correcção científica dos manuais. É crucial que as definições, argumentos, teoremas, demonstrações, exemplos e explanações estejam cientificamente correctos. A correcção e o rigor têm certamente uma forma de expressão que pode ser adaptada ao nível de escolaridade em causa, mas os erros e imprecisões enganadoras devem ser evitados a todo o custo.

6. Nas definições, notações e outros aspectos básicos, a SPM defende que se siga aquilo que é consensual na comunidade matemática ou, pelo menos, aquilo que tem uma expressão muito significativa na literatura matemática contemporânea. Julgamos importante evitar definições não consagradas e conceitos que não sejam necessários nem correspondam ao que se encontra na literatura.

7. A avaliação promovida pela SPM incide em segundo lugar sobre a coerência dos manuais. Não nos parece admissível que um texto apresente raciocínios com base em conceitos que não estão presentes, nem nos parece aceitável que os temas sejam desenvolvidos sem relação entre eles. A matemática não é uma colecção de conceitos e procedimentos; é uma disciplina rigorosa e coerente, com grande unidade. É nossa função transmitir aos alunos esse rigor, essa coerência, e essa unidade.

8. A avaliação promovida pela SPM incide ainda noutros aspectos. Preocupamo-nos com a correcção linguística e terminológica, com a clareza do texto e das ilustrações e com o rigor das referências bibliográficas, biográficas, históricas e outras.

9. As nossas equipas incluem profissionais diversos e competentes, contando com professores do grau de escolaridade em causa, professores universitários e matemáticos profissionais. Sabemos que o contributo de todos é essencial e que é necessário um contributo conjunto.

10. Os relatórios que elaboramos destinam-se a contribuir para a melhoria dos manuais. Distinguimos os aspectos essenciais, cuja correcção é obrigatória para sua certificação, dos aspectos secundários, de forma ou conteúdo, em que fazemos propostas, mas não pretendemos impor escolhas. Estamos sempre disponíveis para esclarecer os nossos comentários e avançar sugestões. Orientados por este conjunto de princípios, esperamos contribuir para a melhoria dos manuais escolares e, por este meio, para a melhoria do ensino da Matemática em Portugal.

Caderno_1
ter a-feira, 20 de Abril de 2010 15:31:57

por Pedro Martins Rodrigues
[Instituto Superior Técnico]

Uma Expansão-Beta?

Uma expansão-beta é o análogo da usual expansão decimal de um número real, mas numa base não inteira. A letra β (beta) do alfabeto grego é usada habitualmente para designar essa base.

As expansões-beta foram introduzidas pela primeira vez pelo matemático húngaro A. Rényi, em 1957, e têm vindo a ser estudadas até hoje, nomeadamente no contexto da área científica dos Sistemas Dinâmicos. Um aspecto de grande importância e interesse nesse estudo é o da relação entre certas propriedades das expansões-beta e a caracterização aritmética da base β.

Na introdução que se segue começaremos por definir expansão numa base β qualquer, e ao longo deste artigo faremos sistematicamente referência à expansão decimal de um número real, para pôr em evidência as semelhanças e diferenças com o caso de uma base não inteira. Na verdade, a construção da expansão decimal e as suas propriedades são semelhantes às da expansão em qualquer base inteira, pelo que consideraremos este caso mais geral. Quando for necessário frisar que nos estamos a restringir ao caso de a base ser inteira, usaremos a letra b para designar essa base.

Convém, antes de mais, fixar alguma notação: como habitualmente, $\mathbb{R}$ designa o conjunto dos números reais, $\mathbb{Q}$ o dos racionais e $\mathbb{Z}$ o dos inteiros. Dado um número real x, o símbolo $\lfloor x \rfloor$ designa a parte inteira de x, ou seja, $\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$.

Por exemplo, $\lfloor 3{,}14 \rfloor = 3$, $\lfloor \sqrt{2}-1 \rfloor = 0$ e $\lfloor -3{,}001 \rfloor = -4$.

Seja então $\beta > 1$. Vamos concentrar-nos primeiro no caso de um real $0 \leq x_0 < 1$; definimos $e_1 = \lfloor \beta x_0 \rfloor$ e $x_1 = \beta x_0 - e_1$.

Temos obviamente: $0 < e_1 < \beta$ e $0 \leq x_1 < 1$; além disso $x_0 = e_1\beta^{-1} + x_1\beta^{-1}$.

Repetindo a operação,

$e_2 = \lfloor \beta x_1 \rfloor$ e $x_2 = \beta x_1 - e_2$ e substituindo o valor de x_1 na equação anterior,

$x = e_1\beta^{-1} + x_1\beta^{-1} = e_1\beta^{-1} + \beta^{-1}(e_2\beta^{-1} + x_2\beta^{-1}) = e_1\beta^{-1} + e_2\beta^{-2} + x_2\beta^{-2}$.

O leitor notará facilmente que podemos repetir esta operação um qualquer número n de vezes, obtendo a representação $x_0 = e_1\beta^{-1} + e_2\beta^{-2} + \ldots + e_n\beta^{-n} + x_n\beta^{-n}$ ou, numa notação mais precisa e sucinta,

$$x_0 = \sum_{k=1}^{n} e_k\beta^{-k} + x_n\beta^{-n}$$

em que as sucessões e_n e x_n são definidas a partir do termo inicial x_0 pela recorrência $e_n = \lfloor \beta x_{n-1} \rfloor$; $x_n = \beta x_{n-1}$ e satisfazem portanto as desigualdades $0 < e_n < \beta$ e $0 < x_n < 1$. Note-se que no caso de β ser não inteiro, a condição nos coeficientes pode ser escrita como $e_n \in \{0, 1, \ldots, \lfloor \beta \rfloor\}$, enquanto para uma base inteira b a condição é $e_n \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$.

Outra fórmula que decorre facilmente das anteriores e que permite determinar o coeficiente e_n apenas à custa dos anteriores e de x_0 é a seguinte:

$$e_n = \left\lfloor \beta^n \left(x_0 - \sum_{k=1}^{n-1} e_k\beta^{-k} \right) \right\rfloor$$

Caderno_3
terça-feira, 20 de Abril de 2010 15:31:02

De facto, os coeficientes de um x_0, relativamente a uma base β, podem ser definidos como a única sucessão $\{e_n\}$ de inteiros, satisfazendo, para todo o $n>1$, as condições:

1. $0<e_n<\beta$
2. $0<x_0-\sum_{k=1}^{n} e_k\beta^{-k}<\beta^{-n}$.

Como $\beta>1$, fica claro que a sucessão $\sum_{k=1}^{n} e_k\beta^{-k}$ converge para x_0, ou seja, x_0 é a soma da série $\sum_{k\geq 1} e_k\beta^{-k}$ que designamos por expansão de x_0 na base β.

A definição da expansão generaliza-se facilmente a qualquer $x>0$: se $x>1$, existe um inteiro (único) m para o qual se verifica $\beta^{m-1}<x<\beta^{m}$; o número real $x\beta^{-m}$, menor do que 1, tem uma expansão na base β, seja ela $\sum_{k\geq 1} e'_k\beta^{-k}$; a série $\sum_{k\geq 1} e'_k\beta^{-k}=\sum_{k\geq -m+1} e'_{k+m}\beta^{-k}=\sum_{k\geq -m+1} e_j\beta^{-j}$ é então a expansão, na mesma base, de x, definindo a sucessão dos coeficientes para x por $e_j=e'_{j+m}$.

Se não existem dúvidas sobre qual a base considerada, a expansão pode ser representada pela sequência dos coeficientes $\{e_k\}_{k\geq -m+1}$ e se queremos dar conta apenas dos primeiros termos, podemos escrevê-los ordenadamente, sem os índices, usando um símbolo convencional para separar os coeficientes de índice negativo dos restantes, e indicando, por meio de reticências, por exemplo, que se está a apresentar apenas um bloco inicial da expansão.
Temos assim, por exemplo, a familiar expressão
$\sqrt{2}=1.4142135...=1+4(10)^{-1}+1(10)^{-2}+4(10)^{-3}+2(10)^{-4}+1(10)^{-5}+...$ para a expansão na base 10 de $\sqrt{2}$, ou
$\sqrt{2}=1.0110101...=1+2^{-2}+2^{-3}+2^{-5}+2^{-7}+...$ para a expansão do mesmo número na base 2, sendo que na última expressão se omitiram as potências com coeficiente zero.

O leitor é convidado a realizar alguns cálculos do mesmo tipo ou, melhor ainda, a escrever o seu próprio programa para calcular, até uma ordem qualquer, os coeficientes da expansão de um número dado numa determinada base inteira. A possibilidade de desenvolver esse cálculo está, em geral, dependente do grau de precisão com que conhecemos o número em questão (e, muitas vezes, conhecemos esse número exactamente através de uma parte da sua expansão decimal!), mas, no caso, por exemplo, de números da forma $\sqrt[n]{q}$, em que q é racional, o cálculo pode ser feito de modo exacto, com recurso apenas à aritmética dos inteiros. Essa possibilidade estende-se a outros números algébricos (ou seja, raízes de polinómios com coeficientes inteiros) e mesmo ao caso de bases não inteiras mas que sejam números racionais ou algébricos.

Por exemplo, se β for a raiz positiva do polinómio z^2-z-1, temos $\sqrt{2}=1+\beta^{-2}+\beta^{-8}+\beta^{-10}+....$

Evidentemente, nada impede que a expansão de um certo x_0 na base β seja finita, isto é, que para algum n se tenha $x_n=0$ e portanto $e_k=0$ para todo o $k>n$.

Outra situação digna de nota, e a que voltaremos mais adiante, é a de a expansão-β de um determinado número ser (eventualmente) periódica; esclareça-se que uma expansão $\sum_{k>-m+1} e_k\beta^{-k}$ se diz eventualmente periódica, ou apenas periódica, se existir um inteiro n e um inteiro positivo p tais que para todo o $k>n$ se tenha $e_{k+p}=e_k$. Se p for o menor inteiro positivo satisfazendo aquela condição, dizemos que a expansão tem período p, e representamos a sucessão dos coeficientes usando uma barra para indicar o bloco periódico, que se repete indefinidamente: $e_{-m}...e_{n-1}\overline{e_n...e_{n+p-1}}$. Se a sucessão se inicia logo com o bloco periódico, diz-se que é puramente periódica.

Expansões e sistemas dinâmicos simbólicos

Antes de continuarmos, vamos fazer uma breve digressão para pôr em evidência a seguinte interpretação da construção da expansão para $x_0\in[0,1[$: a sucessão $\{x_n\}$ foi definida pela recorrência $x_n=f(x_{n-1})$ onde f designa a função definida por $f:[0,1[\rightarrow[0,1[$ $f(x)=\beta x-\lfloor \beta x\rfloor$, e, portanto, se designarmos por $f^{(n)}$ a composição de f com ela própria, n vezes, deduzimos que $x_n=f^{(n)}(x_0)$. Descrevemos este facto dizendo que a sucessão $\{x_n\}$ constitui a órbita de x_0 por iteração de f[1].

Este é um exemplo relativamente simples de um sistema dinâmico discreto: temos um conjunto, neste caso o intervalo, cujos elementos estão sujeitos a uma transformação, dada aqui pela aplicação da função f. É sugestivo pensar nas sucessivas aplicações da função exactamente em termos temporais, considerando a órbita como um itinerário em que partimos do ponto x_0 e em que, ao fim de n segundos (ou horas ou dias...), nos encontramos no

[1] A definição da função f depende, de facto, do parâmetro β, pelo que, quando se revelar conveniente, podemos designá-la por f_β. Quando não houver dúvidas sobre o parâmetro em questão, seguimos a prática muito comum de não o incluir na notação. Esta observação aplica-se também, aliás, aos coeficientes e_n.

Caderno_3
ter a-feira, 20 de Abril de 2010 15:37:07

ponto x_n. O termo discreto refere-se exactamente ao facto de nesta interpretação o tempo ser discreto e não contínuo.

Uma forma de visualizar a órbita de um ponto x_0 passa por traçar, sobre o gráfico de f, a diagonal do quadrado $[0,1[\times[0,1[$ e determinar os pontos da órbita, começando no ponto $(x_0,0)$, subindo na vertical até encontrar o gráfico de f no ponto $(x_0,f(x_0))=(x_0,x_1)$, seguir depois na horizontal até encontrar a diagonal em (x_1,x_1), voltar a deslocar-se na vertical até ao ponto (x_1,x_2), e assim por diante.

Vejamos agora qual o papel dos coeficientes e_n. Aconselhamos o leitor a acompanhar o seu raciocínio com a observação do gráfico da função f para $b=2$ ou $b=3$, bem como para uma base não inteira, como a do exemplo apresentado anteriormente. Esse gráfico é constituído por $\lfloor\beta\rfloor$ segmentos de recta, com declive β; os extremos inferiores desses segmentos, todos sobre o eixo $y=0$, definem uma partição do intervalo $[0,1[$ em intervalos de monotonia de f. No caso de a base ser um inteiro b, $[0,1[=I_0\cup I_1\cup\ldots I_{b-1}$ onde $I_k=\left[\frac{k}{b},\frac{k+1}{b}\right[$, enquanto no caso de uma base não inteira β temos $[0,1[=I_0\cup I_1\cup\ldots I_{\lfloor\beta\rfloor}$ e os intervalos são definidos da mesma forma, com a única diferença de que $I_{\lfloor\beta\rfloor}=\left[\frac{\lfloor\beta\rfloor}{\beta}.1\right[$.

O coeficiente e_n é determinado pelo intervalo de monotonia a que x_{n-1} pertence, concretamente, $e_n=k\Leftrightarrow x_{n-1}\in I_k$, e à órbita de x_0, constituída por números reais, corresponde uma outra órbita ou itinerário simbólico, dado pela sucessão de intervalos visitados, ou seja, pela sucessão $\{e_n\}$, e torna-se claro que o itinerário simbólico determina completamente o ponto correspondente x_0 e a sua órbita.

O papel da função f no intervalo é representado para o conjunto dos itinerários simbólicos por um operador deslocamento que designamos σ, e que actua numa sucessão deslocando um lugar para a esquerda os elementos da sucessão e eliminando o primeiro: se x tem o itinerário simbólico $\{e_1, e_2,\ldots\}$, então $f(x)$ tem o itinerário $\sigma(\{e_1, e_2,.. \})=\{e_2, e_3,\ldots\}$, o de $f^{(2)}(x)$ é $\sigma^{(2)}(\{e_1, e_2,\ldots\})=\{e_3, e_4,\ldots\}$, etc.

O conjunto das sucessões, munido do operador deslocamento, é usualmente designado por *subshift*. Esta correspondência entre órbitas constituídas por números reais e órbitas simbólicas está no cerne de uma das abordagens mais influentes no estudo dos sistemas dinâmicos, designada por dinâmica simbólica. No nosso caso, temos a propriedade muito particular de esta correspondência se traduzir nas igualdades $x=\sum_{k\geq 1} e_k\beta^{-k}$, $f(x)=\sum_{k\geq 1} e_{k+1}\beta^{-k}$, e assim por diante.

Tal como os números reais do intervalo $[0,1[$ estão ordenados, também as respectivas sucessões simbólicas o estão através da chamada ordem lexicográfica, que não é mais do que a generalização da ordem alfabética usual: dizemos que a sucessão $\{e_n\}$ é menor do que $\{e'_n\}$ se para o primeiro termo em que diferirem se tiver $e_m<e'_m$. E há uma equivalência entre as duas ordens: $x<x'$ se e só se os respectivos itinerários simbólicos $\{e_n\}$ e $\{e'_n\}$ estiverem na mesma relação.

Ainda uma última observação sobre a correspondência entre x_0 e a sua órbita, por um lado, e o respectivo itinerário simbólico, por outro. A sucessão $\{e_n\}$ indica-nos a sucessão de intervalos $I_{e_1}, I_{e_2},\ldots$ sucessivamente visitados pela órbita, mas dá-nos também uma sucessão de intervalos $J_1\supset J_2\supset\ldots$ contendo o ponto inicial x_0: o primeiro termo e_1 indica-nos apenas que $x_0\in I_{e_1}=J_1$; mas $x_1=f(x_0)\in I_{e_2}$ implica que $x_0\in J_1\cap f^{-1}(I_{e_2})=J_2$; e_3 guarda a informação de que $x_2\in I_{e_2}$ mas também de que $x_0\in J_2\cap f^{-2}(I_{e_3})=J_3$.[2] Obtemos assim uma sucessão de intervalos encaixados, cuja intersecção é precisamente o ponto inicial da órbita. Observando o gráfico de f, vemos o que se passa com clareza: em cada passo, dividimos o intervalo J_n já encontrado em β subintervalos e o próximo coeficiente indica-nos qual deles é J_{n+1}. Por exemplo, a expansão na base 2 $\sqrt{2}-1=0\times2^{-1}+1\times2^{-2}+1\times2^{-3}+0\times2^{-4}+1\times2^{-5}+\ldots$ mostra-nos que $x_0=\sqrt{2}-1$ está no intervalo $J_1=I_0=[0,1/2[$, já que $e_1=0$, mas $e_2=1$ diz-nos, mais precisamente, que $x_0\in J_2=[1/4,1/2[$ e assim por diante.

Notemos agora a primeira diferença entre expansões em base inteira e não inteira: no caso de uma base inteira b, os intervalos de monotonia de f_b têm todos o mesmo comprimento e a imagem de qualquer um deles

[2] Deve ficar claro o significado dos expoentes negativos: $f^{-1}(I_{e_2})$ é a imagem inversa do intervalo pela função, ou seja, o conjunto $\{x\in[0,1[: f(x)\in I_{e_2}\}$; do mesmo modo, $f^{-2}(I_{e_3})$ é a imagem inversa deste intervalo pela função composta $f^{(2)}$.

Caderno_3
ter a-f:ira, 20 d: Abril d: 2010 15:37:12

pela função é todo o intervalo [0,1[; pelo contrário, no caso de uma base não inteira, o $I_{\lfloor\beta\rfloor}$ é menor do que os outros e, mais importante, $f_\beta(I_{\lfloor\beta\rfloor})=[0,\beta-\lfloor\beta\rfloor[$.

Esta distinção traduz-se numa diferença muito significativa entre expansões em bases inteiras e expansões em bases não inteiras. No primeiro caso, os coeficientes são *independentes* no seguinte sentido: sejam quais forem os valores de $e_1, e_2,\ldots,e_n$, o coeficiente seguinte e_{n+1} pode assumir qualquer um dos valores admissíveis 0,1,...,b-1.

Pelo contrário, como $\sum_{k\geq 1}\lfloor\beta\rfloor\beta^{-k}=\frac{\lfloor\beta\rfloor}{\beta-1}>1$, existe um natural N tal que $\sum_{k=1}^{N}\lfloor\beta\rfloor\beta^{-k}>1$, e portanto, em qualquer expansão-β, os primeiros N coeficientes não podem ser todos iguais a $\lfloor\beta\rfloor$; os coeficientes não são portanto independentes.

Esta observação, feita já por Rényi, coloca o problema de saber como caracterizar o conjunto, chamemos-lhe X_β, das sucessões $\{e_n\}$ que podem ser a sucessão de coeficientes da expansão-β de algum $x\in[0,1[$.

Comecemos por realçar que para uma base inteira b as expansões construídas nunca terminam com uma infinidade de b-1; este facto, que confirmaremos já adiante, será igualmente familiar no caso b=10: uma dízima infinita terminando por uma infinidade de noves pode ser representada por uma dízima finita (ou, se se preferir, terminando numa infinidade de zeros); por exemplo, 0,7659=0,766.

O mesmo é verdade para expansões em qualquer base inteira b: o "segredo" deste facto está na conhecida fórmula da soma de uma progressão geométrica, já usada no parágrafo anterior: $\sum_{k\geq 0} b^{-k}=\frac{b}{b-1}$. Daqui decorre que se $e_n\neq b-1$ e $e_k=b-1\ \forall k>n$, então $\sum_{k>n}(b-1)b^{-k}=(b-1)b^{-n-1}\sum_{k\geq 0} b^{-k}=b^{-n}$ e portanto
$\sum_{k>n} e_k b^{-k}=e_{-n}b^{-n}+\ldots+e_n b^{-n}+\sum_{k>n}(b-1)b^{-k}=e_{-n}b^{-n}+\ldots+(e_n+1)b^{-n}$.

O que se passa é que a construção da expansão que descrevemos atrás "evita" este tipo de ambiguidade, escolhendo sempre a expansão finita. Recorde-se, de facto, que para um dado ponto inicial x_0, se tem $x_0=\sum_{k=1}^{n} e_k b^{-k}+x_n b^{-n}$ onde $0<x_n<1$; mas, por outro lado, $x_n b^{-n}=\sum_{k>n+1} e_k b^{-k}$ e portanto, pelos cálculos feitos atrás, se os coeficientes nesta última soma fossem todos iguais a b-1, teríamos $x_n=1$.

Esta é de facto a única restrição: o conjunto X_b pode ser caracterizado pelas condições $\{e_n\}\in X_b$ se e só se

1. $0\leq e_n<b$ para todo o $n>1$
2. $\{e_n\}$ não termina com uma infinidade de b-1.

Esta última condição pode ser enunciada com vantagem do seguinte modo: $\sigma^m(\{e_n\})<\overline{b-1}$, para todo o $m>1$, onde a desigualdade deve ser naturalmente entendida no sentido da ordem lexicográfica já referida e $\overline{b-1}$ designa a sucessão constante.

Como vimos já, $\sum_{k\geq 1}(b-1)b^{-k}$ é a "falsa" expansão na base b de 1. Ela pode também ser vista como a expansão limite quando aproximamos 1 pela esquerda; por exemplo, a expansão na base b de $1-b^{-m}$ é, como o leitor facilmente verificará, $\sum_{k=1}^{m}(b-1)b^{-k}$.

Reencontramos um fenómeno semelhante no caso de uma base não inteira. Seja $\beta-\lfloor\beta\rfloor=\sum_{k\geq 1} e'_k\beta^{-k}$ a expansão-β usual; o leitor verificará facilmente que temos a igualdade $1=\lfloor\beta\rfloor\beta^{-1}+\sum_{k\geq 1} e'_k\beta^{-k-1}=\sum_{k\geq 1} e_k\beta^{-k-1}$; caso esta expansão seja infinita, é ela a "falsa" expansão de 1; caso aquela expansão seja finita, é preciso substituí-la por uma outra: de facto, se se tiver $1-\sum_{k=1}^{m} e_k\beta^{-k}$, naturalmente com $e_m<\lfloor\beta\rfloor$, um cálculo simples envolvendo a soma de uma série geométrica com razão β^{-m}, dá-nos

$$1=\sum_{k\geq 1}\beta^{-km}\sum_{j=1}^{m-1} e_j\beta^{-j}+(e_m-1)\beta^{-m}$$

O que se passa é que, enquanto a expansão finita está associada à sucessão de coeficientes $e_1\ldots e_m\overline{0}$, a expansão infinita está associada à sucessão $e_1\ldots(\overline{e_m-1})$, que é menor do que aquela na ordem lexicográfica.

O exemplo mais simples é o da raiz positiva β do polinómio z^2-z-1 : temos nesse caso, como facilmente se verifica,

$$1=\beta^{-1}+\beta^{-2}=\beta^{-1}+\beta^{-3}+\beta^{-4}+\ldots=\sum_{k\geq 1}\beta^{-2k+1}$$

Caderno_3
ter a-feira, 20 de Abril de 2010 15:37:17

Vamos usar a notaçao especial $\sum_{k>1} c_k\beta^k$ para esta "falsa" expansão de 1 na base β.

Pouco depois do artigo inicial de Rényi, o matemático inglês Bill Parry esclareceu completamente, entre outros aspectos, que sucessões de coeficientes podem ocorrer nas expansões-β; usando a notação anterior, $\{e_n\}\in X_\beta$ se e só se, para todo o $n>1$,

1. $0<e_n<\beta$
2. $\sigma^n(\{e_n\})<\{c_n\}$.

É claro que os casos em que a sucessão $\{c_n\}$ é eventualmente periódica, e especialmente quando é estritamente periódica, têm um interesse particular. Prova-se que a sucessão $\{c_n\}$ é estritamente periódica se e só se o conjunto X_β das sucessões de coeficientes das expansões-β é um "*subshift* de tipo finito" e que a sucessão $\{c_n\}$ é eventualmente periódica se e só se o conjunto X_β das sucessões de coeficientes das expansões-β é um "*subshift sofic*". Não podemos debruçar-nos aqui sobre a definição e as propriedades destes importantes sistemas dinâmicos simbólicos, que são, num certo sentido, os mais simples e portanto os que se prestam mais facilmente a um estudo detalhado.

E aqui que surge a interacção com as propriedades aritméticas da base β. Curiosamente, não são os números algebricamente mais simples, ou seja, os racionais, os que dão origem a expansões mais fáceis de caracterizar. No momento actual, parece quase tão difícil estudar as expansões-β para $\beta=\pi$ como para $\beta=3/2$! Para caracterizar as bases não inteiras mais simples temos de entrar, ainda que muito superficialmente, no terreno da Teoria dos Números Algébricos.

Um número β diz-se algébrico se for raiz de um polinómio com coeficientes racionais (em que podemos assumir que o coeficiente do termo de maior grau é 1). Entre todos os polinómios desta forma que têm β como raiz, existe um de grau mínimo, o chamado polinómio minimal de β. As restantes raízes (reais ou complexas) do polinómio minimal de β são os seus conjugados. Finalmente, se os coeficientes do polinómio minimal de β forem inteiros, este é um inteiro algébrico.

Um número de Perron é um inteiro algébrico β real maior do que 1 e maior em módulo do que todos os seus conjugados. Por exemplo, $\sqrt{2}$ é um inteiro algébrico mas não um número de Perron, enquanto $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ é um número de Perron.

Um número de Pisot é um número de Perron cujos conjugados têm todos módulo menor do que 1.

Ora, prova-se que se β é um número de Pisot, então a respectiva sucessão $\{c_n\}$ é (eventualmente ou puramente) periódica e portanto o conjunto X_β é de tipo finito ou, pelo menos, *sofic*.

No sentido inverso, prova-se que se a sucessão $\{c_n\}$ é eventualmente ou puramente periódica, então β é um número de Perron.

Mas existem números de Perron cuja sucessão não é eventualmente periódica, tal como existem outros que têm sucessão eventualmente ou até puramente periódica que não são números de Pisot. Em resumo, a caracterização algébrica ou aritmética das bases em relação à complexidade das expansões associadas é ainda, em parte, um problema em aberto.

Resta-nos mencionar um outro aspecto das expansões-β que se mantém igualmente como tema de intensa investigação: a caracterização, em função da base, dos números com expansão finita ou periódica.

No caso de uma base inteira b, o problema é elementar.

A expansão na base b de x_0 é finita se e só se x_0 é um racional $\frac{p}{q}$ tal que todos os factores primos de q dividem b. De facto, se a expansão for finita, temos $x_0=\sum_{k=1}^{n} e_k b^{-k}=\frac{p_n}{b^n}$, o que mostra que a condição é necessária. Reciprocamente, se $x_0=\frac{p}{q}$ e todos os factores primos de q dividem b, é evidentemente possivel, multiplicando o numerador e o denominador por um factor apropriado, escrever $x_0=\frac{p'}{b^m}$. Como p' tem uma expansão finita na base b, $p'=\sum_{j=0}^{n} a_j b^j$, em que os coeficientes satisfazem $0<a_j<b$, temos $x_0=\sum_{j=0}^{n} a_j b^{j-m}=\sum_{k=m-n}^{m} e_k b^{-k}$, definindo $e_k=a_{m-k}$.

Caderno_3
terça-feira, 20 de Abril de 2010 15:37:22

Por outro lado, como o leitor certamente sabe, pelo menos no caso b=10, a expansão de x_0 na base b é (eventualmente) periódica se e só se x_0 for racional.

Deixamos ao leitor a tarefa de verificar que uma expansão eventualmente periódica, numa base inteira b, corresponde a um número racional. Para provar a recíproca, chamamos a atenção para o facto de que se $x_0=\frac{p}{q}$ temos $b\frac{p}{q}=e_1+x_1$, ou seja, $bp=qe_1+qx_1$, o que implica que qx_1 é um inteiro e o mesmo se passa obviamente para todos os x_n; mas há apenas um número finito de números no intervalo $[0,1[$ que satisfazem essa condição, pelo que a sucessão x_n tem de ser eventualmente periódica, o que implica que também a sucessão e_n seja eventualmente periódica.

Os problemas correspondentes para bases não inteiras são consideravelmente mais difíceis e os resultados mais significativos envolvem, mais uma vez, elementos da Teoria dos Números Algébricos.

Seja β um número algébrico. O conjunto dos números da forma $x=\sum_{j=0}^{m} q_j\beta^j$ constitui um corpo, designado por $\mathbb{Q}[\beta[$. Não é difícil deduzir que se $x=\sum_{k\geq 1} e_k\beta^{-k}$ tem expansão-β periódica, então $x\in\mathbb{Q}[\beta]$.

Os matemáticos Anne Bertrand-Mathis e Klaus Schmidt demonstraram que a recíproca é verdadeira se β for um número de Pisot, ou seja, designando por $Per(\beta)$ o conjunto dos números $x\in[0,1[$ que têm expansão-β (eventualmente ou puramente) periódica, tem-se $Per(\beta)=\mathbb{Q}[\beta]\cap[0,1[$.

Esta propriedade não é exclusiva dos números de Pisot, mas Schmidt provou que se $\mathbb{Q}\cap[0,1[\subset Per(\beta)$, então β é necessariamente um número de Pisot ou de Salem.

Nos últimos anos, a investigação sobre as expansões-β e suas generalizações tem-se mantido extremamente activa através do trabalho de matemáticos como Anne-Bertrand Mathis, Christiane Frougny, David Boyd, Nikita Sidorov ou Shigeki Akiyama, entre outros. Os problemas relacionados com a caracterização das expansões periódicas têm sido, sem dúvida, dos que mais têm concentrado as atenções dos investigadores.

Apesar de as expansões-β serem objecto de estudo de numerosos artigos de investigação e um exemplo constantemente referido, quer no contexto da Teoria dos Sistemas Dinâmicos quer em certos aspectos da Teoria dos Números Algébricos, o autor destas linhas não conhece um livro que faça uma apresentação elementar e razoavelmente completa e actualizada destes interessantes objectos matemáticos. Deixamos, no entanto, ao leitor mais interessado algumas referências bibliográficas que podem servir de ponto de partida para o seu estudo.

Bibliografia:

Blanchard, F., (1989). "β-expansions and Symbolic Dynamics", *Theoretical Computer Science*, 65, 131-141.

Lind, D., Marcus, B., (1995). "Symbolic Dynamics and Coding", *Cambridge University Press*.

Parry, W., (1960). "On the β-expansion of Real Numbers", *Acta Math. Hungar*, 11, 401-416.

Rényi. A., (1957). "Representations for Real Numbers and Their Ergodic Properties", *Acta Math. Hungar.*, 8, 477-493.

Schmidt, K., (1980). "On Periodic Expansions of Pisot Numbers and Salem Numbers", *Bull. London Math. Soc.* 12, no 4, 269-278.

Sidorov, N., (2003). "Arithmetic Dynamics, a survey paper", *Topics in Dynamics and Ergodic Theory*, LMS Notes Ser. 310, 145-189.

Caderno_3
ter a-feira, 20 de Abril de 2010 15:37:26

por **José Ricardo Camões de Oliveira**
[Licenciatura em Física, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto[1]]

Recorrência de Polígonos: Uma Abordagem Dinâmica

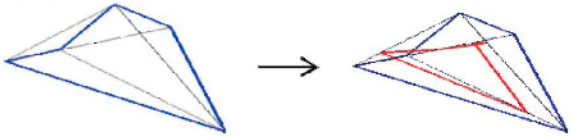
"The world is colors and motion, feelings and thought… and what does math have to do with it?"
Rudy Rucker, *Mind Tools*

1. Introdução

Neste artigo estudamos alguns processos de construção por recorrência de polígonos planos (um polígono é uma união fechada de segmentos de recta sem auto-intersecções), nomeadamente:

Secção dos lados: partindo de um polígono inicial, dividem-se os lados escolhendo um ponto em cada um. Unindo os pontos obtém-se um novo polígono, ao qual se aplica o mesmo processo.

Secção das diagonais: em vez dos lados, dividem-se as diagonais do polígono, sendo os pontos escolhidos os vértices da nova figura (que poderá não ser um polígono).



Sobre estes métodos de criação de sucessões de polígonos, podemos perguntar: convergem? Em caso afirmativo, de que forma e qual o seu limite? Existirão atributos partilhados pelos elementos de uma dada sucessão? Os processos de construção são injectivos (isto é, cada polígono é imagem de, no máximo, um outro) e/ou sobrejectivos (i.e., qualquer polígono é imagem de um outro por aquele processo)? A seguir veremos uma estratégia para responder a estas questões.

2. Abordagem dinâmica

Aos vértices de cada polígono podemos atribuir coordenadas no plano complexo, identificando-se deste modo os polígonos de n lados com vectores em $\mathbb{C}^n$ (tendo sido arbitrada uma ordenação dos vértices – por exemplo, pelo seu argumento principal, em sentido anti-horário – e escolhida a origem do referencial de forma a estar no interior do polígono). Os processos de construção considerados são aplicações lineares a actuarem nestes vectores. Sejam $Z = (z_1,...,z_n)$ o polígono inicial e $Z' = (z'_1,...,z'_n)$ a sua imagem. A secção dos lados pode descrever-se pelas fórmulas $z'_i = p_i z_i + (1-p_i) z_{i+1} \pmod n$, onde $p_i \in]0,1[$ são os factores de corte (localizam os pontos onde se seccionam os lados). Estas fórmulas descrevem uma aplicação linear, $Z' = AZ$, cuja matriz é

[1] Este artigo foi realizado no âmbito do *Programa Gulbenkian Novos Talentos em Matemática* 2007/2008.

Caderno_3
ter a-feira, 20 de Abril de 2010 15:31:10

$$A=\begin{bmatrix} p_1 & 1-p_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & 1-p_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & p_2 & 1-p_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1-p_{n-1} & 1-p_{n-1} \\ 1-p_n & 0 & 0 & 0 & \dots & p_n \end{bmatrix}.$$

A secção das diagonais obtém-se de forma semelhante. No caso das primeiras diagonais, as fórmulas de transformação são $z'_i=p_iz_i+(1-p_i)z_{i+2}(\mathrm{mod}n)$, pelo que a matriz correspondente é

$$A=\begin{bmatrix} p_1 & 0 & 1-p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & 1-p_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & p_2 & 0 & 1-p_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1-p_{n-1} & 0 & 0 & \dots & p_{n-1} & 0 \\ 0 & 1-p_n & 0 & 0 & \dots & p_n \end{bmatrix}.$$

Para n suficientemente grande, podem considerar-se outras diagonais e respectivas matrizes de transformação. Nesta notação podemos descrever o sistema dinâmico associado à sucessão de polígonos $(Z_k)_k$ definido pela recorrência $Z_{k+1} - AZ_k$ através da iteraçao da aplicação A, já que, se for Z_0 o poligono inicial, temos $Z_k=A^kZ_0$, para todo o k.

Em geral, é impraticável calcular directamente potências de uma matriz. No entanto, sabemos que, sobre o corpo complexo, todos os polinómios não constantes se decompõem em factores do primeiro grau e que, pelo menos no caso em que as n raízes do polinómio característico de A são distintas, A é diagonalizável. Assim, se forem $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}$ os seus valores próprios (distintos ou não), poderemos, em muitos casos, encontrar uma base $u_0, \dots, u_{n-1}$ de vectores próprios e, escrevendo o polígono inicial Z_0 e as suas imagens por A nessa base,

$$Z_0=c_0u_0+c_1u_1+\dots+c_{n-1}u_{n-1} \quad (*)$$

obter

$$A^kZ=c_0A^ku_0+c_1A^ku_1+\dots+c_{n-1}A^ku_{n-1}=c_0\lambda^k_0u_0+c_1\lambda^k_1u_1+\dots+c_{n-1}\lambda^k_{n-1}u_{n-1}(\#).$$

O problema fica resolvido se conseguirmos calcular os valores próprios de A, uma base de vectores próprios associados e as coordenadas c_j do polígono inicial nessa base. A dinâmica, como indica (#), depende da evolução das progressões geométricas de razões λ_j.

3. Secção dos lados com factor de corte único

Apliquemos a abordagem delineada anteriormente ao caso mais simples de recorrência de polígonos, o da secção dos lados em que os factores de corte são *todos iguais*. As figuras sugerem relações entre os polígonos da sucessão que verificaremos de seguida.

Conhecendo a forma geral de A, obtêm-se as expressões para os seus valores próprios resolvendo a equação em λ, $det(A - \lambda I)=0$. Ora

$$det[A-\lambda I] = \begin{cases} (p-\lambda)^n-(1-p)^n, \text{ se } n \text{ é par} \\ (p-\lambda)^n+(1-p)^n, \text{ se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Caderno_3
ter a-feira, 20 de Abril de 2010 15:31:33

e portanto $det(A - \lambda I) = 0$ se e só se

$$\begin{cases} \frac{p-\lambda^n}{1-p} = 1, \text{ no caso de } n \text{ é par} \\ \frac{p-\lambda^n}{p-1} = 1, \text{ no caso de } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{cases} \lambda_j = p - (1-p)\beta_j, \text{ se } n \text{ é par} \\ \lambda_j = p + (1-p)\beta_j, \text{ se } n \text{ é ímpar} \end{cases} \quad (\sim)$$

onde os β_j representam as raízes complexas da unidade: $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = e^{2\pi i/n}$, $\beta_j = (\beta_1)^j$. Notemos que

$$|\lambda_j| \leq p + (1-p)|\beta_j| = 1, \text{ e que } |\lambda_j| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \beta_j = -1, \text{ se } n \text{ é par} \\ \beta_j = 1, \text{ se } n \text{ é ímpar} \end{cases} \Leftrightarrow \lambda_j = 1$$

ou seja, 1 é sempre um valor próprio simples, e todos os restantes têm módulo inferior a 1, pelo que a sucessão (#) converge: de facto, a contribuição do valor próprio 1 mantém-se constante, enquanto as restantes tendem para 0 por iterações de A.

Os vectores próprios associados a cada λ_j são $u_j = (1, -\beta_j, \beta_j^2, \ldots, \beta_j^{n-2}, -\beta_j^{n-1})$ para n par, e $u_j = (1, \beta_j, \beta_j^2, \ldots, \beta_j^{n-2}, \beta_j^{n-1})$ para n ímpar. Com estes dados, podemos estudar em detalhe o comportamento assimptótico do sistema dinâmico.

Resultado 1: *O polígono-limite da sucessão é um ponto localizado no centro geométrico do polígono inicial.*

Demonstração: Basta calcular o limite pela fórmula (#), tendo em conta a posição do valor próprio 1 para n par ou ímpar, isto é, que

$$\lim_{k\to\infty}(A^k Z_0) = \lim_{k\to\infty}(c_0\lambda_0^k u_0 + c_1\lambda_1^k u_1 + \ldots + c_{n-1}\lambda_{n-1}^k u_{n-1}) = \begin{cases} c_{n/2}u_{n/2}, \text{ se } n \text{ é par} \\ c_0 u_0, \text{ se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Observe-se que tanto $u_{n/2}$ (n par) como u_0 (n ímpar) são iguais a (1, ..., 1), concluindo-se daí que o polígono-limite é um ponto. Calculemos as constantes c_0 e $c_{n/2}$ a partir da equação (*):

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ \ldots \\ z_n \end{bmatrix} = c_0 \begin{bmatrix} u^1_0 \\ \ldots \\ u^n_0 \end{bmatrix} + \ldots + c_{n-1} \begin{bmatrix} u^1_{n-1} \\ \ldots \\ u^{n-1}_n \end{bmatrix}$$

Para n é par: $z_k = (-1)^{k-1}\sum_{j=0}^{n-1} c_j(\beta_j)^{k-}$

Para n é ímpar: $z_k = \sum_{j=1}^{n-1} c_j(\beta_j)^{k-1}$.

Somando todas as equações, obtém-se $z_1 + \ldots + z_n = c_0 s_0 + c_1 s_1 + \ldots + c_{n-1}s_{n-1}$, onde S_j é a soma

$$\sum_{r=0}^{n-1}(-\beta_j)^r = \begin{cases} \frac{1-(-\beta_j)^n}{1+\beta_j} = 0, \text{ se } \beta_j \neq -1 \\ n, \text{ se } \beta_j = -1 \end{cases}, \text{ se } n \text{ é par,}$$

e

$$\sum_{r=0}^{n-1}\beta_j^r = \begin{cases} \frac{1-\beta_j^n}{1-\beta_j} = 0, \text{ se } \beta_j \neq 1 \\ n, \text{ se } \beta_j = -1 \end{cases}, \text{ se } n \text{ é ímpar,}$$

concluindo-se que as constantes c_0 (ímpar) e $c_{n/2}$ (par) são iguais a $\frac{z_1+\ldots+z_n}{n}$, o centro do polígono inicial.

A seguir, estudaremos os casos simples, de triângulos ($n = 3$) e quadriláteros ($n = 4$); esta análise é facilmente generalizável para valores de n superiores. Daqui em diante, consideraremos os polígonos centrados na origem do plano (ou seja, $\frac{z_1+\ldots+z_n}{n} = 0$, logo c_0 (n ímpar) e $c_{n/2}$ (n par) são nulos).

Caderno_3
ter a-feira, 20 de Abril de 2010 15:31:35

3.1 Triângulos

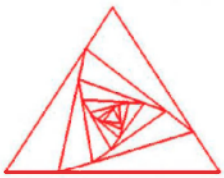
Os valores próprios são neste caso $\lambda_0 = 1, \lambda_1 = p + (1-p)\beta_1, \lambda_2 = \overline{\lambda}_1 = p + (1-p)\overline{\beta}_1$, com $\beta_1 = e^{2\pi i/3}$. Na equação (#), $c_0 = 0$ e o termo associado a λ_0 é nulo; além disso, sendo $\lambda_1 = |\lambda_1| e^{i\alpha}$, vem, após simplificações,

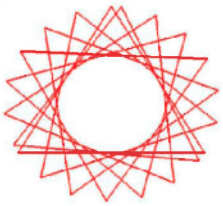
$$A^k z = |\lambda_1|^k e^{ik\alpha} c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ \beta_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix} + e^{-ik\alpha} c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ \beta_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix}. \qquad (1)$$

Nesta forma, a equação (#) indica a existência de contracção do triângulo à taxa $|\lambda_1|$ e de uma rotação de ângulo α. De facto, calculando a partir de (*) as constantes c_1 e c_2, tem-se

$$A^k z = |\lambda_1|^k \begin{bmatrix} X_z \cos(k\alpha + \phi_z) + iY_z \cos(k\alpha + \psi_z) \\ X_z \cos(k\alpha + \phi_z + 2\frac{\pi}{3}) + iY_z \cos(k\alpha + \psi_z + 2\frac{\pi}{3}) \\ X_z \cos(k\alpha + \phi_z + 4\frac{\pi}{3}) + iY_z \cos(k\alpha + \psi_z + 4\frac{\pi}{3}) \end{bmatrix} \qquad (2)$$

sendo X_z, Y_z, ϕ_z e ψ_z constantes reais dependentes do polígono inicial. Assim, a menos da homotetia de razão $|\lambda_1|$, em cada iteração de A o triângulo roda inscrito numa elipse (eventualmente degenerada se $\phi_z = \psi_z$; contudo este caso corresponde a um triângulo inicial degenerado num segmento de recta, o que não nos interessa neste estudo) parametrizada por k. Como a diferença de fase entre os pontos se mantém constante ($2\pi/3$ entre pontos consecutivos), os triângulos imagem permanecem semelhantes entre si. As figuras mostram as 6 primeiras iterações, quando p=3/4, de um triângulo com (esquerda) e sem (direita) o termo $|\lambda_1|^k$.





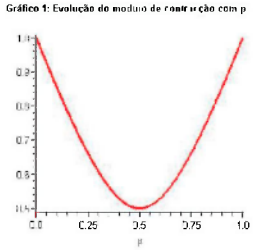
Podemos fazer algumas considerações adicionais para este caso:

(a) A função A é bijectiva, já que o seu determinante é o produto dos valores próprios não nulos.

(b) O termo contractivo determina a rapidez de convergência. E a função

$$|\lambda_1| = \sqrt{3p^2 - 3p + 1}$$

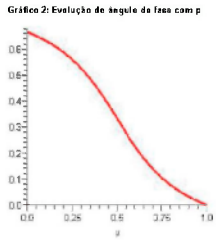
é mínima quando p=1/2, ou seja, no caso da bissecção dos lados.



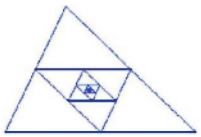
c) O ângulo α é determinado por p: se $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ e $A(\theta) = 2\arctan\frac{\sin\theta}{\cos\theta + 1}, \theta \in [0, 2\pi[$ então

$$\alpha = 2\arctan\frac{\frac{\Im(\lambda_1)}{\lambda_1}}{\frac{\Re(\lambda_1)}{|\lambda_1|} + 1} = 2\arctan\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1-p}{\sqrt{3p^2 - 3p + 1} + \frac{3p-1}{2}}$$

Caderno_3
ter a-feira, 20 de Abril de 2010 15:31:38



de onde se deduz que a órbita de um triângulo pode, a menos de homotetia, ser finita ou infinita. De facto, se $\alpha=2m\pi/n$, com m e n inteiros, a sucessão de triângulos é periódica, contendo um número finito de triângulos distintos. Se $\alpha 2\pi$ é irracional, os vértices descrevem, a menos de homotetia, uma órbita densa na elipse.



Exemplos para órbitas finitas são $p = 1/3$, $1/2$ ou $2/3$; se $p = 1/2$, a rotação correspondente é de ângulo π, ou seja, a órbita de um triângulo por bissecção dos lados contém apenas dois elementos, o triângulo original e o que se obtém após essa rotação.

3.2 Quadriláteros

Os valores próprios de A são agora $\lambda_0=2p-1$, $\lambda_1=p-(1-p)\,i$, $\lambda_2=1$, $\lambda_3=p+(1-p)\,i$. A contribuição do valor próprio 1 é eliminada por escolha de coordenadas; além de um par de complexos conjugados, como antes, temos agora também um valor próprio real (λ_0), que tem a propriedade de se anular quando $p = ½$. Analogamente ao caso anterior

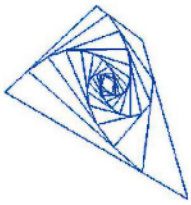
$$A^k z = (2p-1)^k c_0 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + |\lambda_1|^k e^{ik\alpha} c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \\ i \end{bmatrix} + e^{-ik\alpha} c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{bmatrix} =$$

(calculando $c_1=\frac{1}{4}(z_1+iz_2-z_3-iz_4)$, $c_3=\frac{1}{4}(z_1-iz_2-z_3+iz_4)$, e escolhendo constantes reais X_z, Y_z, ϕ_z e ψ_z adequadas)

$$= (2p-1)^k c_0 u_0 + |\lambda_1|^k \begin{bmatrix} X_z\cos(k\alpha+\phi_z) + iY_z\cos(k\alpha+\psi_z) \\ X_z\cos(k\alpha+\phi_z-\frac{\pi}{2}) + iY_z\cos(k\alpha+\psi_z-\frac{\pi}{2}) \\ X_z\cos(k\alpha+\phi_z-\pi) + iY_z\cos(k\alpha+\psi_z-\pi) \\ X_z\cos(k\alpha+\phi_z-3\frac{\pi}{2}) + iY_z\cos(k\alpha+\psi_z-3\frac{\pi}{2}) \end{bmatrix}$$

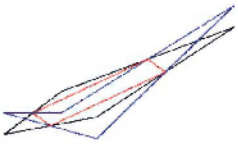
A principal diferença com a dinâmica dos triângulos é a intervenção do termo associado a λ_0, que no entanto desaparece quando $p = ½$ (bissecção dos lados). Assim, observa-se que o quadrilátero, a menos de módulo, descreve uma elipse em que vértices consecutivos estão desfasados de $\pi/2$ e, como os lados z_i e z_{i-2} têm entre si uma diferença de fase de π (sendo portanto simétricos), o quadrilátero formado tem duas diagonais perpendiculares que se intersectam no centro do mesmo, formando um paralelogramo. Portanto, qualquer quadrilátero ao qual se efectue a bissecção dos lados origina um paralelogramo.

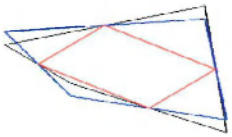
Se $p \neq ½$, em geral esta afirmação não é verdadeira: a figura à esquerda, onde se iterou um quadrilátero com factor de corte 3/4, fornece um contra-exemplo. Mas um argumento simples permite mostrar que, mesmo nesse caso, os polígonos formados tendem para paralelogramos. De facto, $|\lambda_1|$ é sempre maior do que $|\lambda_0|$ (como se pode ver no gráfico seguinte), pelo que, no limite, quando $k\to\infty$, a razão $(|\lambda_0|/|\lambda_1|)^k$ tende para 0, isto é, a contribuição do termo associado ao valor próprio real torna-se desprezável em relação à dos complexos conjugados, e o sistema tende para um cenário semelhante ao que se obtém com a bissecção.



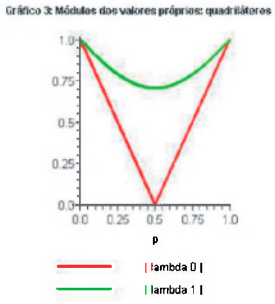
Caderno_4
ter a-feira, 20 de Abril de 2010 16:31:36

Como existe um valor próprio nulo, a função de transformação não é bijectiva: A não é sobrejectiva porque Im A = {paralelogramos}, e não é injectiva porque a coordenada c_0 não tem influência na função (e, portanto, se adicionarmos ao polígono Z_0 o vector $wu_0 = (w, -w, w, -w)$, $w \in \mathbb{C}$, a sua imagem mantém-se).



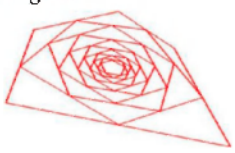


Mais uma vez se constata que a rapidez de convergência é máxima quando $p = ½$; veremos adiante que este é um resultado geral.



3.3 Polígonos com $n > 4$

Como anteriormente, as sucessões de polígonos com maior número de lados podem analisar-se através dos valores próprios das matrizes de transformação correspondentes. Por exemplo, no caso dos pentágonos, os valores próprios são $\lambda_0=1$, $\lambda_1=p+(1-p)\beta_1$, $\lambda_2=p+(1-p)\beta_2$, $\lambda_3=p+(1-p)\beta_3=\lambda_2$, $\lambda_4=p+(1-p)\beta_4=\lambda_1$ ou seja, não existe nenhum valor próprio nulo (A é bijectiva neste caso), existem (para além de 1) dois pares de complexos conjugados (pelo que, em geral, não é possível escrever A como composta de uma homotetia e uma rotação, como nos triângulos) e o pentágono imagem não é semelhante ao original.



No entanto, analisando os módulos dos valores próprios em função de p, verificamos que $|\lambda_1|$ é sempre superior a $|\lambda_2|$, pelo que, quando se itera A um número suficientemente grande de vezes, o movimento do sistema associado a λ_2 torna-se desprezável, e o sistema tende assimptoticamente para uma dinâmica semelhante à dos triângulos. De resto, é fácil observar que para qualquer n existe um valor próprio que domina: os valores próprios são dados pela igualdade $\lambda_j=p\pm(1-p)\beta_j$ e o seu módulo é tanto maior quanto mais próximos estiverem os seus argumentos. Assim, para n par, o valor próprio de módulo superior corresponde à raiz de 1 com argumento mais próximo de π, enquanto para n ímpar ele corresponde à raiz com argumento mais próximo de 0.

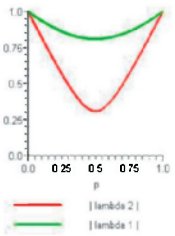
3.4 Resultados gerais

Apresentamos agora algumas conclusões para a secção dos lados com p único.

Resultado 2: *A bissecção dos lados corresponde à convergência mais rápida da sucessão de polígonos.*

Caderno_4
ter a-feira, 20 de Abril de 2010 16:31:39

Gráfico 4: Módulos dos valores próprios - pentágonos



Demonstração: Relembrando a fórmula (~) para os valores próprios, podemos escrever $\beta_j = a_j + b_j\, i$, com $a_j^2+b_j^2=1$. Sabemos que a convergência da sucessão é tanto mais rápida quanto menores os módulos dos valores próprios (excepto o 1), logo o problema reduz-se a minimizar $|\lambda_j|^2$. Uma vez que

$$\lambda_j=[p\pm(1-p)a_j]\pm[(1-p)b_j]i$$
$$|\lambda_j|^2=2p^2(1+a_j)-2p(1+a_j)+1$$

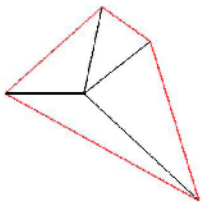
esta função de p representa uma parábola com concavidade voltada para cima (uma vez que $a_j<1$) cujo vértice (que corresponde ao mínimo absoluto) tem abcissa $p^*=½$.

Resultado 3: *A secção dos lados é uma aplicação bijectiva, excepto no caso da bissecção em polígonos com número par de lados.*

Demonstração: A é bijectiva desde que não haja valores próprios nulos. Mas nós já vimos que, para n ímpar, existe um valor próprio igual a 1, e os restantes têm parte imaginária $(1-p)\,\mathrm{Im}\,(\beta_j)$, que é não nula para p em $]0,1[$. Para n par, mais uma vez os valores próprios com parte imaginária nunca se anulam, mas existem dois reais (1 e $2p-1$), um dos quais se anula para $p = 1/2$. Nesse caso, uma translação associada ao vector próprio $u_0=(1,-1,\ldots,1,-1)$ deixa invariante a imagem por A de cada polígono $Z_0=(z_1,\ldots,z_n)$, logo $A^{-1}(A\,Z_0)=\{(z_1+w, z_2-w,\ldots, z_{n-1}+w, z_n-w), w\in\mathbb{C}\}$.

O resultado seguinte está relacionado com uma questão natural quando se estudam polígonos, o cálculo de áreas. Queremos saber qual a variação de área das sucessivas imagens por secção dos lados.

Resultado 4: *Para valores de k suficientemente grandes, Area* $(A^{k+1}\,Z_0) \approx |\lambda_D|^2$ *Area* $(A^k\,Z_0)$, *onde* λ_D *é o valor próprio distinto de 1 e de maior módulo de A. A aproximação é uma igualdade para todo o k no caso de triângulos e quadriláteros.*



Demonstração: Comecemos pela segunda parte do resultado. Para calcular a área de um polígono genérico conhecendo as posições dos vértices no plano, e supondo-se que o polígono está centrado em 0, podemos dividi-lo em triângulos de áreas S_i como se mostra à direita, e calcular a sua área como a soma das S_i, sendo

$$S=\tfrac{1}{2}\,det[z_i\;\; z_{i+1}]=\tfrac{1}{2}\,det\begin{bmatrix}x_i & x_{i+1}\\ y_i & y_{i+1}\end{bmatrix}.$$

Dado um polígono Z de área S, podemos calcular a área da sua imagem, S', recordando que $z'_i=pz_i+(1-p)z_{i+1}$. Por exemplo:

(a) No caso dos *triângulos*, temos

$$S'=\sum_{i=1}^{3}\tfrac{1}{2}\,det[z'_i\;\; z'_{i+1}]=\tfrac{1}{2}\,(det[pz_1+(1-p)z_2\;\; pz_2+(1-p)z_3]+det[pz_2+(1-p)z_3\;\; pz_3+(1-p)z_1]+$$
$$det[pz_3+(1-p)z_1\;\; pz_1+(1-p)z_2]=$$
$$=p^2+(1-p)^2-p(1-p)S=(3p^2-3p+1)S=|\lambda_D|^2S.$$

(b) Para os *quadriláteros*,

$$S'=\sum_{i=1}^{4}\tfrac{1}{2}\,det[z'_i\;\; z'_{i+1}]=\tfrac{1}{2}\,(det[pz_1+(1-p)z_2\;\; pz_2+(1-p)z_3]+det[pz_2+(1-p)z_3\;\; pz_3+(1-p)z_4]+$$
$$+det[pz_3+(1-p)z_4\;\; pz_4+(1-p)z_1]+det[pz_4+(1-p)z_1\;\; pz_1+(1-p)z_2]=$$
$$=p^2+(1-p)^2S=(2p^2-2p+1)S=|\lambda_D|^2S.$$

Caderno_4
ter a-feira, 20 de Abril de 2010 16:31:42

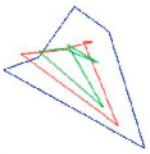
Este resultado não é inesperado, pois já vimos que para triângulos o sistema dinâmico se descreve como uma contracção de razão $|\lambda_D|$, que reduz a área de qualquer polígono a uma taxa $|\lambda_D|^2$, e uma rotação em torno do seu centro geométrico, que não a altera. No entanto, no caso dos quadriláteros, bem como no de quaisquer polígonos com número par de lados, existe um valor próprio real além do 1, o que poderia significar um desvio relativamente ao que intuímos. Contudo, uma translação associada ao vector próprio correspondente a λ_0, $u_0=(1,-1,...,1,-1)$ não altera as áreas.

Generalizemos estas conclusões para polígonos com $2m+1$ lados, $m>1$: existem m pares de valores próprios complexos conjugados, aos quais corresponde o mesmo número de movimentos contracção/rotação somados. Como um valor próprio λ_D é dominante, para um número de iterações suficientemente grande apenas o movimento associado a este vector é visível, resultando daí a fórmula aproximada para as áreas.

4. Secção das diagonais com factor de corte único

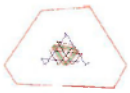
Comecemos por notar que devemos considerar $n>5$ para termos diagonais suficientes. Esta construção tem resultados muito distintos dos observados para a secção dos lados, por duas razões:

(a) A imagem de um polígono por secção das diagonais pode não ser um polígono (i.e., podem ocorrer auto-intersecções nas figuras geradas); algumas questões, como a das áreas, perdem assim significado.

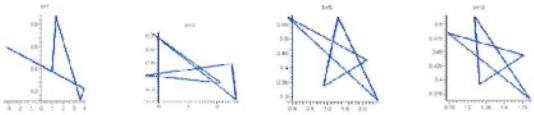


(b) Como veremos, embora a sucessão continue a ser convergente, o limite não é necessariamente um ponto, como acontecia anteriormente. De facto, o problema da convergência é o mais interessante neste caso.

O limite é um segmento de recta.



O limite é um triângulo.



Estudemos com mais detalhe a secção das primeiras diagonais, dada por

$$z'_i=pz_i+(1-p)z_{i+2} (\mathrm{mod} n).$$

Já conhecemos a matriz de transformação A (secção 2); resta-nos calcular os seus valores e vectores próprios atendendo à paridade de n.

4.1 n ímpar

As soluções da equação característica de A, $det[A-\lambda I]=(p-\lambda)^n+(1-p)^n=0$, são $\lambda_j=p+(1-p)\beta_j$, com vectores próprios

$u_j=1, \beta_j^{\frac{n+1}{2}}, \beta_j, \beta_j^{\frac{n+1}{2}+1}, ..., \beta_j^{n-1}, \beta_j^{\frac{n+1}{2}-1}$. Assim, deduzimos novamente que existe um único valor próprio 1 (é também fácil confirmar que não existem valores próprios nulos, logo a transformação é bijectiva) e que a contribuição de todos os outros tende para 0 pelas iterações de A (a fórmula é a mesma), logo basta-nos procurar o vector próprio associado a λ_0, que é $u_0=(1,...,1)$.

Resultado 5: *O limite da sucessão de polígonos por secção das 1.as diagonais com p único e número ímpar de lados é um ponto, o centro geométrico do polígono inicial.*

Demonstração: A segunda parte da afirmação prova-se notando que o centro geométrico é preservado entre iterações: $z'_1+...+z'_n=pz_1+(1-p)z_3+pz_2+(1-p)z_4+...+pz_n+(1-p)z_2=z_1+...+z_n$. Para além de calcularmos o limite da

Caderno_4
terça-feira, 20 de Abril de 2010 16:31:46

sucessão, podemos ainda determinar a forma aproximada dos iterados de A após um número grande de iterações, situação em que só interessa a contribuição do valor próprio dominante λ_1. Sendo $\beta_1=e^{2i/n}$, concluímos que o polígono-limite é determinado (a menos de homotetia) pelo vector próprio associado a λ_1, que designámos por u_1,

$$A^k Z \underset{k\to\infty}{\sim} 1, \beta_1^{\frac{n+1}{2}}, \beta_1, \beta_1^{\frac{n+1}{2}+1}, \ldots, \beta_1^{n-1}, \beta_1^{\frac{n-1}{2}-1}.$$

Por exemplo, para $n = 5$, temos $u_1=\beta_1^3, \beta_1, \beta_1^4, \beta_1^2$. Comparando os argumentos de cada coordenada, é fácil ver que o polígono-limite é uma estrela de cinco pontas. Mais geralmente, o polígono-limite, quando n é ímpar, é uma estrela de n pontas. As figuras anteriores mostram iterações de um pentágono.

4.2 n par

A equação característica de A é agora $[(p - \lambda)^2 - (p - 1)^{\frac{n}{2}}]^2 = 0$, ou seja, $\frac{p - \lambda^{\frac{n}{2}}}{p - 1} = 1$. As diferenças em relação ao caso ímpar são notórias: em primeiro lugar, todos os valores próprios têm multiplicidade 2, correspondendo, a cada um, dois vectores próprios linearmente independentes dados pela expressão

$$\lambda_k = p + (1 - p)\,\beta_{2k},\ k \in \{0, 1, \ldots, \tfrac{n}{2} - 1\}.$$

Um dos valores próprios é 1 e, no caso em que $n/2$ é par, há um (único) valor próprio que se pode anular, que é $\lambda_{n/4} = 2p - 1$, dando origem a uma dinâmica não bijectiva. Para decidirmos sobre a questão da convergência, determinemos os dois vectores próprios linearmente independentes associados a cada λ_k

$$u_k = \{(0, 1, 0, \beta_{2k}, \ldots, 0, \beta_{2k}^{n/2-1}), (1, 0, \beta_{2k}, \ldots, \beta_{2k}^{n/2-1}, 0)\}.$$

Podemos agora conferir o efeito da multiplicidade 2 na convergência da sucessão: substituindo valores adequados, vem

$$\lim_{k\to\infty} (A^k Z_0) = \alpha u_{01} + \beta u_{02} = \alpha, \beta, \ldots, \alpha, \beta$$

onde os caracteres gregos são as coordenadas de Z_0 na base formada por $\{u_{kl}\}_{l \in \{0,1\}}^{k \in \{0,\ldots,n/2-1\}}$. Atentando nestas expressões, conclui-se que, dependendo de as duas coordenadas arbitrárias serem ou não iguais, a sucessão pode convergir para um ponto, mas o limite é em geral um segmento de recta "contado $n/2$ vezes".

O estudo que aqui foi feito para a secção das primeiras diagonais pode ser repetido para as segundas, terceiras, etc., se for possível calcular os valores próprios das diferentes matrizes de transformação. Por exemplo, na secção das segundas diagonais, existem situações em que os valores próprios têm multiplicidade 3, o que justifica (por argumentos semelhantes aos já usados) a existência de triângulos como polígonos-limite nestes casos.

5. O caso geral – factores de corte distintos

Ao considerar n factores de corte (um para cada lado), em vez de apenas um, a abordagem que temos seguido, dependente do cálculo dos valores/vectores próprios da matriz da transformação, pode não ter sucesso. Estudemos por isso apenas a secção dos lados. Existe desde logo uma diferença importante com o cenário anterior: a assimetria no corte poderá significar que o limite da sucessão de polígonos deixe de ser o centro geométrico de Z_0.

Já sabemos que a matriz correspondente é

$$A = \begin{bmatrix} p_1 & 1-p_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & p_2 & 1-p_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & p_2 & 1-p_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_{n-1} & 1-p_{n-1} \\ 1-p_n & 0 & 0 & 0 & \ldots & p_n \end{bmatrix}$$

Caderno_4
terça-feira, 20 de Abril de 2010 16:31:50

e a equação característica a analisar é

$$(p_1-\lambda)\ldots(p_n-\lambda)=(-1)^{n+1}(1-p_1)\ldots(1-p_n)=0$$

que, tendo grau n, pode ser resolvida explicitamente para valores baixos de n (até 4) mas não admite as soluções simples que foram obtidas para p único (e pode não ter solução por radicais para $n>5$). Analisando a equação anterior, podemos, todavia, tirar algumas conclusões imediatas:

(a) $\lambda=1$ é valor próprio simples, para todo o p_i e todo o n;

(b) a solução $\lambda=0$ existe (e portanto A não é bijectiva) somente quando n é par e $p_1\ldots p_n=(1-p_1)\ldots(1-p_n)=0$; note-se que, se fizermos $p_i=p$, para todo o i, obtemos a condição $p=½$.

Analisemos o caso dos triângulos, comparando a dinâmica com a de factor de corte único.

5.1 Triângulos – considerações gerais

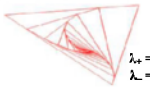
Dividindo a equação característica por $\lambda-1$ obtemos a equação de 2.º grau

$$\lambda^2+(1-p_1-p_2-p_3)\lambda+p_1p_2p_3+(1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)=0$$

cujas soluções são

$$\lambda_\pm=\frac{1}{2}\,p_1+p_2+p_3-1\pm\sqrt{p_1^2+p_2^2+p_3^2+2(p_1+p_2+p_3)-2(p_1p_2+p_2p_3+p_1p_3)-3}\,.$$

A equação $(A-\lambda_\pm I_n)\,u=0$ dá-nos os vectores próprios $u_\pm=\begin{pmatrix}\lambda_\pm-p_1 & 1-p_3\\ 1-p_1 & \lambda_\pm-p_3\end{pmatrix}\cdot=1.\,u^1_\pm,u^2_\pm$ e a pergunta natural a colocar é se a dinâmica deste sistema é comparável à que foi vista para um único factor de corte; nomeadamente, se a aplicação A é composta de uma contracção e uma rotação. A resposta é, em geral, não. De facto, enquanto, com p único, obtínhamos (para além de 1) um par de valores próprios complexos conjugados, existem valores de p_i para os quais todos os valores próprios são reais, o que se traduz numa dinâmica totalmente diferente. Vejamos alguns exemplos: nas figuras seguintes, o mesmo triângulo é sujeito à secção dos lados com várias combinações de factores de corte:


$p_1=0.7$
$p_2=0.8$
$p_3=0.9$
$\lambda_+=0.7+0.141i$
$\lambda_-=0.7-0.141i$

$p_1=0.1$
$p_2=0.25$
$p_3=0.35$
$\lambda_+=-0.15+0.652i$
$\lambda_-=-0.15-0.652i$

$p_1=0.8$
$p_2=0.3$
$p_3=0.9$
$\lambda_+=0.641$
$\lambda_-=0.359$

Observa-se que, quando $\lambda_\pm$ são complexos, a evolução da sequência de triângulos assemelha-se à obtida para p único, ainda que com perda de simetrias (cujos efeitos mais evidentes são a não conservação do centro geométrico entre iterações e a não semelhança entre os triângulos de uma mesma sucessão). Contudo, quando estes valores são reais, obtemos uma progressão muito distinta: a forma dos triângulos iterados altera-se rapidamente, divergindo da original, e não observamos rotação. A natureza de $\lambda_\pm$ é o factor decisivo na dinâmica destes sistemas, como indica o próximo resultado.

Resultado 6: *Existem duas evoluções possíveis para a sucessão de triângulos por secção dos lados:*

(a) Se $\lambda_\pm$ são reais, a dinâmica pode ser descrita como composição de uma translação do centro geométrico, uma homotetia de módulo $\max\{|\lambda_+|,|\lambda_-|\}$ e de translações individuais dos vértices, sendo que nestas últimas os vértices se deslocam em rectas paralelas duas a duas.

(b) Se $\lambda_\pm$ são complexos, o sistema evolui como composição de uma translação do centro geométrico, uma homotetia de módulo $|\lambda_\pm|$ e de rotações individuais dos vértices, sendo que nestas últimas os vértices se deslocam em elipses idênticas a menos de factores de escala.

Demonstração: A primeira consideração a fazer é a de que o centro geométrico não é preservado entre iterações, resultando num movimento de translação, comum a todos os casos, que pode ser eliminado ignorando a contribuição (constante) associada ao vector próprio $u_0=(1,1,1)$. Comecemos por tomar λ_+,λ_- reais e supor que $|\lambda_+|>|\lambda_-|$. Escrevendo o triângulo inicial Z_0 na base própria e não considerando o termo em $\lambda_0=1$, obtemos

$$A^kZ_0=\lambda_+^k c_1\begin{bmatrix}1\\ u^1_+\\ u^2_+\end{bmatrix}+\lambda_-^k c_2\begin{bmatrix}1\\ u^1_-\\ u^2_-\end{bmatrix}=\lambda_+^k\begin{bmatrix}c_1+\left(\frac{\lambda_-}{\lambda_+}\right)^k c_2\\ c_1u^1_++\left(\frac{\lambda_-}{\lambda_+}\right)^k u^1_-c_2\\ c_1u^2_++\left(\frac{\lambda_-}{\lambda_+}\right)^k u^2_-c_2\end{bmatrix}$$

Caderno_4
ter a-feira, 20 de Abril de 2010 16:31:54