

N. 0197

Gazeta de Matemática

Publicação quadrimestral da SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

Ano LXXXIII | Jul. 2022 | 4,20€

EstudoEmCasa Apoia: 7 perguntas a Cristina Negra

NA LINHA
DE FRENTE

Os Pontos de
Lagrange e
o Telescópio
James Webb

Fabio Chalub

Simplificação
de Radicais

António Pereira Rosa



IX FEIRA DA MATEMÁTICA

21 a 22
OUT
2022

SEXTA FEIRA
21 OUTUBRO

Dirigido ao público escolar

SÁBADO
22 OUTUBRO

Dirigido a famílias
e público geral

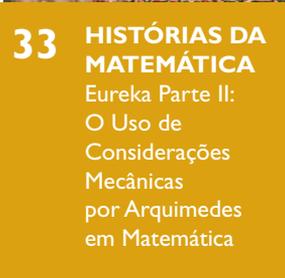
MARQUE JÁ NA
SUA AGENDA!

PARTICIPAÇÃO GRATUITA



museus.ulisboa.pt

Informações e marcações
geral@museus.ulisboa.pt
213 921 808



- 02 EDITORIAL** | *Silvia Barbeiro*
Não há Duas sem Três
- 03 ATRACTOR**
O Que é Uma Figura Simétrica?
- 08 RECREIO** | *Jorge Nuno Silva*
Matemática Recreativa no Feminino
- 10 CANTO DÉLFICO** | *Ricardo Mamede*
A Função W de Lambert
- 15 NA LINHA DE FRENTE** | *Fabio Chalub*
Os Pontos de Lagrange e o Telescópio James Webb
- 18 SIMPLIFICAÇÃO DE RADICAIS**
António Pereira Rosa
- 25 APANHADOS NA REDE** | *José Carlos Santos*
A Descoberta de Neptuno
- 28 #ESTUDOEMCASA APOIA:
7 PERGUNTAS A CRISTINA NEGRA**
- 32 MATEMÁTICA E LITERATURA** | *Nuno Camarinho*
Sombras e Nevoeiro
- 33 HISTÓRIAS DA MATEMÁTICA** | *Daniele Molinini*
Eureka Parte II: O Uso de Considerações Mecânicas por Arquimedes em Matemática
- 39 MATEMÁTICA PARA A INDÚSTRIA
E INOVAÇÃO** | *Lourdes B. Afonso*
Como Funciona um Sistema de Bonus Malus no Seguro Automóvel?
- 45 BARTOON** | *Luis Afonso*
- 46 NOTÍCIAS**
- 51 CARTAS DA DIREÇÃO** | *João Araújo*
Sabe o Que Aconteceu?

NÃO HÁ DUAS SEM TRÊS

Maryna Viazovska é a segunda mulher laureada com uma Medalha Fields.



SÍLVIA BARBEIRO
Universidade
de Coimbra
silvia@mat.uc.pt

A União Matemática Internacional anunciou, no dia 5 de julho, para quem seriam as Medalhas Fields de 2022. A primeira Medalha Fields foi entregue em 1936 e desde 1950 é concedida a cada quatro anos e premeia dois, três ou quatro matemáticos com menos de 40 anos de idade. Este prémio é provavelmente a distinção de maior prestígio na Matemática e reconhece feitos matemáticos extraordinários e o seu potencial de impacto futuro em diversas áreas.

As notícias que anunciam os vencedores são sempre acolhidas com grande expectativa pela comunidade matemática. Nesta edição, destacou-se o facto de haver uma mulher entre os galardoados. Até 2014, ano em que a iraniana Maryam Mirzakhani foi premiada, nenhuma mulher tinha recebido esta distinção. Este ano, a ucraniana Maryna Viazovska entrou para a honrosa lista. E acreditando na máxima “não há duas sem três”, é expectável que sejam escolhidas novas premiadas nas futuras edições da atribuição das medalhas. Oxalá! Elas já aparecem frequentemente nas *shortlists* dos prémios importantes. Mas o equilíbrio de género não é ainda uma realidade na matemática. Está longe disso. Os progressos dos últimos 20 anos têm surgido a um ritmo demasiado lento.

Além de Maryna Viazovska, da École Polytechnique Fédérale de Lausanne (EPFL), o francês Hugo Duminil-Copin, do Institut des Hautes Études Scientifiques (IHES) e da Universidade de Genebra, o britânico James Maynard, da Universidade de Oxford, e o sul-coreano June Huh, da Universidade de Princeton, completam a lista de medalhados em 2022. Mais à frente nesta revista, na sec-

ção Notícias, são revelados alguns dos temas dos trabalhos extraordinários que Maryna, Hugo, James e June têm desenvolvido.

O número da *Gazeta de Matemática* que folheia está recheado de artigos em tópicos muito diversos, que de certeza vão absorver o seu interesse. José Carlos Santos conta-nos sobre a descoberta de Neptuno e a fascinante forma como Le Verrier a fez: por meio de cálculos. Fabio Chalub fala-nos sobre cinco posições de equilíbrio encontradas pelo matemático e astrónomo franco-italiano Joseph Louis de Lagrange e avança os motivos pelos quais o famoso telescópio espacial James Webb, lançado ao espaço em dezembro de 2021, foi colocado numa delas. A coluna Atractor ocupa-se sobre o conceito de figura simétrica e apresenta algumas questões inesperadamente delicadas que surgem sobre o assunto. Aprendemos com Daniele Molinini que Arquimedes utilizou considerações mecânicas para descobrir teoremas matemáticos. António Pereira Rosa escreve sobre a teoria subjacente à simplificação de radicais, indo além do que é conhecido a nível do Ensino Secundário. Com Ricardo Mamede vemos como a utilização da função W de Lambert simplifica a resolução de algumas equações transcendentais. E quem não sabe como funciona um sistema de Bonus Malus no seguro automóvel e gostaria de aprender, deve ler o artigo de Lourdes B. Afonso.

Recordo que a *Gazeta* tem um arquivo dos artigos em formato digital acessível pela página web e que os assinantes têm acesso imediato aos artigos dos números mais recentes. Faço votos de boas leituras.

No âmbito de uma colaboração entre a *Gazeta* e o *Atrator*, este é um espaço da responsabilidade do *Atrator*; relacionado com conteúdos interativos do seu site www.atrator.pt. Quaisquer reações ou sugestões serão bem-vindas para atrator@atrator.pt

O QUE É UMA FIGURA SIMÉTRICA?

Simetria é um tema que tem sido usado amplamente pelo *Atrator* e que se presta a tratamentos informais acessíveis ao grande público. Mas, quando se pretende definir com precisão alguns dos conceitos envolvidos, há questões inesperadamente delicadas que surgem e é sobre algumas delas que vamos ocupar-nos neste texto.

Na figura 1 estão representadas quatro imagens, todas com algum tipo de regularidade relativamente a certas transformações do plano; para exprimir essa regularidade, começamos por introduzir a seguinte terminologia: diremos que uma imagem é invariante por uma transformação (injetiva) do plano se essa transformação enviar essa imagem exatamente sobre ela própria, mantendo inalterado o seu aspeto inicial. Uma tal transformação será designada neste texto por simetria (a definição final, mais exigente, será dada mais adiante).

Começando pela primeira linha da figura 1:

1. Na primeira imagem, a diagonal descendente do quadrado divide-o como um espelho, cada metade sendo a refletida da outra; a reflexão correspondente é uma simetria.
2. Na segunda, a meia-volta não altera o aspeto da imagem: é uma simetria.

Cada uma das outras duas imagens representa um friso (ilimitado) obtido por translações horizontais de parte do que está visível:

1. Em ambas, há translações horizontais que enviam cada "circunferência"/"pegada" numa seguinte e conservam o aspeto global da imagem (ilimitada);

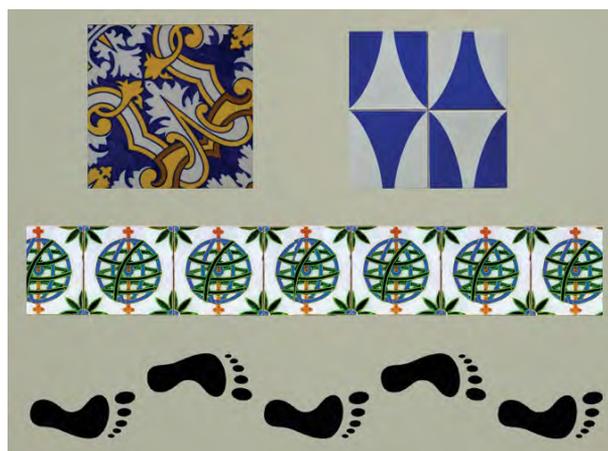


Figura 1.

e cada tal translação é uma simetria dessa imagem (ilimitada).

2. Na segunda, há ainda uma reflexão numa reta horizontal, seguida de uma pequena translação, e essa transformação composta também é uma simetria da imagem.

Em todos estes casos, há entre as simetrias da figura uma que gera todas as outras, isto é, tal que todas as outras se obtêm dela ou da inversa por composições iteradas.

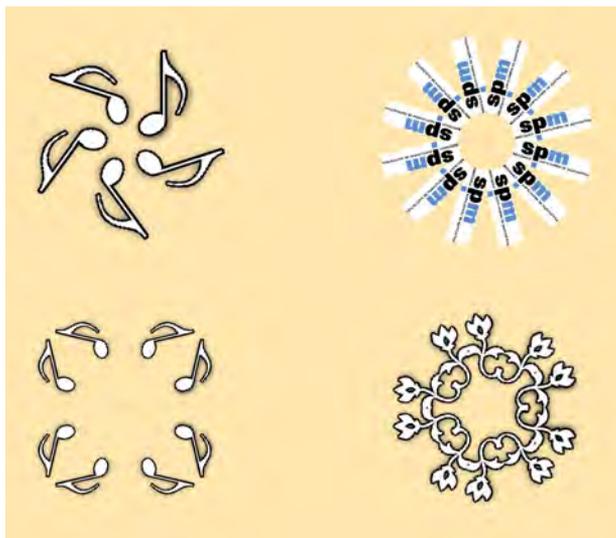


Figura 2.

A figura 2 tem:

1. Na primeira linha, dois exemplos, cada um tendo como simetrias rotações centradas num mesmo ponto: 5 na primeira e 12 na segunda (contando com a de 0°).
2. Na segunda linha, dois exemplos, cada um tendo como simetrias reflexões em eixos passando por um mesmo ponto: 4 na primeira e 5 na segunda e ainda, em cada caso, tendo como simetrias as rotações obtidas por composição dessas reflexões (também 4 e 5).

Nos exemplos analisados, encontramos quatro tipos de simetrias: reflexões, rotações, translações e reflexões seguidas de pequenas translações com a direção do eixo de reflexão, ditas reflexões deslizantes. Há uma propriedade comum a todas estas transformações do plano: conservam distâncias, i.e., se os pontos A e B são transformados em A' e B' , a distância de A a B é igual à de A' a B' . São isometrias. A primeira questão que se coloca é:

Q1. A propriedade "conservarem as distâncias" é ou não uma consequência de serem transformações que enviam certas imagens sobre elas próprias, conservando os aspectos das respectivas imagens?

Observemos uma das quatro imagens da figura 2. Parece que uma transformação que envie aquela imagem sobre ela própria não pode deixar de ser uma isometria. E, se nos restringirmos a transformações com um certo grau de homogeneidade de comportamento, por exemplo, transformações

afins, a conclusão está correta para aquelas imagens. Mas isso não responde à questão Q1. Consideremos um ponto numa reta; todas as homotetias de centro nesse ponto enviam a reta sobre ela própria e só duas das homotetias conservam distâncias... Portanto, temos uma resposta negativa a Q1. No entanto, nos exemplos que consideráremos nas figuras 1 e 2 e em todos os que vão interessar-nos, acontece que as figuras têm um conjunto de simetrias finitamente gerado, isto é, há um conjunto finito de simetrias tal que qualquer simetria se obtém por composição de algumas dessas. Note-se que o conjunto de todas as homotetias da reta, de centro fixo, não é finitamente gerado. Haverá algum contra-exemplo a Q1 com um conjunto de simetrias finitamente gerado? Modifiquemos o anterior, escolhendo na reta dois pontos distintos, O e P , e considerando o conjunto dos homotéticos P_n de P , com centro O e razão 2^n , (ou k^n , $k > 1$), n inteiro qualquer. Este conjunto é enviado sobre si próprio por uma homotetia de centro O e razão 2 (k) e, além disso, as transformações em causa são todas geradas por ela. Qualquer dessas transformações envia o conjunto sobre si próprio e nenhuma delas conserva as distâncias, exceto o caso trivial da identidade, obtido para $n=0$. Temos, assim, uma resposta negativa a Q1, mesmo quando todas as transformações são geradas por uma mesma. A figura 3 mostra uma imagem de um contra-exemplo análogo ao descrito e a de um outro conjunto no plano com propriedades semelhantes.

Em conclusão: se quisermos garantir que uma simetria seja uma isometria, temos de impor essa condição na definição. Eis a definição mais exigente adotada:

Uma simetria de uma figura plana é uma isometria do plano que envia essa figura sobre ela própria.

Será que já dispomos agora de uma definição clara e precisa de simetria, com a qual possamos trabalhar? Falá-mos em simetria de uma figura plana, mas o que é uma figura plana? Se essa "figura plana" só tiver uma cor, além da do fundo do plano, que podemos supor branco, dar uma figura é equivalente a dar a parte do plano cujos pontos são não brancos; e uma simetria dessa figura será uma isometria do plano que envia essa parte sobre ela própria. Mas, se a figura tiver mais de uma cor, como são definidas (com precisão) a figura e uma sua simetria?

Uma figura de quatro cores (azul, verde, vermelho, preto), com fundo de outra cor, consiste numa função *cor* do plano no conjunto de cores¹ (incluindo a do fundo). E uma simetria de uma tal figura colorida será uma iso-

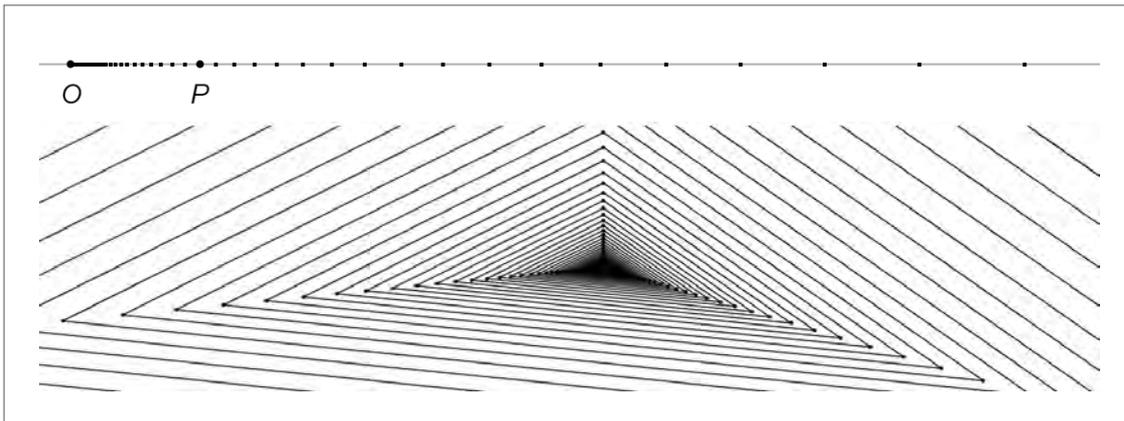


Figura 3.

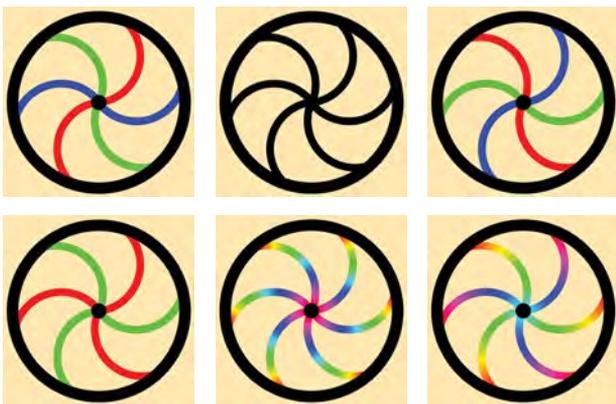


Figura 4.

metria f do plano tal que, para qualquer ponto p do plano, $cor(f(p)) = cor(p)$.

A figura 4 tem seis imagens coloridas, todas distintas, todas representando um mesmo quadrado centrado na origem (e supondo-se sempre que, fora desse quadrado visível, todos os pontos têm a cor do fundo). Vejamos quais são as simetrias, conforme a figura colorida colocada nesse quadrado.

Por exemplo, na primeira linha da figura 4 o conjunto de cores tem cinco elementos e há três imagens: a do centro tem claramente seis simetrias de rotação. E a da esquerda? Se a rodar a 60° obtenho a da direita, que “não coincide” com a primeira. Cada uma dessas figuras coloridas só tem duas simetrias: a identidade e a meia-volta em torno do centro da circunferência. Quanto à linha de baixo, começa por uma com três simetrias de rotação, as outras têm gradientes de cor: a do meio tem as mesmas simetrias que a preta de cima e a terceira, as mesmas da primeira dessa linha.

Note-se que, quer uma figura seja colorida quer não,

a função identidade do plano é uma simetria da figura: é simultaneamente uma translação (de vetor nulo) e uma rotação (de ângulo nulo e centro em qualquer ponto). Na linguagem corrente, fala-se em figuras sem simetria como sendo aquelas que só têm essa simetria trivial. Conhecemos quatro tipos diferentes de simetrias não triviais no plano: translação, reflexão, rotação e reflexão deslizante. Observe-se que o facto de uma reflexão deslizante ter sido definida como a composta de uma reflexão com uma translação, ambas isometrias, faz com que ela seja automaticamente uma isometria. Então, é natural perguntar:

Q2 Composto duas isometrias, cada uma de um dos quatro tipos até agora encontrados, poderemos obter um tipo de isometria ainda diferente de qualquer deles?

Note-se que foi algo desse género que aconteceu na discussão anterior: tínhamos dado exemplos de reflexões, translações e rotações e, ao considerarmos a composta de uma translação com um certo tipo de reflexão, encontrámos uma de um tipo diferente das três anteriores, a que demos o nome de reflexão deslizante.

Vamos dar uma ideia da razão pela qual a resposta a Q2 é negativa, e podemos mesmo afirmar que não existem isometrias do plano que não sejam de algum dos quatro tipos já encontrados. Notar que esta afirmação é *a priori* mais forte do que a anterior. Uma vez que uma simetria de uma figura é uma isometria, aquela resposta negativa implicará que, em particular, as simetrias de uma figura plana qualquer serão sempre de alguns dos quatro tipos indicados.

¹Neste caso, cores={azul, verde, vermelho, preto, cor do fundo}, mas o conjunto das cores pode ser infinito; por exemplo, usando a notação standard RGBColor; cada cor é definida por um terno de números entre 0 e 1.

Recordemos que um terço (A, B, C) de pontos não colineares no plano define uma orientação, entre duas possíveis: positiva se, “olhando no sentido AB ”, o C estiver no semiplano da esquerda e negativa no caso contrário, este correspondendo ao sentido do movimento dos ponteiros de um relógio.

Consideremos dois pontos distintos quaisquer A, B e dois pontos A', B' ; tais que $d(A', B') = d(A, B)$:

1. (Unicidade) Começaremos por justificar as seguintes afirmações:

- a. Há no máximo uma isometria que envia A em A', B em B' e conserva a orientação.
- b. Há no máximo uma isometria que envia A em A', B em B' e troca a orientação.

Para qualquer ponto C do plano, uma (eventual) isometria que satisfaça as condições de a. ou b. vai necessariamente enviar C na interseção de duas circunferências centradas em A' e B' e raios $d(A, C), d(B, C)$ (ver figura 5). Se C não for colinear com A, B , essa interseção é formada por dois pontos C' e C'' , um em cada uma das duas regiões do plano definidas por $A'B'$, que correspondem a orientação positiva (de $A'B'C'$) e negativa (de $A'B'C''$)².

2. (Existência)

- a. Há uma rotação ou uma translação que envia A em A' e B em B' .
- b. Há uma reflexão deslizante (sentido lato) que envia A em A' e B em B' .

Para provarmos 2.a., consideremos primeiro o caso de AB ser paralela a $A'B'$; se o sentido for o mesmo, a translação pelo vetor AA' satisfaz o desejado, caso contrário o ponto médio C de AA' coincide com o de BB' e é a rotação de 180° centrada em C que envia A em A' e B em B' (segunda imagem da figura 6). Se as retas AB e $A'B'$ se intersectarem, as suas mediatrizes também se intersectam num ponto C e a rotação de centro C que envia A em A' também envia B em B' .

Provemos 2.b.: se as retas AB e $A'B'$ forem concorrentes (figura 7), uma vez desenhada a bissetriz do ângulo, a paralela por A' e a perpendicular por A intersectam-se em A'' e a mediatriz de AA'' será o eixo da reflexão deslizante com $A''A$ como vetor de deslizamento, que envia A, B em A', B' .

Utilizámos a métrica euclidiana³ sempre que falámos em distâncias, em particular ao definirmos isometria. Há outras métricas no plano, topologicamente equivalentes,

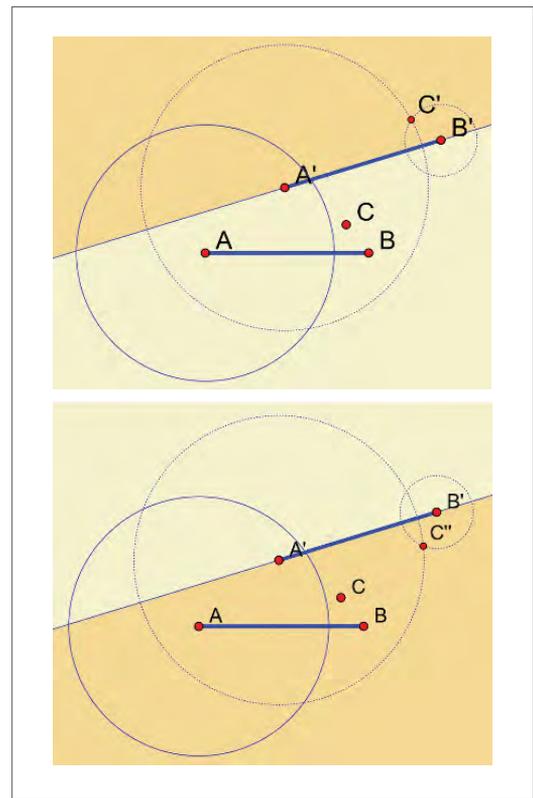


Figura 5.

como a métrica produto ou a métrica do táxi⁴. Por curiosidade, vamos ver que algumas das transformações que são isometrias para a métrica euclidiana deixam de o ser para a métrica do táxi. Por exemplo, a figura 8 representa (a azul) a circunferência de raio 1 centrada em A e (a verde) os pontos que distam 1 de A na distância do táxi. Para esta, C , rodado de B a 45° , está a uma distância de A superior a 1; conclusão: a rotação de 45° não é uma isometria para a métrica do táxi.

Todas as simetrias das quatro imagens da figura 1 são também simetrias para a métrica do táxi, mas o mesmo não acontece com as da figura 2: das quatro imagens, apenas a primeira da segunda linha conserva, na métrica do táxi, as mesmas simetrias da métrica euclidiana: quatro reflexões em eixos com ângulos $0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ e quatro rotações, compostas dessas reflexões duas a duas. Na figura 9, relativamente à métrica do táxi, estão indicadas quatro imagens: as da primeira linha exatamente com as mesmas simetrias (quatro rotações de múltiplos de $\pi/2$), e as da segunda linha ambas com as mesmas simetrias (quatro reflexões com eixos fazendo com a horizontal â-

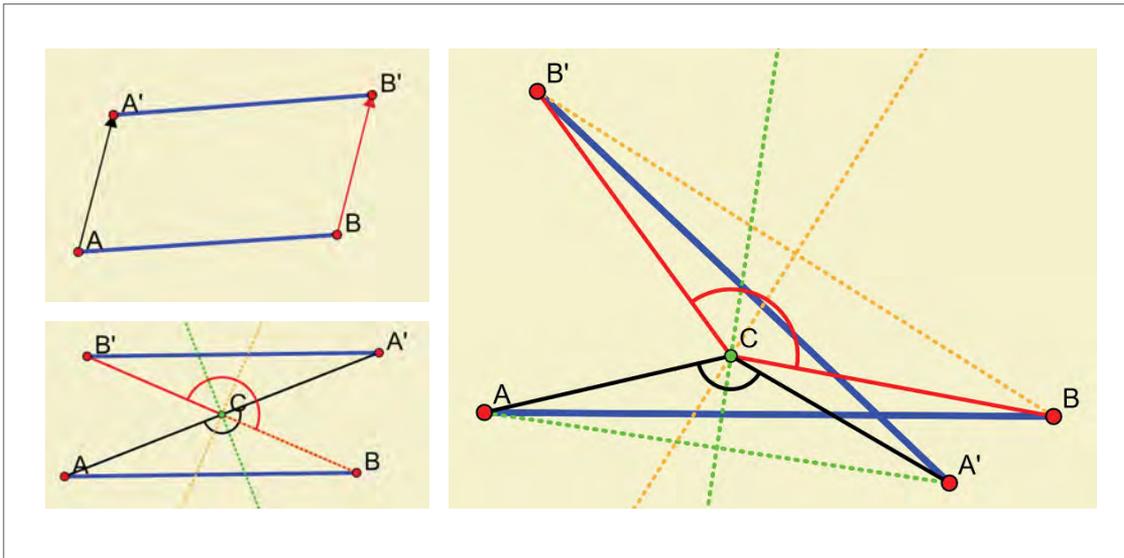


Figura 6.

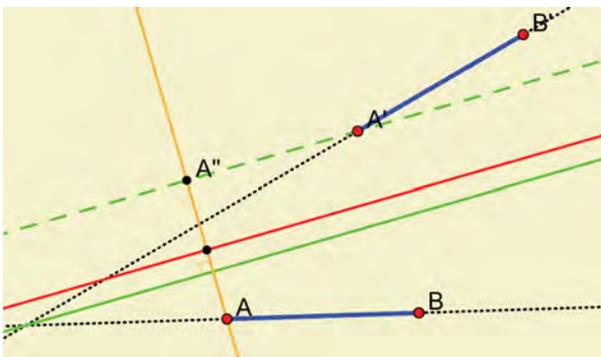


Figura 7.

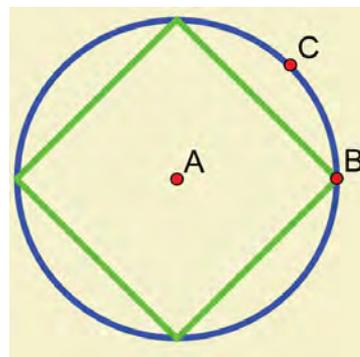


Figura 8.

gulos de múltiplos de $\pi/4$ e rotações delas decorrentes). Tem interesse destacar que a segunda imagem da primeira linha tem, na métrica euclidiana, o dobro das simetrias de rotação que tem na métrica do táxi e as outras três têm nas duas métricas exatamente as mesmas simetrias.

Em [1], o leitor poderá usar aplicações interativas e descobrir experimentalmente algumas das diferenças entre as métricas euclidiana e do táxi (e também da métrica produto).

[1] <https://www.atractor.pt/mat/simetrias>

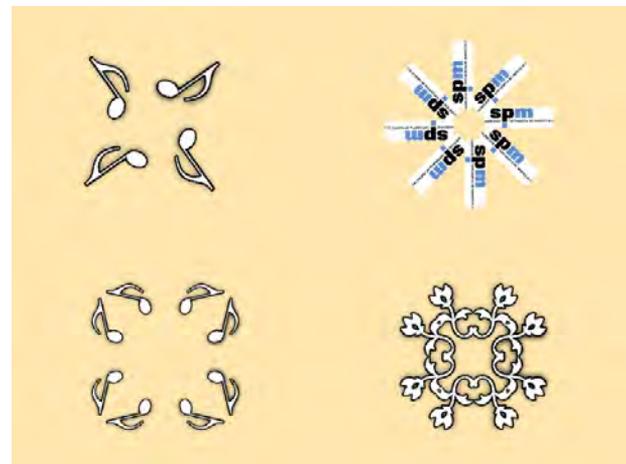


Figura 9.

² Em [1] poderá aceder a uma página interativa na qual poderá mover os pontos.

³ Definida por $d((x, y), (x', y')) = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$

⁴ Definida por $d((x, y), (x', y')) = |x - x'| + |y - y'|$



JORGE NUNO SILVA
Universidade
de Lisboa

jnsilva@cal.berkeley.edu

MATEMÁTICA RECREATIVA NO FEMININO

A Escola Secundária do Arco do Cego implementou-se nas instalações onde funcionou, até meados dos anos 1970, a Escola Lusitânia Feminina. O seu proprietário e diretor, Armando Estácio da Veiga, era homem de consequência... Por exemplo, foi deputado e autor de manuais cuja originalidade surpreende.

A Escola Lusitânia Feminina ministrava um “curso de instrução prática” para jovens do sexo feminino, preparando-as para a profissão de secretárias. Na sequência do 25 de Abril de 1974, este projeto educativo foi extinto, tendo Estácio da Veiga doado a Escola ao Estado.

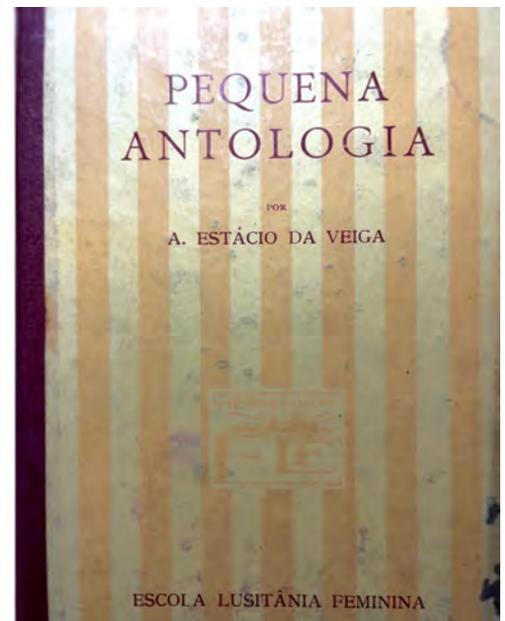
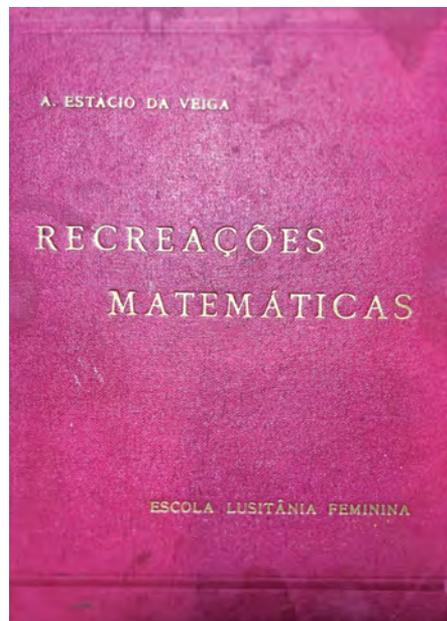
Além de ser licenciado em Ciências Matemáticas, Estácio da Veiga, nascido em 1902, foi deputado nas legislaturas VII-XI e autor de manuais. Na nossa biblioteca, temos estes dois.

A *Pequena Antologia* é uma seleta literária comentada, com excertos de autores que vão da Idade Média à Época Moderna. Encontramos textos de D. Dinis até José Régio (ainda vivo à época desta edição). Nos vários testemunhos que nos chegaram, de ex-alunas da Lusitânia, alguns referem ter sido aqui que aprenderam a amar a poesia!

Mas, naturalmente, foi o manual de matemática recreativa que nos causou admiração. O autor conhe-

cia bem as virtudes das recreações, pois elaborou um belo manual, integrando o seu conteúdo no currículo escolar.

Em traços largos, o manual cobre aritmética, das contas às percentagens e raízes quadradas, e recreações matemáticas. Estas, em forma de problemas, exercitam as matérias numéricas, mas contêm também questões puramente lúdicas, norteadas para a promoção do prazer de pensar. Por exemplo, o autor apresenta a Torre de Hanói,



criado por Lucas em 1883, e outros quebra-cabeças clássicos (de Pacioli e Alcuíno, por exemplo), o que leva a crer que conhecesse bem algumas fontes.

Outros exemplos:

- ▶ Batalha dos Números. Dois jogadores alternam somando um número de 1 a 10 à escolha ao total (que começa nulo). Ganha quem atingir 100.

(O autor explica a estratégia associada ao jogo. Esta versão é muito semelhante à de Luca Pacioli).

- ▶ Um pai com dois filhos de 12 e 13 anos, respetivamente, pretende atravessar um ribeiro. Para isso há apenas um barco que só pode levar o homem ou os dois rapazes. Como hão de proceder para fazer a travessia?

(A resolução, muito detalhada, inclui esquemas gráficos para representar as várias situações nas margens e no barco. Num outro problema, mais à frente, em vez de um homem temos um regimento! Surgem também os conhecidos problemas de travessia relativos a casais ciumentos, mas enunciados em termos de padrões e criados. Estas questões estão em Alcuíno).

- ▶ Numa ilha há dois tipos de indígenas: uns têm as plantas dos pés vermelhas e falam sempre verdade; os outros têm-nas brancas e mentem sempre. Um europeu E encontrou-se com três indígenas A, B e C, que se entendem entre si na língua local, mas compreendem e falam a língua de E. E não fala nem compreende a língua da ilha. E pergunta a A qual é a cor da planta dos seus pés; A responde na língua da ilha e E não percebe. E pergunta a B o que dissera A; B responde: "A disse que tinha as plantas dos pés brancas." E pergunta a C a cor das plantas dos pés de B; C responde que são vermelhas. Determinar a cor das plantas dos pés de B e de C.

- ▶ Numa divisão, o dividendo é 237 812 e o quociente é 1025; que números são o divisor e o resto?

Sobre as questões propostas no número anterior, algumas indicações de resolução:

1. Podemos seguir um plano:

- a) Aplique a operação permitida convenientemente, de forma a que o quadrado livre esteja numa fila horizontal só com dominós horizontais. Necessariamente, o quadrado livre estará então na fila aumentada (a primeira).

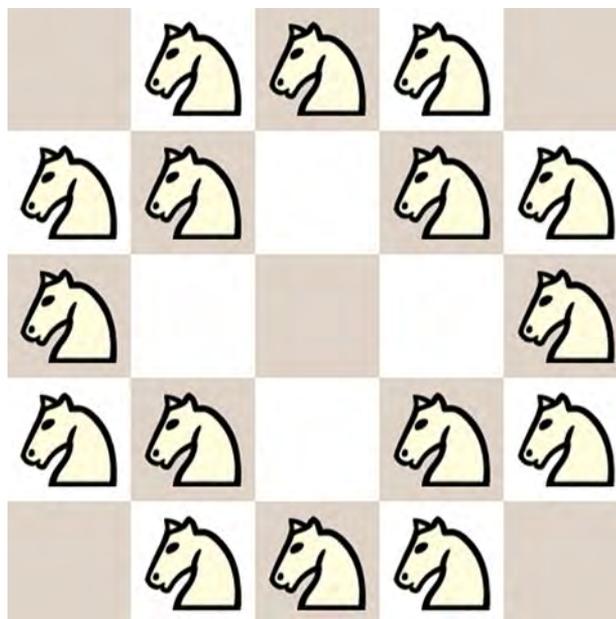
- b) Sempre mediante a aplicação da operação mencionada, mova o quadrado livre para o canto superior esquerdo do tabuleiro.

- c) Mova o dominó que cobre a casa por baixo do quadrado livre para a posição vertical, cobrindo o canto superior esquerdo (em coordenadas: $a7$ e $a8$).

- d) Aplique o processo a) ao complemento da primeira fila e do dominó vertical. Itere de forma a obter uma "cobra" desde a casa acrescentada até $g1$.

- e) Desloque a "cobra" uma casa.

2. Eis uma solução. A coloração do tabuleiro ajuda na prova de que não se pode exceder 16 cavalos. Fica como sugestão.



A FUNÇÃO W DE LAMBERT

A função W de Lambert foi considerada pela primeira vez há mais de 250 anos, mas apenas recentemente foi batizada e objeto de um tratamento rigoroso. Está intimamente relacionada com a função logaritmo e tem uma grande variedade de aplicações em matemática, física e ciências da computação, surgindo em muitos problemas de modelação nas ciências naturais. Neste canto vamos usar a função W de Lambert para resolver algumas equações transcendentais.

1. INTRODUÇÃO

Algumas equações que dependem de uma única variável x podem ser manipuladas de forma a que a variável apareça isolada num dos membros da equação. Quando isto é possível, dizemos que resolvemos a equação. Por exemplo, a equação $x^2 + 2x - 3 = 0$ tem duas soluções $x = -3$ e $x = 1$, que podem ser obtidas usando a fórmula resolvente para equações quadráticas. A situação é diferente quando somos confrontados com equações da forma

$$x^x = 2$$

ou

$$x + e^x = 2.$$

Estas equações não possuem soluções algébricas em termos de "funções elementares" que, em termos gerais, consistem em funções polinomiais, racionais, trigonométricas, exponenciais ou logaritmos, e funções obtidas destas por aplicação de um número finito de operações elementares: soma, subtração, multiplicação, divisão, composição e radiciação. Uma equação da forma $x = f(x)$ que não possui solução algébrica diz-se uma equação transcendente.

O facto de uma equação transcendente não ter solução algébrica, não significa que não tenha solução. Vamos ver neste canto que se adicionarmos ao nosso repertório de funções a função W de Lambert vamos ser capazes de resolver de forma simples algumas equações transcendentais.

A função W de Lambert deve o seu nome a Johann



Figura 1. J. H. Lambert.

Heinrich Lambert (1728-1777), matemático, físico e astrónomo suíço que, entre muitos outros resultados, é reconhecido como o primeiro matemático a apresentar uma prova rigorosa da irracionalidade do número π . A história da função W começa em 1758 quando Lambert estudou a equação trinomial

$$x = q + x^m,$$

mas é num artigo publicado por Euler (1707-1783) que aparece a primeira menção da função inversa de $y = xe^x$. No

entanto, Euler concede o crédito a Lambert pelo seu trabalho pioneiro nesta função. Todavia, só no final do século XX é que a função W começou a ser designada por função de Lambert e a letra W foi escolhida na primeira implementação da função W no software matemático Maple. Entretanto, uma grande variedade de aplicações da função W foi descoberta, quer em matemática, quer em física ou em ciências da computação [1, 3]. A função W de Lambert surge ainda associada a vários modelos nas ciências naturais [7], permitindo obter soluções em forma fechada para problemas cuja solução exata ou explícita não é possível de obter usando funções elementares.

2. DEFINIÇÃO

A função W de Lambert define-se como sendo a inversa da função

$$y = xe^x.$$

O número e nesta fórmula representa o número de Euler, uma das constantes mais famosas da matemática. Podemos definir o número de Euler como sendo o limite da sucessão $(1 + 1/n)^n$ quando n tende para infinito. Por exemplo, tomando $n = 1.000.000$, obtemos o valor $e \approx 2,718280469 \dots$, com cinco casas decimais corretas.

Antes de analisarmos a função W , vamos debruçar-nos sobre a função exponencial $y = e^x$. Esta função é crescente para todo o x real e tem por contradomínio o conjunto dos números reais positivos. É, portanto, invertível e a sua inversa é o logaritmo natural $\ln x$, cujo gráfico pode ser obtido a partir do gráfico da função exponencial refletindo-o sobre a diagonal $y = x$ (ver figura 2). Por definição de

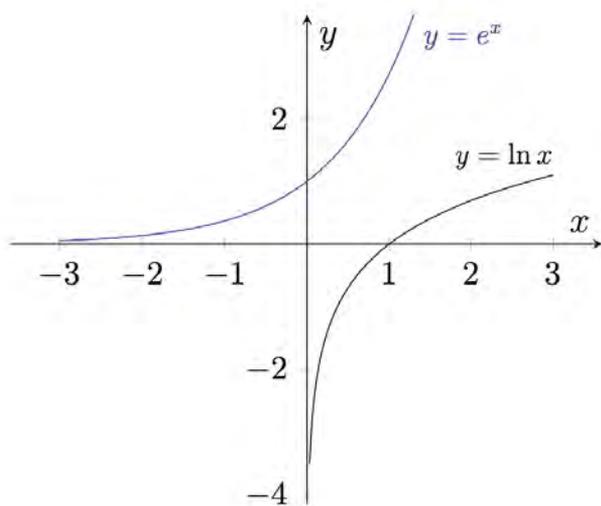


Figura 2. Gráficos de $y=e^x$ e $y=\ln x$.

função inversa, temos portanto,

$$x = e^{\ln x} \quad \text{para } x > 0$$

e

$$x = \ln(e^x) \quad \text{para } x \in \mathbb{R}.$$

Estas relações podem ser usadas para resolver algumas equações que envolvem a função exponencial. Por exemplo, aplicando o logaritmo natural a ambos os membros da equação $e^x = 2$ obtemos a sua única solução $x = \ln 2 \approx 0,6931$.

Foquemos agora a nossa atenção na função W . A função $y = xe^x$ está definida para todo o número real x e tem por contradomínio o conjunto dos números $y \geq -1/e \approx -0,3679$. Esta função tem derivada $y' = (x + 1)e^x$, a qual é negativa para $x < -1$ e positiva para $x > -1$. Segue-se que $y = xe^x$ é decrescente para $x \leq -1$ (curva vermelha na figura 3) e é crescente para $x \geq -1$ (curva azul na figura 3).

Portanto, ao contrário do que ocorre com a função exponencial, a função xe^x não é invertível sobre o seu domínio. No entanto, se restringirmos o domínio da função ao conjunto $[-1, +\infty)$, onde xe^x é crescente, ou ao conjunto $(-\infty, -1]$, onde xe^x é decrescente, a função xe^x é invertível e à sua inversa chamamos função W de Lambert. A inversa de xe^x quando restrita ao conjunto $[-1, +\infty)$ é designada por ramo principal da função W de Lambert e denotada por W_0 (curva sólida na figura 3). Ou seja,

$$W_0 : [-e^{-1}, +\infty) \rightarrow [-1, +\infty)$$

é a inversa de xe^x no conjunto $[-1, +\infty)$.

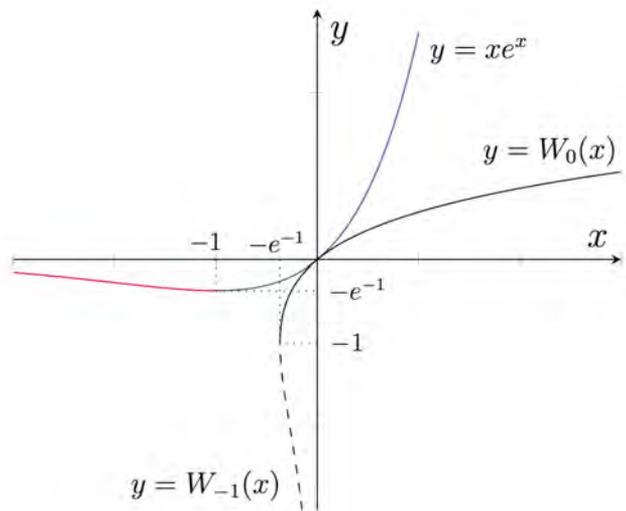


Figura 3. Gráficos de $y=xe^x$ e dos dois ramos de $W(x)$.

Por outro lado, a inversa de xe^x quando restrita ao conjunto $(-\infty, -1]$ é designada ramo secundário da função W de Lambert e denotada por W_{-1} (curva a tracejado na figura 3). Ou seja,

$$W_{-1} : [-e^{-1}, 0] \rightarrow (-\infty, -1],$$

é a inversa de xe^x no conjunto $(-\infty, -1)$.

Há, portanto, duas funções de Lambert, o ramo principal $W_0(x)$ definido para $x \geq -e^{-1}$ com $W_0(x) \geq -1$, e o ramo secundário $W_{-1}(x)$ definido para $-e^{-1} \leq x \leq 0$ com $W_{-1}(x) \leq -1$. Assim, a equação $y = xe^x$ possui uma única solução se $x \geq 0$ e duas soluções se $-e^{-1} < x < 0$.

Quando não for necessário distinguir entre os dois ramos, escrevemos apenas $W(x)$ para denotar a função W de Lambert, e usaremos os índices 0 e -1 quando uma certa afirmação se verificar apenas para um dos ramos.

Por definição de função inversa, temos portanto

$$W(xe^x) = x, \text{ para } x \geq -1$$

e

$$W(x)e^{W(x)} = x, \text{ para } x \geq -e^{-1}.$$

A definição da função W pode ser algo difícil de usar pois apresenta-a de forma implícita e não nos fornece, portanto, uma forma fechada para $W(x)$. Em geral teremos de recorrer a métodos numéricos [8] ou a um sistema de álgebra computacional (como, por exemplo, *Maple*, *MATLAB* ou *Mathematica*) para calcular o valor de $W(x)$. No entanto, este condicionamento não é maior do que aquele que experienciamos ao calcular o valor de e^2 ou $\ln 2$. Também nestes casos geralmente recorremos a uma calculadora para obter um valor aproximado para estes números. A grande diferença no cálculo de $\ln 2$ e $W(2)$ reside no facto de a maioria das calculadoras possuírem botões dedicados à função logaritmo natural, mas não fazerem em geral referência à função W .

Os cálculos efetuados neste artigo foram realizados usando o software Wolframalpha (<https://www.wolframalpha.com>), de acesso livre online, que usa o sistema de álgebra computacional Mathematica. Neste sistema, a função W é implementada usando o nome *ProductLog*.

Ainda assim, alguns valores da função W de Lambert são fáceis de obter usando a condição $W(xe^x) = x$, como, por exemplo:

$$W(-1/e) = W(-1 \cdot e^{-1}) = -1,$$

$$W(0) = W(0 \cdot e^0) = 0,$$

$$W(e) = W(1 \cdot e^1) = 1,$$

$$W(2 \ln(2)) = W(\ln(2) \cdot e^{\ln 2}) = \ln 2.$$

As principais propriedades da função W , incluindo a sua derivada, primitiva e expansão em série de potências, podem ser encontradas em [2, 3, 4].

3. EQUAÇÕES TRANSCENDENTES

Vamos agora determinar as soluções de algumas equações transcendentais usando a função W . A estratégia geral é escrever a equação na forma $a = be^b$, donde se segue que $b = W(a)$ por definição da função W .

• $x^x = 2$

Aplicando o logaritmo natural a ambos os membros desta equação, obtemos

$$\ln 2 = \ln(x^x) = x \ln x.$$

A mudança de variável $z = \ln x$ permite escrever a identidade anterior na forma $\ln 2 = ze^z$, donde se segue que $z = W(\ln 2)$, ou seja,

$$x = e^{W(\ln 2)} \approx 1,5596.$$

A mesma ideia pode ser usada para determinar a inversa da função $f(x) = x^x$, para $x > 0$. Temos $x^x \rightarrow 1$ quando $x \rightarrow 0^+$ e $x^x \rightarrow +\infty$ quando $x \rightarrow +\infty$ (ver figura 4). Como $f'(x) = (1 + \ln x)x^x$, o ponto $(e^{-1}, e^{-1/e})$ é um mínimo absoluto de f . A função é decrescente no intervalo $(0, e^{-1}]$ e crescente no intervalo $[e^{-1}, +\infty)$ e, portanto, para definirmos a sua inversa vamos restringir o seu domínio a um destes intervalos.

Qualquer que seja a restrição feita ao domínio, podemos repetir os passos usados na resolução da equação

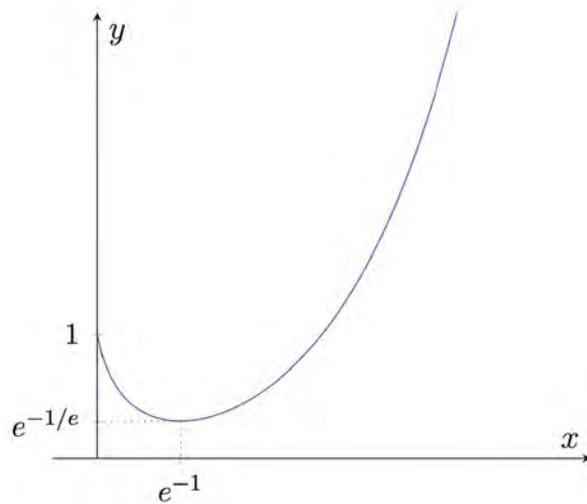


Figura 4. Gráfico de $y = x^x$.

$x^x = 2$ para obter uma expressão para a inversa de x^x . Começamos por aplicar o logaritmo natural a ambos os membros da igualdade $y = x^x$, obtendo

$$\ln y = x \ln x.$$

A mudança de variável $z = \ln x$ permite obter $\ln y = ze^z$, donde se segue que

$$x = e^{W(\ln y)}.$$

Ou seja, a inversa da função $y = x^x$ é a função $f^{-1}(x) = e^{W(\ln x)}$.

• $x + e^x = 2$

A função $y = x + e^x$ é crescente para todo o x real, uma vez que a sua derivada satisfaz $y' = 1 + e^x > 0$ para todo o x . Como se verifica

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x + e^x = \pm\infty,$$

facilmente se deduz que a equação $x + e^x = 2$ tem uma única solução real. Para a obtermos, começamos por tomar a exponencial em ambos os membros:

$$e^2 = e^{x+e^x} = (e^x) e^{(e^x)}.$$

Segue-se que $e^x = W(e^2)$, isto é a única solução da equação $x + e^x = 2$ é dada por

$$x = \ln(W(e^2)) \approx 0,4428.$$

• $x - e^x = -2$

A função $y = x - e^x + 2$ tem por derivada $y' = 1 - e^x$, que se anula no ponto $x = 0$. O ponto $(0, 1)$ é pois um máximo absoluto de y uma vez que esta função é crescente no intervalo $(-\infty, 0]$ e decrescente no intervalo $[0, +\infty)$. Como

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x - e^x + 2 = -\infty,$$

segue-se que a equação $x - e^x = -2$ tem exatamente duas soluções reais. Para as obtermos, procedemos como no exemplo anterior: começamos por tomar exponenciais em ambos os membros da equação,

$$e^{-2} = e^{x-e^x} = (e^x) e^{(-e^x)},$$

ou seja

$$-e^{-2} = (-e^x) e^{(-e^x)}.$$

A solução pode agora ser obtida por aplicação da função W , $-e^x = W(-e^{-2})$. Notemos no entanto, que uma vez que $-e^{-1} < -e^{-2} < 0$, obtemos as duas soluções pretendidas aplicando os dois ramos da função W :

$$x = \ln(-W_0(-e^{-2})) \approx -1,8414$$

e

$$x = \ln(-W_{-1}(-e^{-2})) \approx 1,1462.$$

• $\sqrt{x} + \ln x = 0$

A função $y = \sqrt{x} + \ln x$ está definida para $x > 0$ e é crescente neste intervalo, uma vez que a sua derivada satisfaz $y' = (\sqrt{x} + 2)/2x > 0$ para $x > 0$. Temos

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} + \ln x = -\infty,$$

e

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} + \ln x = +\infty,$$

donde se conclui que a equação $\sqrt{x} + \ln x = 0$ tem uma única solução real. Para a obtermos, começemos por escrever $\ln x = -\sqrt{x}$ ou ainda

$$-\frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 1.$$

Multiplicando ambos os membros desta igualdade por $1/2$ e usando propriedades do logaritmo, obtemos

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{x}} \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) e^{\ln\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)},$$

donde se segue que

$$\ln\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = W(1/2),$$

ou seja,

$$x = e^{-2W(1/2)} \approx 0,4948.$$

• $x^n = e^{-x}$

Uma equação da forma $x^n = e^{-x}$, com n um inteiro positivo, pode ser reescrita como

$$x^n e^x = 1.$$

Extraindo a raiz índice n , vem

$$x e^{x/n} = 1,$$

que pode ser escrito como

$$b e^b = 1/n,$$

com $b = x/n$. Portanto, uma solução real da equação $x^n = e^{-x}$ é dada por

$$x = nW(1/n).$$

• $2^x = 3x$

A função $y = 2^x - 3x$ tem domínio \mathbb{R} e a sua de-

rivada $y' = 2^x(\ln 2) - 3$ anula-se apenas no ponto $x_0 = \ln(3/\ln(2))/\ln 2 \approx 2,1137$. Uma vez que

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} 2^x - 3x = +\infty,$$

o ponto $(x_0, 2^{x_0} - 3x_0) \approx (2,1137; -2,0131)$ é um mínimo absoluto da função $2^x - 3x$. Segue-se que a equação $2^x = 3x$ possui duas soluções reais. Para as obtermos, comecemos por escrever a equação na forma

$$1 = \frac{3x}{2^x} = 3xe^{-x\ln 2}.$$

Multiplicando ambos os membros da equação por $-(\ln 2)/3$, obtemos

$$-\frac{1}{3}\ln 2 = -(x\ln 2)e^{-x\ln 2},$$

donde se segue que

$$-x\ln 2 = W\left(-\frac{1}{3}\ln 2\right).$$

Como $-e^{-1} < -\frac{1}{3}\ln 2 < 0$, podemos usar os dois ramos da função W para obter as duas soluções da equação,

$$x = \frac{W_0\left(-\frac{1}{3}\ln 2\right)}{-\ln 2} \approx 0,4578$$

e

$$x = \frac{W_{-1}\left(-\frac{1}{3}\ln 2\right)}{-\ln 2} \approx 3,3132.$$

O leitor encontra em [5] uma grande variedade de equações construídas através de combinações de logaritmos, exponenciais e polinômios cuja solução explícita pode ser encontrada usando a função W de Lambert.

4. A TORRE DE POTÊNCIAS INFINITA

Outra aplicação interessante da função W envolve a torre infinita de expoentes

$$y(x) = x^{x^{x^{\dots}}}$$

Esta função, também conhecida como tetração, pode ser definida iterativamente por

$$y_1 = x \quad \text{e} \quad y_{n+1} = x^{y_n}.$$

Este processo gera uma sequência infinita de aproximações para $y(x)$. Euler provou (veja-se [6]) que a sucessão (y_n) converge quando

$$0,0659 \approx e^{-e} \leq x \leq e^{1/e} \approx 1,4446.$$

Vamos usar a função W para calcular o valor de $y(x)$ quando x pertence a este intervalo.

Neste caso, podemos escrever $y = x^y$, ou seja, $x = y^{1/y}$. Aplicando o logaritmo natural a ambos os membros desta

última equação, obtemos

$$\ln x = \frac{\ln y}{y},$$

ou ainda,

$$y \ln x = \ln y.$$

Segue-se que $y = e^{y \ln x}$. Podemos escrever esta última igualdade como

$$-y \ln(x) e^{-y \ln(x)} = -\ln x$$

e pela definição da função W , temos

$$-y \ln x = W(-\ln x),$$

ou seja, obtemos a expressão

$$y = \frac{W(-\ln x)}{-\ln x},$$

para a torre de potências infinita em termos da função W de Lambert.

REFERÊNCIAS

- [1] R.M. Corless, G.H. Gonnet, D.E.G. Hare, D.J. Jeffrey and D.E. Knuth (1996), "On the Lambert W function", *Adv. Comput. Math.* 5 (1996), n. 4, 329-359.
- [2] R.M. Corless, D.J. Jeffrey and D.E. Knuth (1997), "A sequence of series for the Lambert W function", *In Proceedings of ISSAC'97*, 197-204.
- [3] R.M. Corless, D.J. Jeffrey and S.R. Valluri (2000), *Some applications of the Lambert W function to physics*, *Can. J. Phys.* 78, 823-831.
- [4] T.P. Dence (2013), "A Brief Look into the Lambert W Function", *Applied Maths.* 4, 887-892.
- [5] S. Edwards (2019), *Extension of Algebraic Solutions Using The Lambert W Function*, arXiv:1902.08910.
- [6] R.A. Knoebel (1981), "Exponentials Reiterated", *The American Mathematical Monthly* Vol. 88 (4), 235-252.
- [7] J. Lehtonen (2016), "The Lambert W function in ecology and evolutionary models", *Methods in Ecology and Evolution* 7, 1110-1118.
- [8] D. Veberic (2010), "Having Fun with Lambert W(x) Function", arXiv:1003.1628.



FABIO CHALUB
Universidade
Nova de Lisboa
chalub@fct.unl.pt

OS PONTOS DE LAGRANGE E O TELESCÓPIO JAMES WEBB

Estão a começar a chegar as primeiras fotos do telescópio espacial James Webb. Quando o leitor estiver a saborear as páginas deste número da *Gazeta*, provavelmente o equipamento já estará 100% operacional. Por ora, tudo o que temos são as fotos do processo de calibragem e alinhamento que mostram – e muito bem – as potencialidades deste novo observatório.

O telescópio espacial James Webb foi desenvolvido durante mais de 20 anos, numa operação liderada pela agência espacial norte-americana (NASA), com grande colaboração da sua congénere europeia (ESA). Por um custo superior a 500 milhões de dólares, após muitos contratemplos, foi finalmente lançado no espaço em dezembro de 2021, em direção ao seu destino final, o ponto L_2 do sistema Sol-Terra. Após a finalização de todo o lento e trabalhoso processo de calibração, substituirá, para todos os efeitos práticos, o telescópio Hubble. Mais detalhes podem ser encontrados em [1]. Para admirar a incrível qualidade das imagens deste novo observatório espacial, veja a figura 1. Mas o que é o ponto L_2 do sistema Sol-Terra?

Em 1772, J. L. Lagrange escreveu o trabalho *Essai sur le Problème des Trois Corps*, onde estuda quais as configurações gravitacionais de três corpos que são mantidas constantes pela dinâmica [3]. A pergunta a que queria responder é: supondo que três corpos celestes interagem apenas através da gravidade, será possível que as suas posições relativas sejam invariantes no tempo?

O problema ainda não está resolvido em toda a sua generalidade. No entanto, o físico-matemático franco-italiano percebeu que algumas soluções parciais poderiam ser obtidas.

Mais exatamente, considerou dois objetos massivos a orbitar um ao redor do outro em órbita circular, e um terceiro, chamado *massa de prova*, a se movimentar atraído pela gravidade dos dois primeiros. A expressão *massa de prova* significa que a sua massa é muito pequena para alterar os movimentos dos dois grandes corpos. Para simplificar a notação, vamos pensar no Sol, na Terra (com massa muito menor do que a do Sol) e num asteroide (com massa muito menor do que a da Terra).

Lagrange encontrou cinco posições de equilíbrio, dentre as quais três já eram conhecidas (devido ao trabalho de Euler) e duas eram novas configurações. Apenas estas últimas duas podem formar configurações estáveis (ou seja, que não se desfazem de forma quase espontânea).

Não iremos fazer aqui as contas (podem consultar [2]), mas apenas indicar os principais conceitos. Inicialmente, temos de calcular a órbita do planeta ao redor do Sol. Vamos supor que esta seja uma circunferência. Desta forma, as possíveis posições da massa do asteroide que mantém uma configuração de equilíbrio terão de estar no mesmo plano da órbita.

As três primeiras posições de equilíbrio localizam-se na linha que liga o Sol à Terra, sendo a primeira entre os dois corpos (ponto L_1), a segunda atrás da Terra (ponto L_2 , onde está agora o telescópio James Webb) e um terceiro

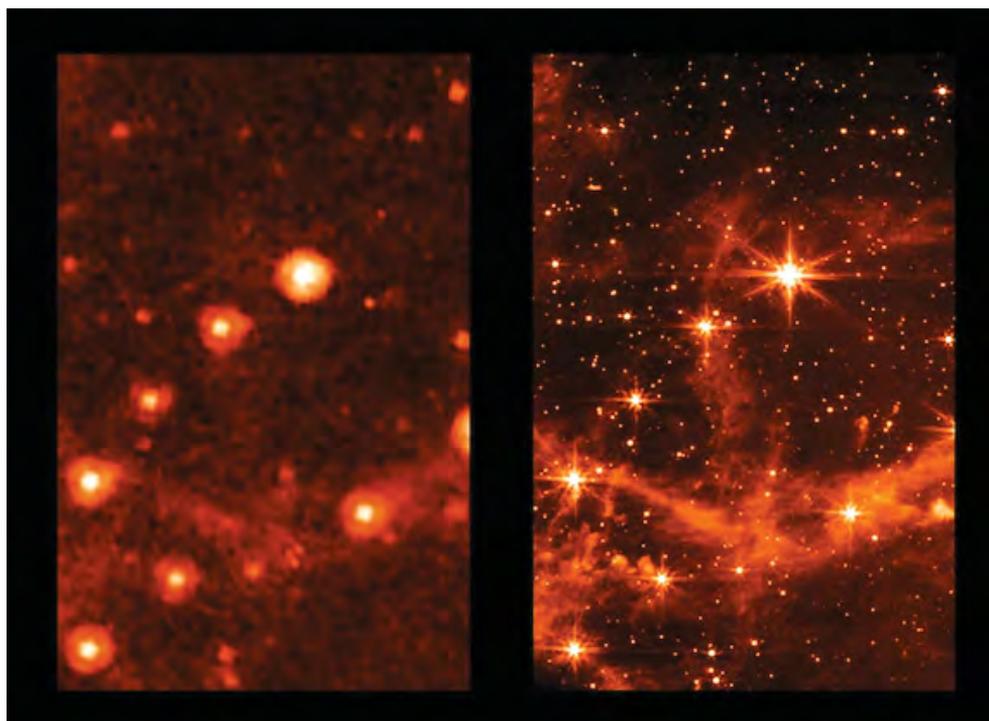


Figura 1. Uma das primeiras fotos do telescópio James Webb, ainda em processo de calibração. **À esquerda**, a melhor foto até agora da mesma localização, parte da Nuvem de Magalhães (NASA/JPL-Caltech). **À direita**, foto da mesma região, feita pelo telescópio James Webb (NASA/ESA/CSA/STScI).

ponto atrás do Sol (ponto L_3). É importante notar que um objeto em cada uma destas posições não está parado, mas, na verdade, gira em torno do Sol com o mesmo período da Terra, mantendo a sua posição relativa em relação à linha que une o Sol ao nosso planeta.

Dois outros pontos estão fora deste eixo. São os pontos L_4 e L_5 . Cada um deles se localiza na órbita da Terra, avançado (no primeiro caso) ou atrasado (no segundo) de um ângulo de 60 graus em relação à Terra. Estes pontos também são conhecidos como *pontos troianos*.

Lagrange teve de esperar mais de 100 anos (obviamente uma força de expressão...), até 1907, quando foi descoberto o primeiro objeto a orbitar em sincronia com Júpiter no seu ponto L_4 (ou seja, no ponto L_4 do sistema Sol-Júpiter). Mais de 100 anos se passaram até que o primeiro destes objetos fosse encontrado no ponto L_4 do sistema Sol-Terra. Em 2020, o segundo foi encontrado [4].

Atualmente, mais de 10 000 pequenos objetos já foram catalogados a orbitar o Sol em sincronia com o maior planeta do nosso sistema. Isto indica que estes asteroides não escapam com facilidade da gravidade conjunta do Sol e de Júpiter, mostrando a estabilidade desta

configuração. O que será sempre verdade, desde que a massa do Sol seja, pelo menos, cerca de $\frac{\sqrt{27}+\sqrt{23}}{\sqrt{27}-\sqrt{23}} \approx 25$ vezes maior do que a do planeta de referência.

Como dito no início, um objeto colocado no ponto L_1 , L_2 ou L_3 estará em equilíbrio com o sistema Sol-planeta, mas este equilíbrio é *instável*: a pequena massa acabará por rapidamente se distanciar. Por que, então, colocar o James Webb no L_2 ? Em primeiro lugar, porque os pontos L_4 e L_5 são muito distantes da Terra, dificultando a comunicação entre o telescópio e as bases operacionais na Terra. Ademais, o ponto L_2 está na sombra da Terra, garantindo que a interferência do Sol nas imagens astronômicas será minimizada. O ponto negativo, evidentemente, é que a sua órbita tem de ser constantemente corrigida (o telescópio não fica parado neste ponto, mas orbita circularmente o ponto L_2).

Mas os outros pontos também têm o seu interesse, na ciência ou na ficção científica...

O ponto L_1 tem sido usado para missões de observação solar. A missão *Solar and Heliospheric Observatory* (SOHO), da ESA, instalou um telescópio para constante observa-

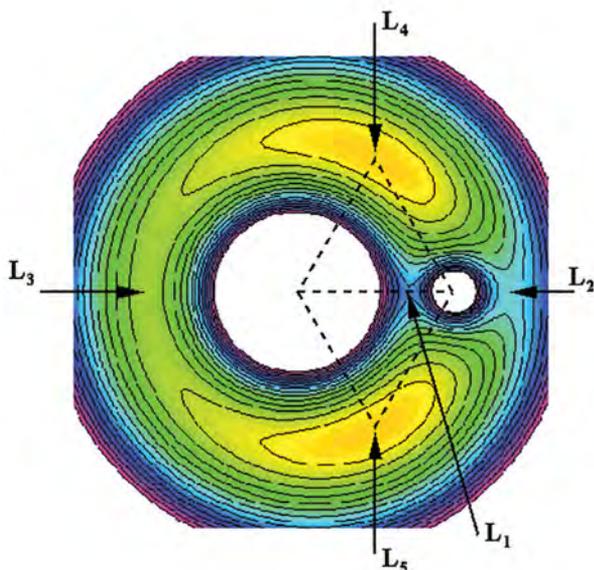


Figura 2. Potencial gravitacional de um sistema dado por um planeta a orbitar ao redor do Sol, com linhas equipotenciais. O Sol está no centro da figura, enquanto o planeta é representado pelo círculo branco à direita. Gráfico fora de escala. **Domínio público**, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=38174>.

ção da coroa solar exatamente neste ponto. Também serve para observar o nosso planeta de um ponto fixo, como pode ser observado no vídeo disponível em <https://youtu.be/CFrP6QfbC2g>. Esta colagem sequencial de milhares de fotos feitas pelo satélite DSCOVR mostra a Terra durante um ano, com as mudanças sazonais vistas claramente.

Em oposição ao Sol, está o ponto L_3 , eternamente escondido de nós. Assim, não há muito interesse em enviar uma missão até lá, pois quaisquer que fossem os seus achados, seria difícil enviar informação de volta. No entanto, é um ponto cheio de mistério, pois, quem sabe?, não há por lá um planeta cheio de vida, eternamente fora do nosso alcance? (Pouco provável, este ponto é instável, lembrem-se? Além disto, não poderia ter muita massa, já que seria detetado pelos seus efeitos gravitacionais. Estes factos nunca detiveram a ficção científica.)

Também o sistema Terra-Lua tem os seus pontos de Lagrange. A questão da estabilidade é, no entanto, muito mais crítica, pois a influência da gravidade do Sol não pode ser negligenciada, como fizemos na análise anterior. De facto, há planos para a colocação de satélites de comunicação nestes pontos, que facilitarão

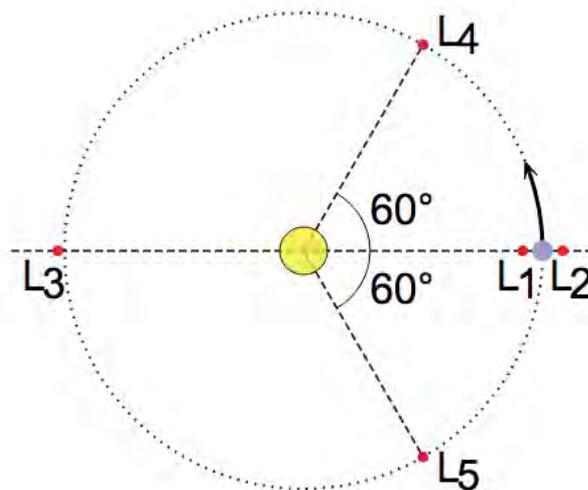


Figura 3. Localização dos pontos de Lagrange, em escala, para o sistema Sol-Terra. Veja que os pontos estáveis L_4 e L_5 são substancialmente mais distantes da Terra do que os pontos instáveis L_1 e L_2 . Disponível em By EnEdC - Own work using: Inkscape, **Public Domain**, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=1639194>.

uma futura instalação de bases lunares permanentes. Os chineses chegaram primeiro ao L_4 , e já há lá um satélite em fase de testes, capaz de, futuramente, ser um potente ponto para transmissão de informações entre uma base terrestre e outra no nosso único satélite natural.

REFERÊNCIAS

- [1] <https://blogs.nasa.gov/webb/2022/05/09/miris-sharper-view-hints-at-new-possibilities-for-science> em 10 de maio de 2022.
- [2] K. R. Symon. *Mechanics*. Addison-Wesley; 3rd edition (1971).
- [3] J. L. Lagrange, *Essai sur le Problème des Trois Corps*, Oeuvres de Lagrange, Vol. 6, 1772, pp. 229-332.
- [4] Santana-Ros, T., Micheli, M., Faggioli, L. et al. *Orbital Stability Analysis and Photometric Characterization of the Second Earth Trojan asteroid 2020 XL5*. Nat Commun 13, 447 (2022). <https://doi.org/10.1038/s41467-022-27988-4>



SIMPLIFICAÇÃO DE RADICAIS

ANTÓNIO PEREIRA ROSA

ESCOLA SECUNDÁRIA DE CAMÕES

antoniopereirarosa@gmail.com

A simplificação de radicais duplos, estudada no Ensino Secundário nos anos 60 do século passado, caiu no esquecimento até ao surgimento das Metas Curriculares, reaparecendo então na forma de exercícios. Neste artigo procuramos ir um pouco mais além, apresentando a teoria subjacente a essas simplificações, bem como exemplos de aplicação. Terminamos com um exemplo devido a Pedro Nunes, que resultou da sua análise de algumas peculiaridades da fórmula de Cardan-Tartaglia para a equação do terceiro grau.

1. INTRODUÇÃO

Ao estudarmos as operações com radicais, constatamos imediatamente que há uma grande diferença entre a multiplicação e a adição. Mesmo que só consideremos raízes quadradas, tem-se que $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ mas é, em geral, falso que $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ para dois números não negativos a e b . Neste trabalho vamos tentar elucidar as relações entre o radical de uma soma e a soma dos radicais, bem como a questão da simplificação de radicais quadráticos da forma $\sqrt{A + \sqrt{B}}$. No final, falaremos um pouco sobre a simplificação de radicais de índice mais elevado. Não consideraremos a simplificação de expressões relacionadas com produtos e quociente de radicais, uma vez que estes processos são sobejamente conhecidos a nível do Ensino Secundário.

2. SIMPLIFICAÇÃO DE RADICAIS QUADRÁTICOS

Quanto ao primeiro tema, temos o seguinte resultado, já conhecido dos matemáticos hindus e árabes (veja-se [10]), e que está perfeitamente ao alcance dos alunos do 10.º ano:

Proposição 1: Sejam a e b dois números não negativos.

Então, $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a + b + 2\sqrt{ab}}$.

Demonstração:

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2} = \sqrt{a + b + 2\sqrt{ab}}$$

Nota: Decorre imediatamente da fórmula anterior que $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ e que $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ se e só se pelo menos um dos números a ou b for zero.

Nos manuais escolares do 10.º ano, surgem frequentemente exercícios em que se pretendem provar igualdades como

$$\sqrt{14 + 6\sqrt{5}} = 3 + \sqrt{5},$$

que são consideradas de dificuldade elevada e que, na nossa experiência, deixam os alunos perplexos.

Começemos por analisar a decomposição acima indicada, por meio de dois processos distintos.

1.º processo:

$$\sqrt{14 + 6\sqrt{5}} = \sqrt{9 + 6\sqrt{5} + 5} = \sqrt{(3 + \sqrt{5})^2} = 3 + \sqrt{5}.$$

O artifício foi escrever o número 14 como soma de duas parcelas, sendo uma um quadrado perfeito e recorrer ao caso notável da multiplicação “quadrado de uma soma”.

2.º processo: Tentemos determinar dois números x e y (racionais ou, se possível, inteiros) tais que $\sqrt{14 + 6\sqrt{5}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$; elevando ao quadrado ambos os membros desta igualdade, vem $14 + 6\sqrt{5} = (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2$. Após simplificações, chegamos a $14 + 6\sqrt{5} = x + y + 2\sqrt{xy}$ donde obtemos o sistema¹

$$\begin{cases} x + y = 14 \\ 6\sqrt{5} = 2\sqrt{xy} \end{cases}$$

Se elevarmos ambos os membros da segunda equação ao quadrado e simplificarmos, chegamos a

$$\begin{cases} x + y = 14 \\ xy = 45 \end{cases}$$

que tem as soluções² (9, 5) e (5, 9). Em qualquer dos casos, obtemos $\sqrt{14 + 6\sqrt{5}} = \sqrt{9} + \sqrt{5} = 3 + \sqrt{5}$, em concordância com o resultado do primeiro processo.

¹Ver a demonstração da proposição 2 para a justificação da passagem da equação ao sistema.

²Uma alternativa interessante à resolução do sistema por substituição é o recurso às fórmulas que dão a soma e o produto das raízes duma equação quadrática, um tópico infelizmente esquecido no atual Ensino Secundário. No caso em estudo, basta considerar a equação $x^2 - 14x + 45 = 0$ para se obterem imediatamente os resultados indicados; veja-se a demonstração da proposição 2.

No que se segue, analisaremos com cuidado este segundo processo e obteremos condições necessárias e suficientes para a possibilidade da decomposição e uma fórmula geral para a efetuar, um assunto que era estudado a nível do Ensino Secundário ainda nos anos 60 do século passado (ver, por exemplo, [9]).

A necessidade de uma análise cuidadosa torna-se evidente se considerarmos o radical $\sqrt{14 - 6\sqrt{5}}$; se, por analogia com o caso $\sqrt{14 + 6\sqrt{5}}$, tentarmos escrevê-lo na forma $\sqrt{x} - \sqrt{y}$, somos levados de novo ao sistema

$$\begin{cases} x + y = 14 \\ xy = 45 \end{cases}$$

e obtemos, além da igualdade verdadeira

$$\sqrt{14 - 6\sqrt{5}} = 3 - \sqrt{5},$$

o resultado incorreto $\sqrt{14 - 6\sqrt{5}} = \sqrt{5} - 3$.

Notemos que decomposições deste género nem sempre são possíveis. Por exemplo, é impossível escrever $\sqrt{1 + \sqrt{2}}$ como soma das raízes quadradas de dois números naturais; basta reparar que $\sqrt{1 + \sqrt{2}} < 1,6$ e que, dados dois números naturais quaisquer a e b , se tem que $\sqrt{a} + \sqrt{b} \geq 2$.

Antes de estudarmos a simplificação de radicais da forma $\sqrt{A + \sqrt{B}}$, notemos que é indiferente considerar radicais nesta forma ou na forma $\sqrt{a + b\sqrt{q}}$, pois as duas são obviamente equivalentes, desde que $b \geq 0$.

A seguinte proposição esclarece em que condições se pode escrever um radical duplo da forma $\sqrt{A + \sqrt{B}}$ como soma de dois radicais simples. Começemos por uma definição.

Definição 1: Um número racional positivo A diz-se um *quadrado perfeito* se existir um número racional B tal que $B^2 = A$.

Proposição 2: Dados dois números racionais positivos A e B , não sendo B um quadrado perfeito, existem dois números racionais x e y tais que $\sqrt{A + \sqrt{B}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ se e só se $A^2 - B$ for um quadrado perfeito.

Nota: Começemos por reparar que se B fosse um quadrado perfeito, o radical duplo reduzir-se-ia trivialmente a um radical simples, daí que esta hipótese seja logo descartada no enunciado.

Demonstração: A equação $\sqrt{A + \sqrt{B}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ é equivalente à equação $(\sqrt{A + \sqrt{B}})^2 = (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2$, já que os seus membros são ambos positivos. Desenvolvendo os cálculos, vem que

$$A + \sqrt{B} = x + y + 2\sqrt{xy},$$

ou ainda

$$2\sqrt{xy} = A - x - y + \sqrt{B}. \quad (1)$$

Mediante uma nova elevação ao quadrado, chegamos a

$$4xy = (A - x - y)^2 + B + 2(A - x - y)\sqrt{B}. \quad (2)$$

Concluimos então que

$$A - x - y = 0 \quad (3)$$

pois se assim não fosse, resultaria de (1) que

$$\sqrt{B} = \frac{4xy - (A - x - y)^2 - B}{2(A - x - y)},$$

o que é absurdo, pois o primeiro membro desta igualdade é um número irracional e o segundo membro um número racional. Assim, de (3) vem que

$$x + y = A \quad (4)$$

Por substituição de (4) em (1), resulta, após elevação ao quadrado de ambos os membros, que

$$xy = \frac{B}{4}. \quad (5)$$

Atendendo a (4) e (5), podemos, recorrendo às fórmulas referidas na nota 2, determinar os valores de x e y : são as soluções da equação

$$X^2 - AX + \frac{B}{4} = 0, \quad (6)$$

que são $\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}$ e $\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}$. Basta então escolher um destes valores para x e o outro será o correspondente valor de y . Como x e y devem ser racionais, a expressão $A^2 - B$ tem de ser um quadrado perfeito.

Reciprocamente, se a expressão $A^2 - B$ for um quadrado perfeito, o número $C = \sqrt{A^2 - B}$ é racional, o mesmo sucedendo com os números

$$\frac{A + C}{2} \text{ e } \frac{A - C}{2},$$

que são as soluções da equação (6). Estes dois números são as únicas soluções possíveis de (1) e logo de $\sqrt{A + \sqrt{B}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$, pois estas equações são equivalentes.

Observação: Se considerarmos agora a igualdade $\sqrt{A - \sqrt{B}} = \sqrt{x} - \sqrt{y}$, verificamos que as considerações anteriores se podem aplicar, desde que tomemos $x = \frac{A+C}{2}$ e $y = \frac{A-C}{2}$ para que a diferença

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} - \sqrt{\frac{A-C}{2}}$$

seja positiva, já que o radical $\sqrt{A - \sqrt{B}}$ que lhe é igual, é positivo.

Em resumo, temos o seguinte resultado:

Teorema 1. Dados dois números racionais positivos A e B , não sendo B um quadrado perfeito, existem dois números racionais x e y tais que $\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y}$ se e só se $A^2 - B$ for um quadrado perfeito.

Exemplos e aplicações:

1) Os dois exemplos dados anteriormente tornam-se triviais à luz deste teorema. Com efeito,

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \sqrt{14 + 6\sqrt{5}} &= \sqrt{14 + \sqrt{180}} = \\ &= \sqrt{\frac{14+4}{2}} + \sqrt{\frac{14-4}{2}} = \\ &= \sqrt{9} + \sqrt{5} = 3 + \sqrt{5}, \end{aligned}$$

como se reconhece imediatamente; pondo $A = 14$ e $B = 180$, vem $A^2 - B = 16 = 4^2$ e podemos tomar $C = 4$.

$\blacktriangleright \sqrt{1 + \sqrt{2}}$ não pode ser simplificado pois $A^2 - B = 1^2 - 2 = -1$ não é um quadrado perfeito.

2) A equação biquadrada

Recordemos que se chama equação biquadrada a uma equação da forma $ax^4 + bx^2 + c = 0$, com $a \neq 0$. Estas equações resolvem-se facilmente recorrendo à substituição $y = x^2$:

$$\begin{aligned} ax^4 + bx^2 + c = 0 &\Leftrightarrow ay^2 + by + c = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow y &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Leftrightarrow x^2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x &= \pm \sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}. \end{aligned}$$

Esta última expressão mostra a utilidade do teorema 1 no estudo destas equações.

Por exemplo, se considerarmos a equação $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$, a aplicação da fórmula anterior levamos a $x = \pm \sqrt{5 \pm \sqrt{24}}$; como $A^2 - B = 5^2 - 24 = 1$, podemos considerar $C = 1$ e obtemos as quatro soluções numa forma muito mais "simpática":

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{3} + \sqrt{2} \vee x = \sqrt{3} - \sqrt{2} \vee \\ x &= -\sqrt{3} + \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{3} - \sqrt{2}. \end{aligned}$$

3) Um problema de trigonometria

Um exercício clássico em trigonometria é a obtenção das razões trigonométricas de alguns ângulos, a partir das razões dos ângulos de amplitudes 30° , 45° e 60° . Por exemplo,

$$\begin{aligned} \cos 15^\circ &= \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \sin 15^\circ &= \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}. \end{aligned}$$

Vejam o que sucede se, tendo obtido $\cos 15^\circ$, experimentarmos calcular $\sin 15^\circ$ por outra via, recorrendo à fórmula fundamental da trigonometria:

$$\begin{aligned} \sin 15^\circ &= +\sqrt{1 - \cos^2 15^\circ} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\right)^2} = \\ &= \sqrt{1 - \frac{8 + 2\sqrt{12}}{16}} = \frac{1}{4}\sqrt{8 - \sqrt{48}}, \end{aligned}$$

valor este que parece ser completamente diferente do primeiro!

Naturalmente, os dois valores são iguais: se aplicarmos ao radical duplo $\sqrt{8 - \sqrt{48}}$ o método de simplificação do teorema 1 com $A = 8$ e $B = 48$, verifica-se imediatamente que podemos considerar $C = 4$ e então

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\sqrt{8 - \sqrt{48}} &= \frac{1}{4} \left[\sqrt{\frac{8+4}{2}} - \sqrt{\frac{8-4}{2}} \right] = \\ &= \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2}) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}. \end{aligned}$$

4) Simplificação de algumas expressões mais complicadas

a) A expressão $\sqrt{5\sqrt{7} + 2\sqrt{42}}$ não está nas condições do teorema 1, mas pode ser simplificada se admitirmos o uso de raízes de índice quatro. Com efeito,

$$\sqrt{5\sqrt{7} + 2\sqrt{42}} = \sqrt{\sqrt{7}\sqrt{5 + 2\sqrt{6}}} = \sqrt[4]{7}\sqrt{5 + \sqrt{24}}$$

e, por aplicação do teorema 1, obtemos finalmente

$$\sqrt{5\sqrt{7} + 2\sqrt{42}} = \sqrt[4]{7}(\sqrt{3} + \sqrt{2}).$$

b) A expressão $\sqrt{5 + \sqrt{6} + \sqrt{10} + \sqrt{15}}$ pode ser simplificada recorrendo ao teorema 1 (e a alguma engenhosidade...). Para tanto, reparemos que um raciocínio análogo ao utilizado na prova do teorema 1 leva à fórmula

$$\sqrt{A \pm B} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B^2}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B^2}}{2}}$$

onde A e B são números positivos e $A > B$.

Se fizermos $A = 5 + \sqrt{10}$ e $B = \sqrt{6} + \sqrt{15}$, vem

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B^2}}{2}} &= \sqrt{\frac{5 + \sqrt{10} + \sqrt{(5 + \sqrt{10})^2 - (\sqrt{6} + \sqrt{15})^2}}{2}} = \\ &= \sqrt{\frac{5 + \sqrt{10} + \sqrt{14 + 4\sqrt{10}}}{2}} = \\ &= \sqrt{\frac{5 + \sqrt{10} + 2 + \sqrt{10}}{2}} = \\ &= \sqrt{\frac{7}{2} + \sqrt{10}} = 1 + \frac{\sqrt{10}}{2},\end{aligned}$$

por aplicação do teorema 1 aos radicais $\sqrt{14 + 4\sqrt{10}}$ e $\sqrt{\frac{7}{2} + \sqrt{10}}$.

Analogamente, chega-se a

$$\sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B^2}}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}};$$

neste caso nem sequer é preciso aplicar o teorema 1.

A simplificação desejada é então

$$\sqrt{5 + \sqrt{6} + \sqrt{10} + \sqrt{15}} = 1 + \sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Podem encontrar-se muitos outros exemplos e exercícios de simplificações deste género em [3].

3. RADICAIS DE ÍNDICE SUPERIOR

O estudo das simplificações destes radicais é muito mais difícil; na década de 90 do século passado foi apresentado o primeiro algoritmo geral para este problema pela matemática americana Susan Landau (ver [7] ou [8]) e ainda subsistem muitos problemas em aberto. No que se segue, limitar-nos-emos a alguns exemplos, essencialmente de carácter histórico sobre radicais do tipo $\sqrt[3]{a + b\sqrt{q}}$. Este tipo de radicais surge naturalmente a propósito da fórmula de Cardan-Tartaglia para a resolução de equações do terceiro grau (ver, por exemplo, [2] ou [6]): se $x^3 + px + q = 0$ então

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$

desde que as raízes cúbicas sejam escolhidas de modo a que o seu produto seja igual a $-p/3$.

Por volta de 1540 e motivado pela fórmula referida, Tartaglia chegou ao resultado que a seguir apresentamos, em linguagem e notação modernas ([10]).

Teorema 2. Sejam a e b dois números racionais, não sendo b um quadrado perfeito e tais que $\sqrt[3]{a + \sqrt{b}}$ é irracional.

Se:

- 1) $\sqrt[3]{a^2 - b}$ for racional;
- 2) a equação $4x^3 - 3\sqrt[3]{a^2 - b}x = a$ tiver uma solução racional, então existem dois números racionais u e v tais que $\sqrt[3]{a + \sqrt{b}} = u + \sqrt{v}$.

Demonstração: Supondo que

$$\sqrt[3]{a + \sqrt{b}} = u + \sqrt{v}, \quad (7)$$

segue-se, por elevação ao cubo de ambos os membros, que

$$a + \sqrt{b} = u^3 + 3uv + (3u^2 + v)\sqrt{v}$$

donde, atendendo a que a e b são números racionais, segue-se que

$$\begin{cases} a = u^3 + 3uv \\ \sqrt{b} = (3u^2 + v)\sqrt{v}. \end{cases}$$

Se subtrairmos a segunda equação da primeira, obtemos $a - \sqrt{b} = (u - \sqrt{v})^3$; extractando a raiz cúbica de ambos os membros, resulta que

$$\sqrt[3]{a - \sqrt{b}} = u - \sqrt{v}. \quad (8)$$

Multipliquemos membro a membro as igualdades (7) e (8); vem que $\sqrt[3]{a^2 - b} = u^2 - v$ e, portanto $v = u^2 - \sqrt[3]{a^2 - b}$. Se substituirmos este valor na primeira equação do sistema, chegamos a

$$a = 4u^3 - 3\left(\sqrt[3]{a^2 - b}\right)u,$$

equação esta que, por hipótese, tem uma raiz racional u . Basta então considerar $v = u^2 - \sqrt[3]{a^2 - b}$, que é racional, pela hipótese 1), e obtemos $\sqrt[3]{a + \sqrt{b}} = u + \sqrt{v}$ e $\sqrt[3]{a - \sqrt{b}} = u - \sqrt{v}$, o que conclui a prova.

Vejamos um exemplo deste método tão engenhoso, simplificando a expressão $\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}}$. Tem-se que $a = 2$, $b = \sqrt{5}$ e $\sqrt[3]{2^2 - \sqrt{5}} = -1$; a equação auxiliar é $4x^3 + 3x - 2 = 0$, que tem a raiz racional $1/2$.

Segue-se que

$$u = \frac{1}{2}, v = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \sqrt[3]{-1} = \frac{5}{4}$$

e

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2},$$

o conhecido *número de ouro*.

Para concluir, apresentaremos um exemplo de simplificação de radicais cúbicos devido a Pedro Nu-

nes, que é descrito em [4]. Se aplicarmos à equação $x^3 + 6x = 20$ a fórmula de Cardan-Tartaglia, vem $x = \sqrt[3]{\sqrt{108} + 10} - \sqrt[3]{\sqrt{108} - 10}$ ⁴. No *Libro de Algebra en Arithmetica e Geometria* (publicado em 1567, mas composto cerca de 30 anos antes), Pedro Nunes utiliza esta equação para apontar algumas peculiaridades da fórmula de Cardan-Tartaglia, sem pôr em causa a sua correção. É que esta expressão tão complicada “esconde” a solução 2 da equação em causa!

Pedro Nunes, talvez por tentativas ou motivado pela igualdade $\sqrt{108} = 6\sqrt{3}$, reparou que $\sqrt{108} + 10$ é o cubo de uma certa expressão, a saber $\sqrt{3} + 1$, como se verifica imediatamente:

$$\begin{aligned}(\sqrt{3} + 1)^3 &= \sqrt{3}^3 + {}^3C_1\sqrt{3}^2 + {}^3C_2\sqrt{3} + 1^3 \\ &= 3\sqrt{3} + 9 + 3\sqrt{3} + 1 \\ &= 10 + 6\sqrt{3} = 10 + \sqrt{108},\end{aligned}$$

donde a simplificação $\sqrt[3]{10 + \sqrt{108}} = \sqrt{3} + 1$.

Analogamente se obtém $\sqrt[3]{\sqrt{108} - 10} = \sqrt{3} - 1$. Combinando as duas simplificações, Pedro Nunes chegou à surpreendente igualdade

$$\sqrt[3]{\sqrt{108} + 10} - \sqrt[3]{\sqrt{108} - 10} = \sqrt{3} + 1 - (\sqrt{3} - 1) = 2.⁵$$

Deixamos ao cuidado do leitor obter os resultados de Pedro Nunes recorrendo ao teorema 2.

4. REFERÊNCIAS

- [1] Borodin, A., Fagin, R., Hopcroft, J. e Tompa, M. “Decreasing the Nesting Depth of Expressions Involving Square Roots”, *Journal of Symbolic Computation*, 1, 1985.
- [2] Brison, O. W. *Teoria de Galois* (4ª. ed.), Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências de Lisboa, 2003.
- [3] Chrystal, G. *Algebra: An Elementary Text-Book (part 1)*, Adam and Charles Black, 1904.
- [4] Estrada, M. F., Sá, C. C., Queirós, J. F., Silva, M. C. e Costa, M. J. *História da Matemática*, Universidade Aberta, 2000.
- [5] Gkioulekas, E. “On the Denesting of Nested Square Roots”, *International Journal of Mathematical Education*, nº 48, 2017.
- [6] Kurosh, A. *Cours d’Algèbre Supérieure*, Editions Mir, 1973.

[7] Landau, S., “Simplification of Nested Radicals”, *SIAM J. Comput* 21 (1992), n.º. 1, 85-110.

[8] Landau, S. “How to Tangle with a Nested Radical”, *The Mathematical Intelligencer*, 1994.

[9] Sebastião e Silva, J. e Silva Paulo, J. D. *Compêndio de Álgebra (Terceiro Ciclo)*, Livraria Rodrigues, 1960.

[10] Tignol, J. *Galois’ Theory of Algebraic Equations*, World Scientific, 2001.

³ Não é necessário resolver a equação; pelo teorema da raiz racional as possíveis raízes racionais podem ser escritas na forma r/t , onde t divide -2 e, portanto, só pode ser $\pm 1, \pm 2$ e r divide 4 e logo só pode ser $\pm 1, \pm 2, \pm 4$. Experimentando as várias possibilidades, chegamos à raiz indicada.

⁴ No famoso tratado *Ars Magna*, Cardan, que seguia a prática vulgar na época de não considerar coeficientes negativos, tem necessidade de utilizar várias fórmulas distintas ao estudar a equação cúbica; assim, na equação $x^3 + px = q$, onde p e q são números positivos, tem-se $x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$.

⁵ Uma justificação alternativa é a seguinte: seja $f(x) = x^3 + 6x - 20$. Tem-se que $x^3 + 6x = 20 \Leftrightarrow f(x) = 0$ e que $f(2) = 0$. A função f é estritamente crescente já que $x < y \Rightarrow x^3 < y^3$ e $x < y \Rightarrow 6x < 6y$, pelo que a solução 2 é única e, portanto, $\sqrt[3]{\sqrt{108} + 10} - \sqrt[3]{\sqrt{108} - 10} = 2$.

SOBRE O AUTOR

António Pereira Rosa é licenciado em Matemática (1986) e mestre em Matemática para o Ensino (2008) pela Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. É professor do quadro da Escola Secundária de Camões.

Women in Mathematics

 <p>Hypatia (355–415/416)</p> <p>BEST KNOWN FOR: being recognized as the first woman to make a substantial contribution to the development of mathematics.</p>	 <p>Émilie du Châtelet (1706–1749)</p> <p>BEST KNOWN FOR: her translation and commentary of Isaac Newton's Principia, her translation and commentaries are still considered the standard French translation.</p>	 <p>Maria Agnesi (1718–1796)</p> <p>BEST KNOWN FOR: being the first woman to write a mathematics handbook. She was also the first woman appointed as a mathematics professor at a university.</p>	 <p>Marie-Sophie Germain (1776–1831)</p> <p>BEST KNOWN FOR: her correspondence with Lagrange, Laplace, and Gauss under a male pseudonym. She was the first woman to publish a paper in her field and did foundational work on Fermat's Last Theorem.</p>	 <p>Mary Somerville <i>née Fairfax</i> (1780–1872)</p> <p>BEST KNOWN FOR: being a polymath who studied mathematics and astronomy. She was one of the two females who were elected as first female Honorary Members of the Royal Astronomical Society. The Somerville College of the University of Oxford is named in her honour.</p>	 <p>Ada Lovelace (1815–1852)</p> <p>BEST KNOWN FOR: working with Charles Babbage on his mechanical general-purpose computer, the Analytical Engine. She is credited with writing the first algorithm that could be carried out by such a machine.</p>
 <p>Florence Nightingale (1820–1910)</p> <p>BEST KNOWN FOR: besides being the founder of modern nursing, her work in statistics, such as inventing the polar area graph, which she used to highlight the reasons to the public and politicians.</p>	 <p>Sofya Vasilyevna Kovalevskaya (1850–1901)</p> <p>BEST KNOWN FOR: her work on analysis, partial differential equations, and mechanics. She was the first woman becoming a full professor in northern Europe. She is one of the first women editors of a scientific journal.</p>	 <p>Alicia Boole Stott (1860–1944)</p> <p>BEST KNOWN FOR: coining the term polytope, a four-dimensional convex solid and discovering six regular ones.</p>	 <p>Philippa Garrett Fawcett (1867–1918)</p> <p>BEST KNOWN FOR: being the first woman to obtain a first-class honours degree in mathematics. She did not receive the title of Senior Wrangler, as only men were then awarded.</p>	 <p>Emmy Noether (1882–1935)</p> <p>BEST KNOWN FOR: her work in abstract algebra and theoretical physics. Especially Noether's theorem and Noether's ring, both for elementary particle physics and general relativity.</p>	 <p>Mary Lucy Cartwright (1900–1998)</p> <p>BEST KNOWN FOR: being one of the pioneers of chaos theory. Cartwright was the first woman to become a fellow of the Royal Society, receiving the accolade in 1993. She was also a member of the Association and of the London Mathematical Society.</p>
 <p>Gertrude Mary Cox (1900–1973)</p> <p>BEST KNOWN FOR: her work on experimental design in statistics. Cox became the first woman elected to the International Statistical Institute.</p>	 <p>Marie-Louise Dubreil-Jacotin (1905–1972)</p> <p>BEST KNOWN FOR: being the second woman to earn a doctorate in pure mathematics and the first woman to become a full professor of mathematics in France. In addition to her expertise in fluid mechanics and abstract algebra, she authored a work in the history of mathematics.</p>	 <p>Ruth Moufang (1905–1977)</p> <p>BEST KNOWN FOR: ground-breaking work on non-associative algebraic structures, including the Moufang loops named after her and a new branch of geometry called Moufang planes.</p>	 <p>Dorothy Vaughan (1910–2008)</p>	 <p>Katherine Johnson (1918–2020)</p>	 <p>Mary Jackson (1921–2005)</p>
 <p>Rózsa Peter (1906–1977)</p> <p>BEST KNOWN FOR: being the first Hungarian woman to become an Associate Doctor of Mathematics. She was awarded several prizes and honours and was the first woman to be elected to the Hungarian Academy of Sciences.</p>	 <p>Grace Brewster Murray Hopper <i>née Murray</i> (1906–1992)</p> <p>BEST KNOWN FOR: being a computer scientist with a PhD in Mathematics. She invented one of the first linkers, link loaders, and was the first to originate the term of machine-independent programming languages.</p>	 <p>Joan Elisabeth Lowther Murray <i>née Clarke</i> (1917–1996)</p> <p>BEST KNOWN FOR: being the only female practitioner of ballistics in the world. She was recruited by Alan Turing during World War II during her recruitment at the Government Code and Cypher School. She became the deputy head of her section afterwards.</p>	 <p>Melba Roy Mouton (1919–1999)</p>	 <p>Christine Darden (b. 1942)</p>	<p>The Women Computers of NASA</p> <p>A group of women mathematicians, NASA computer and letter programmers at NASA, NASA and Langley Research Centre who contributed considerably to the American Space race.</p> <p>Starting with 5 female mathematicians on staff in 1935, in 1940 there were 400.</p> <p>NOTABLE MEMBERS ARE: Dorothy Vaughan, Katherine Johnson, Mary Jackson, Melba Roy Mouton, and Christine Darden.</p>
 <p>Phyllis Nicolson <i>née Lockett</i> (1917–1968)</p> <p>BEST KNOWN FOR: her work in numerical analysis with John von Neumann on the Crank-Nicolson method. She was the first woman to be elected to the Royal Society. She became a prominent user of Turing's differential analyzer.</p>	 <p>Julia Robinson (1919–1985)</p> <p>BEST KNOWN FOR: her contributions to computational complexity theory and Hilbert's tenth problem.</p>	 <p>Olga Aleksandrovna Ladyzhenskaya (1922–2004)</p> <p>BEST KNOWN FOR: her work on partial differential equations, fluid dynamics, and the convergence of a finite difference method for the Navier-Stokes equations. She was in the shortlist for the Fields Medal in 1958.</p>	 <p>Anneli Lax (1922–1996)</p> <p>BEST KNOWN FOR: her contributions to algebra. She introduced the inclusion of language skills in mathematical education.</p>	 <p>Yvonne Choquet-Bruhat (b. 1922)</p> <p>BEST KNOWN FOR: her contributions to the study of Einstein's general theory of relativity. She was the first woman to be elected as a full member of the French Academy of Sciences and is the Grand Officer of the Legion of Honour.</p>	 <p>Olga Arsenievna Oleinik (1925–2001)</p> <p>BEST KNOWN FOR: her pioneering work on the theory of algebraic, geometric, partial differential equations, the theory of strongly anisotropic media, and the mathematical theory of boundary layers.</p>
 <p>Maria Wonenburger (1927–2014)</p> <p>BEST KNOWN FOR: her work on group theory and Lie algebras. She was the first Spaniard to obtain a Fulbright scholarship for doctoral studies in mathematics.</p>	 <p>Shakuntala Devi (1929–2013)</p> <p>BEST KNOWN FOR: earning a place in the 1962 Guinness Book of World Records for her ability to calculate arithmetic problems. She was known as the "Human Computer" as she mentally calculated the multiplication of two 13-digit numbers in 28 seconds.</p>	 <p>Marina Evseevna Ratner (1938–2017)</p> <p>BEST KNOWN FOR: her work on ergodic theory. She proved theorems concerning unipotent flows on homogeneous spaces, known as Ratner's theorems, and received numerous prizes for her work.</p>	 <p>Nancy Jane Kopell (b. 1942)</p> <p>BEST KNOWN FOR: her work in the area of applied mathematics, with contributions into over 200 published research articles. She is the Director and co-founder of the Center for Applied Mathematics at Northeastern University. She received several honours including the John von Neumann Prize.</p>	 <p>Idun Reiten (b. 1944)</p> <p>BEST KNOWN FOR: her work in representation theory. She received multiple awards and recognitions for outstanding research. In 2014, she was appointed as commander of the Order of St. Olav by the Norwegian King for her work in mathematics.</p>	 <p>Karen Uhlenbeck (b. 1944)</p> <p>BEST KNOWN FOR: being the founder of modern geometric analysis and the first woman to receive the Abel Prize.</p>
 <p>Ingrid Daubechies (b. 1954)</p> <p>BEST KNOWN FOR: her work in using mathematical methods to develop image processing techniques. Her name is associated with wavelets which are used in the JPEG 2000 standard. She received several recognitions and awards, including Princess of Asturias Award in 2001 for Technical and Scientific Research.</p>	 <p>Claire Voisin (b. 1962)</p> <p>BEST KNOWN FOR: her work in algebraic geometry especially Hodge theory and its application to concrete classical problems.</p>	 <p>Maryam Mirzakhani (1977–2017)</p> <p>BEST KNOWN FOR: being the first Iranian to receive the Fields Medal and the only woman to date. Her research topics included Teichmüller theory, hyperbolic geometry, ergodic theory, and symplectic geometry.</p>	 <p>The project was developed and coordinated by Ms. Silvy Hendriks, Dr. Houry Melkonian, and Prof. Maria Viazou. Additional contributions were made by Dr. Tom Ritchie and the following students of the University of Exeter: Amber Ellis, Sophia Jaffer, Anika Navaratnam, and Sophie Peel.</p> <p>Design by Anna Kleineberg kleineberg.co.uk</p>		



JOSÉ CARLOS SANTOS
Universidade
do Porto
jcsantos@fc.up.pt

A DESCOBERTA DE NEPTUNO

Urbain Le Verrier ficou famoso por ter previsto a existência de Neptuno somente a partir de cálculos. Mas a história não é tão simples quanto parece.

A descoberta de Neptuno em 1846 é um dos eventos mais famosos e midiáticos da história da Astronomia, e mesmo da história da Ciência. Vejamos brevemente como é que as coisas se passaram.¹ Em 1781, William Herschel descobriu o planeta Urano. Mais precisamente, apercebeu-se de que estava a ver pelo seu telescópio um objeto celeste que pensou inicialmente ser um cometa, mas ao fim de pouco tempo ficou convencido de que se tratava de um planeta.

Os astrónomos começaram a seguir a trajetória de Urano. Entre estes contava-se o francês Alexis Bouvard, que fez extensas tabelas astronómicas relativas a Júpiter, Saturno e Urano. Nada de extraordinário foi observado quanto às órbitas de Júpiter e de Saturno, mas a de Urano revelou anomalias. Perante esta situação, havia duas explicações possíveis: ou as leis da Mecânica Celeste estavam erradas ou havia, para lá da órbita de Urano, um outro planeta cuja presença afetava a órbita deste. Bouvard inclinou-se para esta última hipótese.

Foram feitas várias tentativas para calcular a trajetória do hipotético planeta. As mais conhecidas são as do escocês John Couch Adams² e do francês Urbain Le Verrier³ (figura 1). Adams enviou o resultado dos seus cálculos ao astrónomo real, George Biddell Airy, e ao diretor do Observatório de Greenwich, James Challis. Estes, no entanto, deram pouca importância à informação que receberam. Entretanto, em Paris, François Arago, diretor do observatório astronómico daquela cidade, sugeriu a Urbain

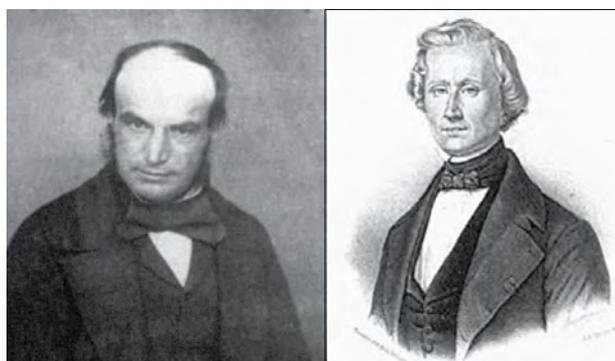


Figura 1. John Couch Adams e Urbain Le Verrier.

Le Verrier que este fizesse os cálculos necessários para determinar a órbita do planeta desconhecido. Contrariamente a Adams, Le Verrier foi publicando artigos sobre o assunto. O primeiro, datado de novembro de 1845, explicava que as atrações gravitacionais de Júpiter e de Saturno não podiam explicar as anomalias da órbita de Urano. O segundo, de junho de 1846, mencionava várias possíveis explicações para as anomalias e explicava como, dentro

¹ Mathematical discovery of planets, https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Neptune_and_Pluto/

² John Couch Adams, <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Adams/>

³ Urbain Jean Joseph Le Verrier, https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Le_Verrier/

daquelas explicações, somente a hipótese da existência de um planeta desconhecido podia estar correta. Finalmente, em agosto do mesmo ano, Le Verrier publicou um artigo com detalhes relativos à órbita do planeta hipotético.

Já o segundo artigo continha alguns dados relativos à órbita. Airy leu-o e apercebeu-se de como os valores apresentados de Le Verrier estavam próximos dos de Adams. Reuniu-se então em Greenwich com Challis e com John Herschel (filho de William Herschel e astrónomo, tal como o pai) e encorajou Challis a procurar o novo planeta. Este não se mostrou particularmente interessado, por achar improvável que um método tão teórico produzisse previsões fiáveis.

Entretanto, Le Verrier passava por um fenómeno semelhante: tentou fazer com que os astrónomos do Observatório de Paris (dirigido por Arago!) procurassem o novo planeta, mas sem grande sucesso. Escreveu então a astrónomos de outros países (Alemanha e Rússia) a pedir confirmação experimental da sua conjetura (veja-se [5, cap. 4]). Uma das pessoas a quem escreveu foi Johann Gottfried Galle, do Observatório de Berlim, o qual, na noite do próprio dia em que recebeu a carta (noite de 23 para 24 de setembro de 1846), com a colaboração do seu aluno Heinrich Louis d'Arrest, avistou Neptuno.

Quando se determinou qual era a órbita de Neptuno, tornou-se claro que este já fora avistado diversas vezes. A primeira pessoa a fazê-lo, em 1612, foi nem mais nem menos do que Galileu (veja-se [2]), que não se apercebeu de que se tratava de um planeta. Outro astrónomo a quem

aconteceu o mesmo foi John Herschel, em 1830.

A descoberta de Neptuno lançou Le Verrier para a fama. Mais exatamente, o que fascinou as pessoas na altura foi a maneira como Le Verrier fez a descoberta: por meio de cálculos. O próprio Arago escreveu que “Le Verrier localizou o novo astro sem precisar de erguer os olhos para o céu uma vez que fosse; ele viu-o *na ponta da sua caneta*” (ênfase no original; veja-se [1]). Em contrapartida, Airy e Challis foram muito criticados no Reino Unido por não terem feito em Greenwich com as informações de Adams o mesmo que Galle e d'Arrest fizeram em Berlim com as informações de Le Verrier. Pode ver-se na figura 2 um desenho humorístico que surgiu então na imprensa francesa a respeito deste assunto.

O impacto cultural da descoberta de Le Verrier foi intenso e não é difícil compreender porquê. Como escreveu Antonie Pannekoek [4, cap. 34]:

“Estes eventos produziram uma profunda impressão não só na comunidade científica, como no mundo dos leigos cultos. De todos os países choveram distinções sobre Le Verrier e a descoberta feita numa secretária de um objeto celeste jamais observado antes foi o tópico de conversa dominante por um longo período de tempo.”

De facto, tratou-se de um extraordinário golpe de sorte.

Para compreender isto, é preciso explicar um pouco como é que Le Verrier e Adams fizeram os seus cálculos. Um dos seus pontos de partida foi a lei de Titius-Bode,⁴ que

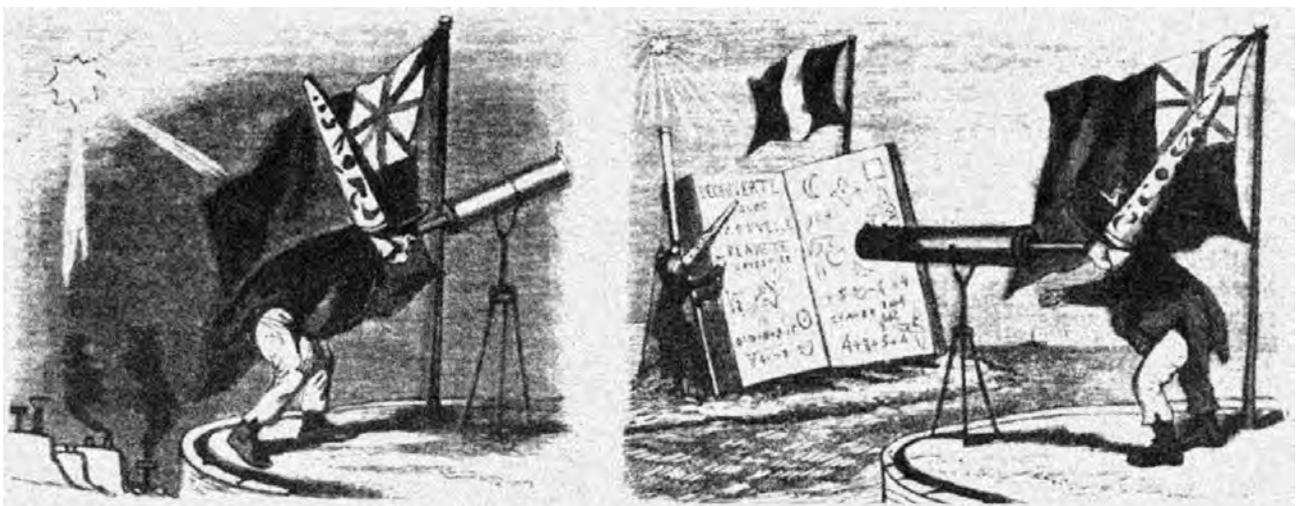


Figura 2. Caricatura: um astrónomo britânico procura um novo planeta e acaba por o descobrir num livro de um autor francês.

é relativa à distância ao Sol dos planetas do sistema solar. Segundo esta lei, que é puramente empírica, se tomarmos como unidade de medida a distância média da Terra ao Sol, então a distância média ao Sol do n -ésimo planeta é $0,4 + 0,3 \times 2^{n-1}$, tomando-se o expoente como sendo $-\infty$ quando $n = 1$. Os valores obtidos para Mercúrio, Vénus, Terra e Marte são então 0,4, 0,7, 1 e 1,6 o que bate bastante certo com a realidade. O quinto planeta é Júpiter e o valor obtido quando $n = 5$ é 2,8, o que está completamente desfasado da realidade (deveria ser 5,2) mas, se virmos o maior dos asteroides, Ceres, como o quinto planeta e Júpiter como o sexto, tudo funciona novamente. E continua a funcionar bem para Saturno e para Urano.

Em virtude disto, tanto Le Verrier como Adams fizeram os respetivos cálculos supondo que a distância média de Neptuno ao Sol é de cerca de 38,8 vezes a distância média da Terra ao Sol, quando, de facto, o verdadeiro valor é bastante inferior (é somente cerca de 30 vezes aquela distância).

Que a trajetória seguida por Neptuno é bastante diferente da prevista por Adams e Le Verrier tornou-se rapidamente claro. Somente 17 dias após a descoberta de Neptuno, o seu maior satélite, Tritão, foi descoberto por um astrónomo amador, William Lassell. O estudo da órbita de Tritão permitiu conhecer a massa de Neptuno com grande precisão. Além disso, o facto de se constatar que Neptuno já fora de facto observado várias vezes no passado (juntamente com os dados destas observações) permitiu a determinação da sua trajetória com bastante precisão. E a conclusão a tirar disto tudo foi a de que o verdadeiro Neptuno tinha muito pouco a ver com aquele que fora previsto por Le Verrier e por Adams. Esta ideia foi divulgada pela primeira vez pelo matemático norte-americano Benjamin Peirce⁵ e levou a uma acesa disputa entre cientistas europeus e norte-americanos, com Le Verrier a defender vigorosamente os seus cálculos (mas sem que Adams se manifestasse). Aqui, é natural perguntar como é que uma previsão tão errada poderá ter levado à descoberta de Neptuno. Foi só porque a busca por este planeta foi feita na altura certa, ou seja, numa altura na qual, do ponto de vista de um observador na Terra, o verdadeiro Neptuno estava bastante próximo daquele que fora previsto por meio de cálculos. Apenas cinco anos mais tarde, eles estariam em regiões muito diferentes do céu.

Le Verrier não era pessoa para se sentar em cima dos seus louros. Começou a estudar detalhadamente a órbita de Mercúrio e descobriu que, tal como a de Urano, ela revelava anomalias. Mais uma vez, das duas uma: ou as leis da Mecânica Celeste estavam erradas ou havia um outro

planeta ainda mais próximo do Sol do que Mercúrio cuja presença afetava a órbita deste. Como seria de imaginar, Le Verrier começou a fazer cálculos para determinar a órbita desse planeta, provisoriamente designado por Vulcano. E obteve uma descrição de uma tal órbita, embora também tenha emitido a hipótese de que as anomalias poderiam dever-se a uma cintura de asteroides a orbitar entre Mercúrio e o Sol.

A existência de Vulcano foi um assunto estudado pelos astrónomos desde aquela altura até ao início do século XX. O problema da anomalia da órbita de Mercúrio acabou por ser resolvido por Albert Einstein em 1915. Com efeito, quando este formulou a Teoria da Relatividade Geral, aplicou-a ao estudo da órbita de Mercúrio e a órbita prevista que obteve era aquela que os astrónomos tinham observado. Abraham Pais, biógrafo de Einstein, afirmou (veja-se [3, cap. 14]:

Acredito que esta descoberta tenha sido a experiência emocional mais forte da vida científica de Einstein, talvez de toda a sua vida. A Natureza falara-lhe. Ele tinha razão.

Em particular, neste caso eram as leis da Mecânica Celeste, tal como tinham sido formuladas por Newton, que estavam erradas.⁶

REFERÊNCIAS

- [1] F. Arago, *Planète de M. Le Verrier*, Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, 23, pp. 659-663, 1846.
- [2] S. Drake e C. T. Kowal, "Galileo's Sighting of Neptune", *Scientific American* 243 (6), pp.52-59, 1980.
- [3] Abraham Pais, "*Subtle is the Lord...*": *The Science and Life of Albert Einstein*, Oxford University Press, 1983.
- [4] A. Pannekoek, *A History of Astronomy*, Allen & Unwin, 1961.
- [5] Tony Rothman, *Everything's relative, and other fables from Science and Technology*, John Wiley & Sons, 2003.

⁴ João Fernandes, *A Matemática na Astronomia: A lei de Titius-Bode*, <http://www.mat.uc.pt/~helios/Mestre/H34bode.html>

⁵ Benjamin Peirce, https://mathhistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Peirce_Benjamin/

⁶ *The anomalous advance of the perihelion of Mercury*, <https://spaceengine.org/articles/the-anomalous-advance-of-the-perihelion-of-mercury/>



#ESTUDOEMCASA APOIA: 7 PERGUNTAS A CRISTINA NEGRA

A plataforma #EstudoEmCasa (<https://estudoemcasa.dge.mec.pt>) foi lançada pelo Ministério da Educação durante o ano letivo de 2019/2020 como forma de ajudar os alunos que, durante a pandemia, deixaram de ter aulas presenciais. No seguimento desta iniciativa, criou-se este ano letivo a plataforma #EstudoEmCasa Apoia (<https://estudoemcasaapoia.dge.mec.pt>), onde uma equipa de professores cria e disponibiliza recursos que pretendem orientar, encorajar e apoiar os alunos na recuperação e no desenvolvimento das suas aprendizagens, servindo de complemento às aulas e procurando desenvolver o estudo autónomo. A equipa editorial da *Gazeta* colocou sete perguntas a Cristina Negra, professora de Matemática e colaboradora a tempo integral na plataforma.

1. QUAIS SÃO OS OBJETIVOS ATUAIS DA PLATAFORMA ESTUDOEMCASA?

A plataforma #EstudoEmCasa Apoia é uma plataforma digital de livre acesso que pretende orientar, encorajar e apoiar os alunos na recuperação e no desenvolvimento das suas aprendizagens com autonomia.

Na página estudoemcasaapoia.dge.mec.pt, professores, alunos e as suas famílias podem encontrar recursos digitais, webinars, podcasts e vídeos focando vários temas e competências do currículo do Ensino Básico e Secundário.

A plataforma é alimentada diariamente com novos recursos educativos digitais, construídos com o objetivo de traçar percursos de aprendizagem e fomentar a autonomia dos alunos, através da proposta de tarefas interativas. Pretende-se ainda, numa perspetiva inclusiva do ensino, que estes sejam recursos para todos os alunos.

Integrar este projeto tem sido enriquecedor em todos os aspetos, pois a concretização destes objetivos tem sido extremamente desafiante. Toda a equipa tem trabalhado muito para construir esta plataforma, é um dos nossos grandes objetivos fazer algo diferente e útil para toda a comunidade educativa, e ainda estamos a desenvolver algumas ideias, tais como a inclusão de cursos online e a criação de comunidades de aprendizagem.

2. QUEM COMPÕE E COMO ESTÁ ORGANIZADA A EQUIPA DO ESTUDOEMCASA, TANTO GLOBALMENTE COMO A NÍVEL DA MATEMÁTICA?

A equipa é composta por docentes dos vários grupos disciplinares organizados em seis áreas temáticas. Estas áreas não são estanques, intersetando-se frequentemente para trabalhar recursos interdisciplinares.

A disciplina de Matemática está incluída na área das Ciências Exatas e Experimentais e a equipa divide-se pelos diferentes ciclos do Ensino Básico e pelo Ensino Secundário.

3. COMO SE PROCESSA A ESCOLHA DE TEMAS E CONTEÚDOS A NÍVEL DA MATEMÁTICA PARA OS DIFERENTES NÍVEIS DE ENSINO?

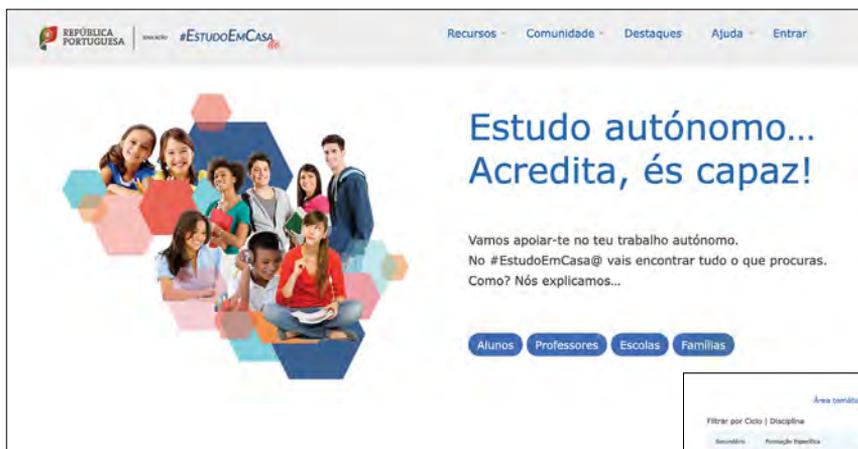
A equipa de Matemática está dividida em subgrupos que trabalham especificamente dentro de cada ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário, embora haja troca de ideias e trabalho colaborativo entre toda a equipa.

A seleção dos conteúdos é feita tendo em conta a sua importância no percurso de aprendizagem do aluno e também a sua adequabilidade ao ambiente digital.

A elaboração de recursos multimédia, como vídeos e questionários interativos, é discutida entre todos e há uma grande aposta dos membros da equipa na aquisição de competências digitais e na utilização eficaz de ferramentas web.

Após a seleção dos conteúdos, estes são “desmembrados” em pequenos recursos adaptados ao nível etário dos alunos.

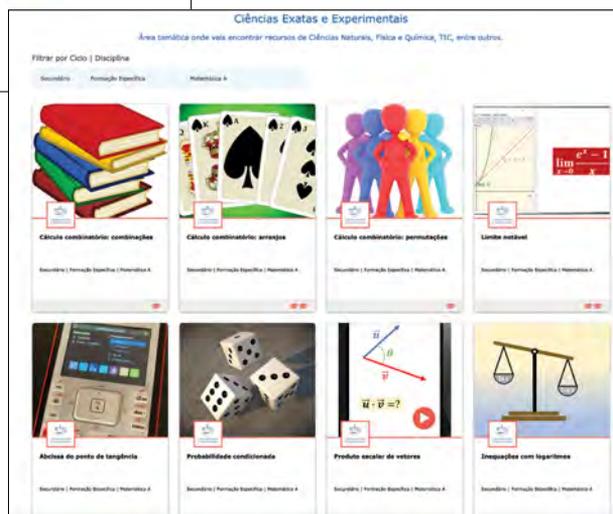
Todos os recursos são construídos de acordo com os documentos curriculares em vigor e com o objetivo de recuperar e desenvolver aprendizagens de um modo aliciente, estimulando a curiosidade e a vontade de saber mais. Gostaríamos muito que os alunos se sentissem motivados para a sua aprendizagem ao aceder aos diferentes recursos e ao realizar as várias tarefas interativas propostas.



4. HÁ CUIDADOS E ESTRATÉGIAS DIFERENTES DEPENDENDO DO NÍVEL DE ENSINO NA PREPARAÇÃO DE CONTEÚDOS?

Obviamente que cada nível de ensino possui as suas especificidades e estas são tidas em conta na construção dos recursos. Construir recursos para o 1.º ano de escolaridade é obrigatoriamente diferente de construir recursos para o 12.º ano de escolaridade e essa diferença não reside apenas nos conteúdos e na sua complexidade. Aspetos como o tempo estimado para a conclusão de um recurso, que deve ser menor para os alunos mais novos, a necessidade de incluir um vídeo, o conteúdo, as personagens e o áudio desse vídeo, são muito importantes, e diferem para cada nível de ensino.

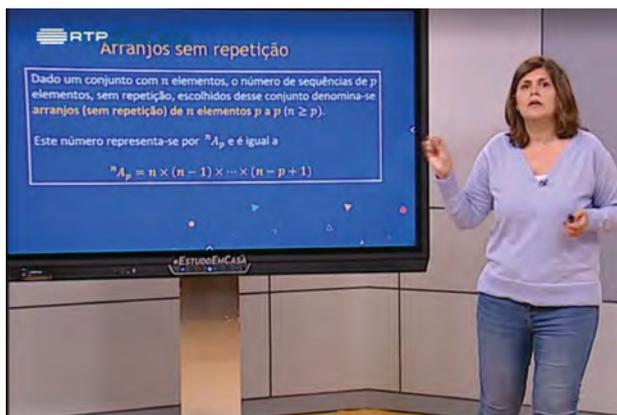
Eu faço parte da equipa que produz os conteúdos de Matemática para o Ensino Secundário e por isso consigo falar melhor sobre os cuidados e as estratégias adotadas para este nível de ensino. Tem sido muito importante para nós encontrar um equilíbrio entre o rigor matemático e a construção de recursos digitais apelativos e incisivos no que diz respeito aos objetivos do projeto. Como são alunos mais velhos, podemos esperar, e até encorajar, um grau de autonomia que lhes permita desenvolver tarefas com recurso ao GeoGebra, visionar um vídeo e compreender um determinado conceito ou procedimento ou responder a um questionário e, com recurso ao feedback fornecido, avaliar a sua aprendizagem. Temos desenvolvido estas estratégias, reformulando quando achamos necessário e experimentando novas ideias conforme as nossas competências vão evoluindo.



5. NA SUA OPINIÃO, QUAL A DIFERENÇA ENTRE PREPARAR UMA AULA PRESENCIAL E UMA AULA PARA O ESTUDOEMCASA?

Na edição anterior do #EstudoEmCasa integrei a equipa de Matemática A que planificou os 170 blocos temáticos que percorreram os programas de 10.º, 11.º e 12.º anos de escolaridade. A preparação dessas “aulas” foi um verdadeiro desafio, pois tínhamos de ter em conta que não haveria espaço para a descoberta, para o debate ou para o trabalho autónomo dos alunos. De repente, tínhamos milhares de alunos e a missão de ensinar Matemática em segmentos de 28 minutos, sem qualquer interação com estes.

Quando preparamos aulas para os nossos alunos, conhecemos as suas dificuldades e especificidades e adaptamo-las a esse grupo. Ali, tínhamos de ter um discurso correto, mas muito direto e universal. Numa aula presencial adicionamos explicações quando nos são solicitadas, mudamos de direção quando a nossa mensagem não está a chegar aos alunos, neste contexto isso não existe, resta-nos desejar que a nossa experiência consiga trilhar um cami-



nho que alcance grande parte do nosso “público”.

Este ano, na preparação dos recursos educativos para a plataforma, as diferenças referidas acentuam-se. Já não dispomos de 28 minutos para explicar conceitos num discurso fluido nem simulamos uma aula em frente a um grupo de alunos.

Na construção da maioria dos recursos temos-nos baseado no conceito de “aula invertida”, ou seja, iniciamos com a proposta de uma tarefa ou com um vídeo explicativo que apela à compreensão e à apropriação do conceito em estudo, passando depois para tarefas ou questionários de verificação das aprendizagens onde fornecemos ao aluno algum tipo de feedback.

Numa aula presencial há sempre um espaço para trabalho autónomo, orientado pelo professor, e há também a perceção sobre a qualidade das aprendizagens e isso ajuda-nos, enquanto professores, a estabelecer estratégias para as aulas seguintes. Neste contexto não recebemos informação nenhuma do outro lado e é com essa lacuna, e apesar desta, que tentamos diversificar e melhorar para conseguir chegar a todos os alunos.

6. COMO ACONSELHA UM PROFESSOR A INTERLIGAR OS CONTEÚDOS DA PLATAFORMA COM AS AULAS PRESENCIAIS? E UM ENCARREGADO DE EDUCAÇÃO/ALUNO, COMO PODE TIRAR O MÁXIMO PARTIDO DOS MATERIAIS QUE LÁ ESTÃO DISPONÍVEIS?

Os recursos da plataforma são livres, de fácil acesso e poderão ter uma utilização muito diversificada. Um professor pode explorá-los na sala de aula num momento de trabalho autónomo, utilizando uma tarefa interativa, ou apresentando um vídeo para introduzir um conteúdo, ou até propor ao aluno a exploração, fora da sala de aula, de um ou mais recursos com o objetivo de este recuperar

ou desenvolver um conjunto de aprendizagens específicas. Inclusivamente, pode fazer diferenciação pedagógica, selecionando diferentes recursos para diferentes alunos, dado que os recursos são independentes entre si e não obedecem a nenhuma ordem específica.

Por outro lado, os alunos poderão recorrer à plataforma para encontrar resposta a uma determinada necessidade, explorar um conceito onde têm dificuldades ou um tópico sobre o qual querem saber mais, e desenvolver a sua autonomia ao efetuar um percurso de aprendizagem. No caso dos alunos mais novos, talvez a iniciativa e a seleção necessitem de ser feitas pelos seus encarregados de educação, no entanto a plataforma permite criar uma área pessoal para cada aluno onde ele pode selecionar os seus recursos e incluir os que lhe foram sugeridos pelo seu professor.

7. COMO SE COMPARA O ESTUDOEMCASA COM O QUE É FEITO LÁ FORA? HÁ ALGUMA DIFERENÇA CULTURAL IMPORTANTE?

Desconheço se este tipo de plataforma multidisciplinar, com o objetivo de apoiar todos os alunos abrangidos pela escolaridade obrigatória, existe noutros países. Sei que existem algumas plataformas com recursos educativos digitais para Matemática e outras áreas temáticas, mas não sei se existem plataformas tão abrangentes e intimamente ligadas ao currículo escolar.

Pelo mesmo motivo, também não sei se existe alguma diferença cultural face ao que é feito fora de Portugal. No entanto, sinto que o #EstudoEmCasa Apoia também se debate com algumas questões culturais enraizadas no nosso sistema de ensino. Há uma filosofia de ensino por detrás desta plataforma que rompe com as ideias mais comuns. Está pressuposto na elaboração dos recursos que o aluno tem gosto em aprender e que trabalha no sentido da sua progressão, sem necessidade de uma classificação, e que consulta o feedback apenas quando necessita, utilizando-o para melhorar o seu desempenho. Do ponto de vista cultural, esta metodologia não está generalizada, mas acredito que, passo a passo, conseguiremos lá chegar.

SOBRE CRISTINA NEGRA

Cristina Negra é professora de Matemática na Escola Básica e Secundária de Gama Barros e licenciada em Ensino da Matemática pela Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. No presente ano letivo integra a equipa que produz conteúdos para a plataforma #EstudoEmCasa Apoia.



NUNO CAMARINHO
Universidade
de Aveiro
nfc@ua.pt

SOMBRAS E NEVOEIRO

O fenómeno da guerra é tão antigo quanto a própria humanidade e, como bem sabemos, tudo o que acontece tem de ser contado, pelo que os relatos da guerra terão, provavelmente, surgido no mesmo instante.

O “nevoeiro da guerra” é uma expressão atribuída a Carl von Clausewitz, um general e teórico militar prussiano, que a usou na obra *Vom Kriege (Da Guerra)*, publicada postumamente em 1832. O “nevoeiro” a que Clausewitz se refere descreve a incerteza própria de um cenário de guerra, em que o conhecimento das manobras de uma e da outra parte é limitado, bem como das capacidades bélicas de cada um dos beligerantes. A desproporção entre a escala global do conflito e a situação individual de cada combatente e a velocidade a que os acontecimentos se dão contribuem para essa incerteza, para a tal bruma que dificulta o entendimento e embrulha as memórias.

O fenómeno da guerra é tão antigo quanto a própria humanidade e, como bem sabemos, tudo o que acontece tem de ser contado, pelo que os relatos da guerra terão, provavelmente, surgido no mesmo instante. Ao final do dia, os soldados, cansados e feridos, contavam as suas experiências, algumas semelhantes, outras radicalmente diferentes, levando a longas negociações para tentar aclarar o nevoeiro da guerra.

Muitas das obras literárias mais antigas têm a guerra como cenário: a *Ilíada*, a Bíblia hebraica ou a *Eneida*, por exemplo, e dão-nos relatos que vão alternando entre as experiências individuais e um entendimento mais vas-

to sobre os motivos, as estratégias e as dinâmicas dos conflitos. Desde muito cedo ficou subentendido que um fenómeno tão complexo não pode ser explicado sem essa alternância entre a guerra dos soldados e a guerra dos generais.

É através da literatura que conhecemos ou julgamos conhecer alguns dos conflitos mais relevantes da História humana: a Guerra de Troia descrita por Homero, as Médicas descritas por Heródoto, a Guerra dos Cem Anos vista por Shakespeare, as invasões napoleónicas no *Guerra e Paz* de Tolstói ou a Guerra Civil Espanhola em *Por Quem os Sinos Dobram* de Hemingway. Algumas estão centradas na experiência individual, muitas vezes absurda, cheia de medos, superações e desespero; outras arriscam uma visão histórica, de povos movidos contra outros povos por razões económicas, ambições ou ideologia.

A literatura é uma das ferramentas que temos para criar conhecimento a partir dos factos ou da interpretação dos factos. Não é nem nunca será neutra, vem sempre carregada de preconceitos, ressentimentos ou desejos escondidos, mas tudo o que é humano vem cheio disso, mesmo a ciência, mesmo a historiografia. A guerra e a literatura partilham muitos dos mesmos temas: o amor, a morte, o bem e o mal, a coragem e a sobrevivência. Por isso se confundem, por isso partilham o mesmo nevoeiro.



EUREKA PARTE II: O USO DE CONSIDERAÇÕES MECÂNICAS POR ARQUIMEDES EM MATEMÁTICA

O facto de Arquimedes ter utilizado a matemática para descobrir muitas leis físicas, como, por exemplo, a lei da alavanca no seu *Sobre o Equilíbrio dos Planos*, ou a lei da fluatibilidade no seu *Sobre os Corpos Flutuantes*, é bem conhecido de qualquer pessoa, mesmo vagamente familiarizada com o nome do cientista e matemático siracusano do terceiro século a.C. O que é menos conhecido do não especialista é o facto de Arquimedes também ter utilizado considerações mecânicas para descobrir teoremas matemáticos. Neste artigo, ilustro como Arquimedes usa este "método mecânico" no seu *Método*.

O tratado de Arquimedes *O Método dos Teoremas Mecânicos, para Eratóstenes* (doravante *Método*), descoberto em 1906 por Heiberg no Palimpsesto (ver o meu artigo anterior nesta revista), é inestimável por muitas razões. Entre estas razões destacam-se o facto de nos dar acesso à forma original como Arquimedes chegou a alguns resultados matemáticos e, em segundo lugar, o facto de ter alterado a nossa compreensão da história do desenvolvimento de técnicas infinitárias em matemática. Neste pequeno artigo, o meu objetivo é dar ao leitor uma visão geral do "método mecânico" utilizado por Arquimedes no *Método*. Além disso, na secção final esboçarei um debate que surgiu recentemente entre os historiadores da matemática relativamente ao papel específico (demonstrativo ou não demonstrativo) que Arquimedes atribuiu a tal método.

Como é bem conhecido (pelo menos, entre os historiadores da matemática), Arquimedes mantinha correspondência com três matemáticos que trabalhavam em Alexandria durante o século III a.C.: Dositheus, Eratóstenes e Conon. Conhecemos esta rede, ou "República das Cartas Matemáticas", como Reviel Netz lhe chamou [6, p. 25], porque os três nomes são explicitamente mencionados por

Arquimedes na carta introdutória (o "prefácio", digamos) a alguns dos seus tratados. Em particular, Dositheus é o destinatário de quatro tratados (*Quadratura da Parábola, Sobre a Esfera e o Cilindro, Sobre Conoides e Esferoides e Sobre as Espirais*), Eratóstenes é o destinatário do *Método*, enquanto o nome de Conon aparece nos prefácios da *Quadratura da Parábola e Sobre as Espirais* (neste último texto, Arquimedes menciona mesmo uma carta previamente enviada a Conon, que incluía um desafio matemático).

O *Método* é, portanto, uma comunicação privada a Eratóstenes. No entanto, este tratado tem um carácter muito diferente de todos os outros tratados de Arquimedes e, mais geralmente, de todos os textos matemáticos gregos que nos foram transmitidos (como, por exemplo, os *Elementos* de Euclides ou as *Cónicas* de Apolónio). O *Método*, de facto, não é apresentado por Arquimedes como um texto matemático que satisfaça todos os requisitos de exatidão. Não oferece o conteúdo matemático rigoroso de uma publicação oficial que tipicamente encontramos em textos matemáticos gregos, mas sim uma exposição do procedimento heurístico que está por detrás das provas formais. Esta heurística inclui a aplicação de

princípios mecânicos na matemática. Como Arquimedes escreve no prefácio, dirigindo-se a Eratóstenes:

"Pensei que seria apropriado escrever e estabelecer para si neste mesmo livro um certo método especial, através do qual poderá reconhecer certas questões matemáticas com a ajuda da mecânica. Estou convencido de que isto não é menos útil para encontrar as provas destes mesmos teoremas. Pois algumas coisas, que primeiro se tornaram claras para mim pelo método mecânico, foram depois provadas geometricamente, porque a sua investigação pelo referido método não fornece uma demonstração real. Pois é mais fácil fornecer a prova quando adquirimos previamente, pelo método, algum conhecimento das questões do que encontrá-la sem qualquer conhecimento prévio."
[1, p. 314, tradução do autor]

Assim, Arquimedes quer mostrar a Eratóstenes como a aplicação de "um certo método especial" em matemática o levou à descoberta de vários teoremas matemáticos, que só mais tarde foram provados. E, crucialmente, ele faz uma

distinção clara entre encontrar um teorema através deste procedimento e encontrar uma prova do mesmo teorema. O procedimento heurístico que envolve a mecânica, diz Arquimedes, "não fornece uma demonstração real".

O que é este método heurístico? Como observou o historiador da ciência Eduard Jan Dijksterhuis, que na sua tradução e comentário do trabalho de Arquimedes de 1956 forneceu um dos melhores estudos do *Método*, o método heurístico de Arquimedes tem duas vertentes, e caracteriza-se pela aplicação de dois princípios diferentes: o "método baricêntrico" e o "método dos indivisíveis". O método baricêntrico faz uso de considerações mecânicas, e mais particularmente da lei da alavanca (encontrada por Arquimedes e publicada no primeiro livro do seu tratado *Sobre o Equilíbrio dos Planos*), em geometria. Consiste em conceber figuras geométricas como estando ligadas a uma alavanca em equilíbrio, para as quais as condições de equilíbrio são estabelecidas. Ao considerar afirmações sobre "pesos" de objetos geométricos (ou seja, os seus comprimentos e áreas) como equivalentes a afirmações sobre proporções geométricas, Arquimedes consegue medir propriedades puramente geométricas.

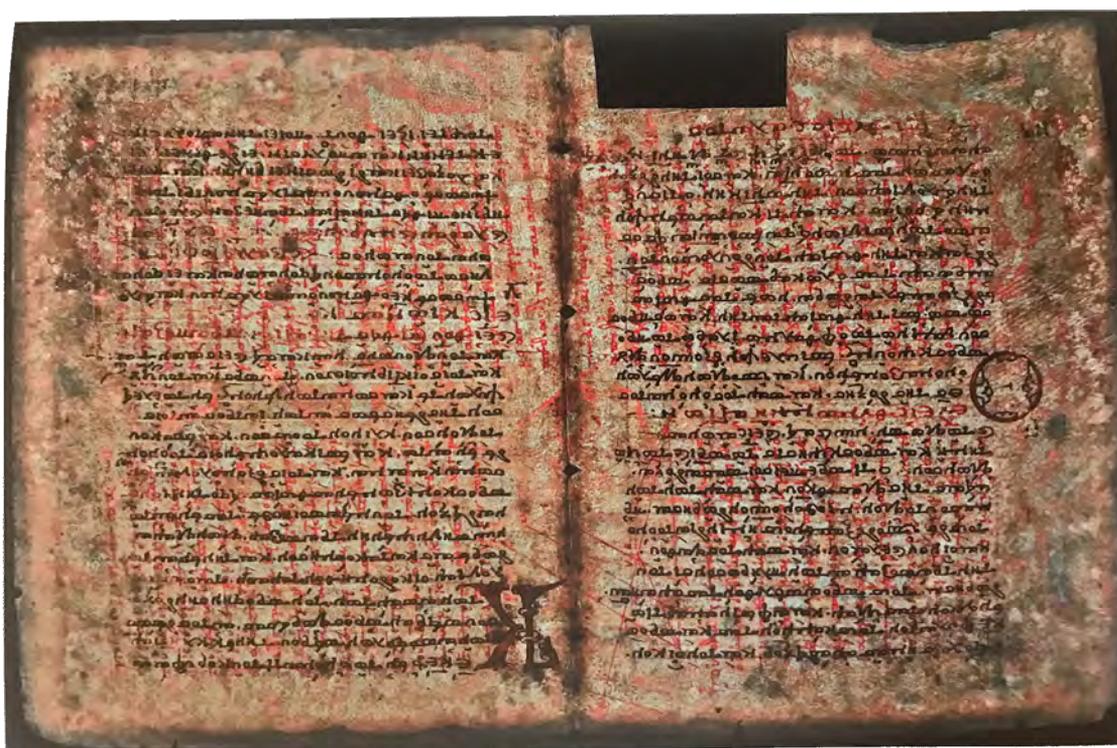


Figura 1. Método, Proposições 1, 2. Pseudocor criada a partir de imagens de fluorescência ultravioleta e refletância vermelha.

O segundo método, o método dos indivisíveis, é uma técnica matemática que permite a medição de figuras geométricas concebendo uma figura composta por elementos de dimensão inferior. Através desta técnica, podemos pensar num sólido como uma soma das secções transversais (os "indivisíveis") que são geradas pelo corte do sólido com uma família de planos paralelos. Do mesmo modo, podemos considerar uma figura plana composta pelos segmentos de linha ("os indivisíveis") formados por um sectionamento paralelo.

Na secção seguinte, dou um exemplo de como Arquimedes aplica o método heurístico. Mais precisamente, relato o seu tratamento matemático da Proposição 1 do *Método*, na qual o método baricêntrico e o método dos indivisíveis são utilizados para descobrir um teorema matemático. Porém, antes de abordar este exemplo, permitam-me acrescentar uma breve observação relativa ao impacto que a utilização de indivisíveis por Arquimedes teve na história da matemática.

O método dos indivisíveis está geralmente associado ao nome de Bonaventura Cavalieri (1598–1647), que o apresentou no seu tratado *Geometria Indivisibilibus Continuum Nova Quadam Ratione Promota* (1635). Cavalieri desenvolveu muitas aplicações deste método e o seu trabalho veio a ter um papel significativo no desenvolvimento de métodos infinitesimais durante o século XVII. No entanto, o que o *Método* nos revelou é que a técnica de medir figuras geométricas através de indivisíveis já vem, pelo menos, desde Arquimedes (e talvez até desde mais cedo, como afirmou o historiador da matemática Wilbur Knorr nos seus estudos sobre as raízes do método dos indivisíveis na geometria antiga). Por conseguinte, a descoberta do *Método* levou os historiadores a verem o trabalho de Cavalieri sob uma luz diferente: consideram que a novidade do trabalho realizado por Cavalieri e pelos matemáticos do século XVII reside sobretudo nos seus esforços para conceder à técnica dos indivisíveis uma caracterização formal e sólida, mas já não consideram este método como uma nova técnica introduzida no século XVII (Cavalieri considerava o método como uma nova técnica; mas, como observei no meu primeiro artigo nesta revista, Cavalieri não sabia que Arquimedes utilizava os indivisíveis no *Método*, uma vez que este tratado era desconhecido durante a Renascença). Além disso, a descoberta mostrou também que, embora os matemáticos gregos se mantivessem afastados do infinito nos seus tratados formais, utilizavam o conceito de técnicas infinitas e indivisibilistas nos seus procedimentos heurísticos.

UM EXEMPLO DO MÉTODO: PROPOSIÇÃO 1

O *Método* contém 15 proposições: as proposições 1-11 combinam o método baricêntrico e o método dos indivisíveis; as proposições 12-15 têm uma estrutura mais complexa, uma vez que Arquimedes primeiro prova um certo resultado através dos dois métodos (proposições 12--13), depois obtém o mesmo resultado apenas através dos indivisíveis (proposição 14) e, finalmente, prova novamente o mesmo resultado de forma "clássica", não utilizando nem mecânica nem indivisíveis (proposição 15). No final da Proposição 15, o texto existente é interrompido.

O primeiro resultado do *Método* encontra-se na Proposição 1 e tem a ver com a área de um segmento parabólico (ou seja, a região delimitada por uma parábola e um segmento de reta): qualquer segmento parabólico é quatro terços do triângulo que tem dois vértices nos extremos do segmento de reta, e cujo terceiro vértice é obtido como a intersecção da parábola com a linha paralela ao seu eixo de simetria e passando pelo ponto médio do segmento de reta (figura 2). Arquimedes apresenta um argumento que mostra como, combinando resultados geométricos com a lei da alavanca, foi conduzido a esta descoberta matemática. Vejamos o seu argumento (uma nota para o leitor: Arquimedes não menciona explicitamente muitos resultados que utiliza e que já foram provados por ele ou por outros matemáticos - por exemplo, por Euclides; uma vez que alguns destes resultados são importantes para uma melhor compreensão do argumento, vou mencioná-los entre parênteses retos).

Considere-se um segmento parabólico ABC (doravante ABC_{ps}), delimitado pelo segmento AC e a parábola γ (figura 2). Seja AC bisetado em D e tracemos DB paralelamente ao eixo de simetria, ou diâmetro, da parábola (a linha tra-

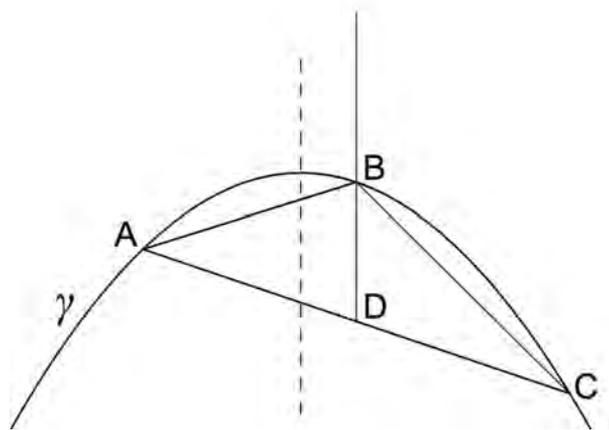


Figura 2.

cejada na figura 2). Tracemos agora AB e BC . Arquimedes mostra que a área do segmento parabólico ABC_{ps} é igual a quatro terços da área do triângulo $\triangle ABC$ inscrito na parábola.

A partir de A , desenhe-se a reta AKZ paralela a DB (ver figura 3). A reta AKZ interseca a tangente em C à curva no ponto Z , e a reta CB em K . O ponto E é o ponto de intersecção das linhas CZ e DB . Prolongamos agora a linha CK até H de forma a que $CK=KH$. Em seguida, consideramos um ponto O arbitrário em AC e por ele traçamos uma reta paralela a DB , que intersecta a parábola γ em P , CK em N e CZ em M .

Como ABC_{ps} é um segmento parabólico, D é o ponto médio da corda AC e DB é paralela ao eixo da parábola, temos que AC é paralela à tangente à parábola em B [esta é uma aplicação da Proposição 1 da *Quadratura da Parábola*]. Além disso, uma vez que a corda AC é paralela à tangente no ponto B , e a linha DB é paralela ao eixo da parábola e também intersecta a corda AC em D e a tangente em C no ponto E , então $DB=BE$ [este resultado, relativo à propriedade da subtangente, é afirmado na Proposição 2 da *Quadratura da Parábola*]. Ora, dado este resultado ($DB=BE$) e o facto de AZ e OM serem ambos paralelos a DE , temos também que $ON=NM$ e $AK=KZ$ [aqui Arquimedes está a

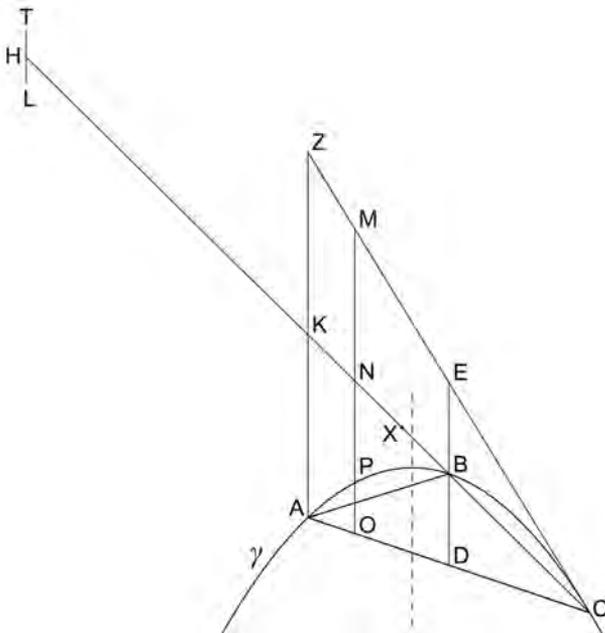


Figura 3.

aplicar três resultados obtidos por Euclides nos *Elementos*: Proposição 4 do Livro VI e Proposições 11 e 9 do Livro V]. Ora, como $CA : AO = MO : OP$ [provado na *Quadratura da Parábola*, Proposição 5], $CA : AO = CK : KN$ [esta é uma aplicação dos *Elementos* de Euclides, Proposição 2 do Livro VI e Proposição 18 do Livro V] e $CK=KH$, temos que $KH : KN = MO : OP$.

Após este tratamento puramente geométrico, Arquimedes começa a apresentar considerações físicas. Mais precisamente, ele usa alguns lemas sobre centros de gravidade que menciona no início do *Método* e que foram provados no seu tratado *Sobre o Equilíbrio dos Planos*. Primeiro, ele observa que o ponto N é o centro de gravidade do segmento OM (o centro de gravidade de um segmento de reta é o seu ponto médio). Portanto, se tomarmos um segmento LT igual a OP com H como seu centro de gravidade (de modo que $LH=HT$), LT estará em equilíbrio com OM . De facto, utilizando a lei da alavanca, podemos observar que HN está dividido em segmentos (HK e KN) que são inversamente proporcionais aos "pesos" LT e MO , nomeadamente de tal forma que $HK : KN = MO : LT$, de modo que K é o centro de gravidade do peso combinado dos dois.

O que Arquimedes acaba de aplicar é o seu método baricêntrico. A lei da alavanca, descoberta por Arquimedes e apresentada no seu *Sobre o Equilíbrio dos Planos* (Proposições 6 e 7 do Livro I), afirma que as grandezas colocadas em lados opostos do fulcro estão em equilíbrio a distâncias inversamente proporcionais às ditas grandezas (em termos modernos: se dois corpos de massas m_1 e m_2 forem colocados nos braços de uma alavanca reta do fulcro K , e se d_1 e d_2 forem as distâncias dos centros de massa dos corpos ao fulcro, então os dois corpos equilibrar-se-ão apenas no caso em que $m_1/d_2 = m_2/d_1$). Para aplicar esta lei em geometria, Arquimedes "vê" o segmento HN como uma alavanca idealizada, de braços HK e KN , que permanece em equilíbrio sob a influência de duas grandezas. As duas grandezas em questão são os dois segmentos LT e MO , que são imaginados como pesos reais de tal forma que o segmento mais longo MO tem maior peso do que o segmento mais curto LT .

Podemos agora aplicar o resultado obtido para MO e LT , que é igual a OP , a todos os segmentos que são tomados da mesma forma de MO e OP . De facto, todos os segmentos que podem ser traçados no triângulo $\triangle AZC$ paralelos a MO estarão em equilíbrio com as suas porções cortadas pela parábola, quando transferidas para H (como fizemos para OP). K será o centro de gravidade do peso combinado de cada segmento e a sua porção.

É neste ponto do seu argumento que Arquimedes aplica o método dos indivisíveis: concebe o triângulo $\triangle AZC$ como sendo constituído por segmentos paralelos a MO no seu interior (os "indivisíveis") e, de forma semelhante, o segmento parabólico ABC_{ps} como sendo constituído por todos os segmentos paralelos a OP no seu interior (os "indivisíveis"). Estabelecida esta hipótese, podemos alargar as considerações baricêntricas ao triângulo $\triangle AZC$ e a todo o segmento parabólico ABC_{ps} transferido para H : o triângulo $\triangle AZC$ equilibrará sobre o ponto K o segmento parabólico colocado sobre H como seu centro de gravidade, de modo a que K seja o centro de gravidade comum (ver figura 4).

Depois de ter estabelecido o equilíbrio (com centro de gravidade K) entre o triângulo $\triangle AZC$ e o segmento parabólico ABC_{ps} transferido para H , Arquimedes encontra o centro de gravidade do triângulo $\triangle AZC$. Como CK é uma mediana de $\triangle AZC$, se tomarmos o ponto X em CK tal que $CK=3XK$, então X será o centro de gravidade de $\triangle AZC$ [Arquimedes usa aqui os seguintes resultados: o ponto de intersecção das medianas de um triângulo divide cada mediana em segmentos na razão 2:1 e, como demonstrado na Proposição 14 do Livro I de *Sobre o Equilíbrio dos Planos*, o ponto de intersecção das três medianas do triângulo é o centro de gravidade do triângulo].

Uma vez que existe equilíbrio entre o triângulo $\triangle AZC$ e o segmento parabólico ABC_{ps} sobre H , e o seu centro de gravidade comum é K , temos o seguinte resultado: o triângulo $\triangle AZC$ está para o segmento parabólico ABC_{ps} transferido para H como o seu centro de gravidade tal como HK está para KX (ou seja, $\triangle AZC : ABC_{ps} = HK : KX$). Ago-

ra, como $HK=KC=3KX$, então o triângulo $\triangle AZC$ é três vezes o segmento da parábola ABC_{ps} . Além disso, $\triangle AZC$ é quatro vezes o triângulo $\triangle ABC$, visto que $ZK=KA$ e $AD=DC$ [este resultado é obtido através de uma aplicação dos *Elementos* de Euclides, Proposição 1 do Livro VI]. Assim, se $\triangle AZC = 3ABC_{ps}$ e $\triangle AZC = 4\triangle ABC$, podemos concluir que

$$3 ABC_{ps} = 4 \triangle ABC.$$

Mostrámos assim que o segmento parabólico ABC é quatro terços do triângulo ABC .

ONDE RESIDE A FALTA DE RIGOR?

Utilizando o método dos indivisíveis e o método baricêntrico, Arquimedes deduz que o segmento parabólico é quatro terços do triângulo inscrito. No entanto, no final da sua discussão da Proposição 1, observa que o tratamento que acaba de apresentar não pode ser considerado uma "prova" do resultado. Pelo contrário, diz ele, cria "uma certa impressão" de que a conclusão é verdadeira:

"Isto não foi, portanto, provado pelo acima exposto, mas criou-se uma certa impressão de que a conclusão é verdadeira. Uma vez que vemos assim que a conclusão não foi provada, mas supomos que é verdadeira, mencionaremos a prova geométrica publicada anteriormente, que nós mesmos encontramos para ela, no lugar devido."

[1, p. 318, tradução do autor]

Podemos, portanto, perguntar-nos onde, segundo Arquimedes, se encontra a falta de exatidão: no caráter mecânico

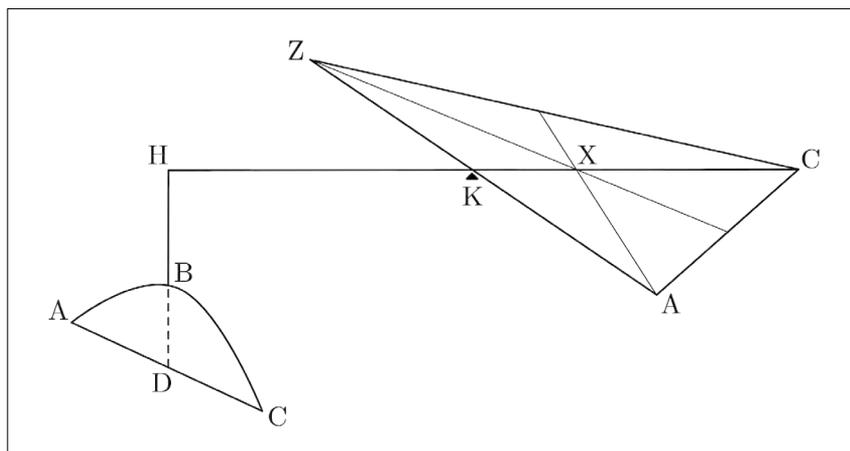


Figura 4.

do argumento, na aplicação de indivisíveis, ou em ambos? Como observado por Dijksterhuis, a deficiência matemática que Arquimedes aponta surge apenas da utilização de indivisíveis, e não da utilização de considerações mecânicas na geometria. Esta tese é apoiada por duas observações: primeiro, Arquimedes considera o método baricêntrico um instrumento legítimo a utilizar nos seus tratados formais (por exemplo, na primeira parte da *Quadratura da Parábola*, Arquimedes usa considerações mecânicas como uma ferramenta formalmente aceitável, mas substitui os indivisíveis por elementos finitos de área); em segundo lugar, no seu tratado *Sobre o Equilíbrio dos Planos*, Arquimedes estabelece a mecânica (estática) como uma ciência demonstrativa, e por isso é razoável pensar que ele atribui validade demonstrativa aos aspetos mecânicos do método.

A opinião de Dijksterhuis tem sido acolhida por muitos estudiosos e continua a ser dominante entre os historiadores da matemática. No entanto, ela não é unanimemente aceite. Por exemplo, Tohru Sato e Wilbur Knorr argumentaram que os matemáticos gregos consideraram válidos os argumentos que envolvem indivisíveis. Knorr, em particular, atribui a falta de rigor do método de Arquimedes à sua natureza mecânica (ver [3]). Além disso, alguns estudiosos observaram como o método baricêntrico e o método dos indivisíveis funcionam em conjunto no *Método*, de tal forma que é impossível analisá-los como duas técnicas conceptualmente independentes (ver [7, p. 22]).

Infelizmente, o debate que gira em torno do papel que Arquimedes atribuiu ao seu método no *Método* é tão multifacetado que, por razões de espaço, não pode ser aqui totalmente reproduzido. O meu modesto objetivo nesta secção final é oferecer ao leitor uma introdução a esta discussão, à qual só se pode aceder se considerarmos a forma como Arquimedes utiliza os indivisíveis e o método baricêntrico nos seus argumentos (foi por isso que descrevi todos os detalhes da Proposição 1 na secção anterior).

Arquimedes é frequentemente recordado pelo seu espetacular uso da matemática na física, o que o levou a erodir a física essencialista estabelecida por Aristóteles e a lançar as bases para o desenvolvimento de uma física matemática. O *Método* mostra que o seu génio foi ainda mais longe: aplicou a física à matemática para descobrir teoremas matemáticos (através do método baricêntrico) e utilizou uma técnica (o método dos indivisíveis) que só virá a ser "descoberta" pelos matemáticos do século XVII.

Agradecimentos: O autor deseja agradecer a Pedro Freitas pelos comentários e pela ajuda na tradução deste artigo.

REFERÊNCIAS

- [1] Dijksterhuis, E. J. (1987). *Archimedes*. Princeton: Princeton University Press.
- [2] Giusti, E. (1980). *Bonaventura Cavalieri and the Theory of Indivisibles*. Bologna: Edizioni Cremonese.
- [3] Knorr, W. (1982). "Infinity and continuity: The interaction of mathematics and philosophy in antiquity". In Kretzmann, N., editor, *Infinity and Continuity in Ancient and Medieval Thought*, pages 112-45. Ithaca, NY: Cornell University Press.
- [4] Knorr, W. (1996). "The method of indivisibles in ancient geometry". In Calinger, R., editor, *Vita Mathematica: Historical Research and Integration with Teaching*, pages 67-86. Washington D.C.: The Mathematical Association of America.
- [5] Mancosu, P. (1996). *Philosophy of Mathematics and Mathematical Practice in the Seventeenth Century*. Oxford: Oxford University Press.
- [6] Netz, R., editor (2017). *The Works of Archimedes: Translation and Commentary. Volume 2: On Spirals*. R. Netz (trans.). Cambridge: Cambridge University Press.
- [7] Netz, R., Saito, K., and Tchernetska, N. (2001). "A new reading of Method proposition 14: Preliminary evidence from the Archimedes palimpsest (part 1)". *SCIAMVS*, 2:9-29.
- [8] Sato, T. (1986-1987). "A reconstruction of *The Method* proposition 17, and the development of Archimedes' thought on quadrature". *Historia Scientiarum*, 31(1986): 61-86, 32(1987): 61-90.

SOBRE O AUTOR

Daniele Molinini é Investigador Principal FCT no Centro de Filosofia das Ciências da Universidade de Lisboa (CF-CUL), onde é PI do projeto de investigação "Exploring the Weak Objectivity of Mathematical Knowledge" (n.º CEE-CIND/01827/2018).

Coordenação do espaço HISTÓRIAS DA MATEMÁTICA:
Pedro Freitas, Universidade de Lisboa, pjfreitas@fc.ul.pt



COMO FUNCIONA UM SISTEMA DE BONUS MALUS NO SEGURO AUTOMÓVEL?

Um Sistema de Bonus Malus (SBM), no seguro automóvel, é uma forma de tarifação *a posteriori*. Neste texto iremos mostrar o porquê da existência de Sistemas de Bonus Malus, como se definem e obter uma escala ótima de prémios. Será apresentado um exemplo simples para melhor compreensão do modelo. Sendo um tema vasto, na última secção serão identificadas algumas referências bibliográficas para o leitor que pretenda aprofundar os conhecimentos no tema.

1. A IMPORTÂNCIA DE UM SISTEMA DE BONUS MALUS

Um Sistema de Bonus Malus (SBM) é uma forma de tarifação *a posteriori* no seguro automóvel. Quando nos dirigimos a um mediador de seguros para celebrar um contrato de seguro automóvel, fornecemos informações que irão ser transformadas nas variáveis de tarifação para a seguradora nos atribuir o preço do seguro (prémio). Estas variáveis pretendem agrupar riscos semelhantes em grupos de tarifação. Alguns exemplos são: potência; cilindrada e marca do veículo; ano de registo; idade do condutor; anos de carta; zona geográfica de condução. Este prémio é obtido recorrendo usualmente a modelos lineares generalizados. Esta forma de tarifação é denominada tarifação *a priori* pois é a tarifa calculada sem conhecimento prévio do comportamento de condução de cada condutor. A destreza ao volante, o respeito pelo Código da Estrada, a agressividade na condução são variáveis que têm influência na sinistralidade automóvel, mas que não são facilmente mensuráveis, logo não são utilizadas no apuramento do prémio. O mecanismo utilizado para colmatar esta falha foi considerar uma correção

ao prémio tendo em conta a sinistralidade declarada por cada segurado. No final do ano do contrato e mediante o número de sinistros declarados, o prémio *a priori* é ajustado sofrendo um desconto ou agravamento de acordo com as regras do SBM implementado na seguradora. Devido à liberalização do mercado segurador, cada seguradora pode definir o seu SBM, levando a que os segurados, em alguns casos, procurem uma seguradora que lhe proporcione melhores descontos em caso de boa condução e baixos agravamentos em caso de ocorrência de sinistros. Da parte da seguradora, é importante ter um SBM equilibrado. Os descontos traduzem-se em perda de prémio e os agravamentos podem traduzir-se em perda de clientes, nenhum dos casos benéfico para o negócio da seguradora. Na avaliação de SBM podem considerar-se duas abordagens, a primeira, a abordagem clássica e mais usual, é considerar que a carteira é fechada, ou seja, não se consideram entradas e saídas de segurados durante o período de análise. A segunda abordagem é considerar a carteira aberta, um cenário mais real, em que os segurados entram e saem da carteira. Na generalidade, os SBM consideram apenas o número

ro de sinistros para definir o *bonus* (desconto) ou o *malus* (agravamento), no entanto já existem SBM que consideram também o montante de sinistro pago pela seguradora. São contabilizadas como sinistros as declarações de sinistro que acionam a apólice do segurado. Uma árvore que caiu em cima do automóvel e que levou a acionar a cobertura de danos próprios conta como sinistro, mas a reparação de um dano que tenha sido da responsabilidade de outro segurado não é contabilizada como sinistro.

2. O MODELO MATEMÁTICO

No que se segue iremos utilizar a abordagem clássica (modelo fechado) e um SBM elaborado considerando apenas o número de sinistros declarado.

No que se segue toma-se como referência [5] e [12].

Um Sistema de Bonus Malus pode ser caracterizado por:

► O período de vigência das apólices é de idêntica duração, usualmente um ano;

► As apólices estão distribuídas por um número finito de classes e mantêm-se nessa classe durante um período finito de tempo, usualmente um ano;

► A classe para a qual o segurado transita ao final do período depende apenas do número de sinistros declarado nesse período.

Considere-se que o SBM tem s classes denominadas por C_1, C_2, \dots, C_s , ordenadas do maior desconto para o maior agravamento.

Um SBM fica definido pelo trio $S = (T, b, C_{i_0})$, sendo,

► $b = (b_1, b_2, \dots, b_s)$ a escala de prémios. $b_k > 0$ é um fator multiplicativo a aplicar ao prémio *a priori*.

► C_{i_0} a classe de entrada no sistema, i.e., a classe onde se colocam os novos segurados que pagam 100% do prémio *a priori*.

► $T = [T_{i,j}]$ as regras de transição do sistema, representadas por uma matriz $s \times s$. Estas regras descrevem como é que o segurado, no final do período, transita entre as classes do sistema de acordo com o número de sinistros declarado nesse período, independentemente do historial do segurado. Para cada par ordenado (i, j) defina-se $T_{i,j}$ como o conjunto dos inteiros r tais que uma apólice pertencente a C_i transite para C_j no fim do período por ter originado r sinistros nesse período. T deve ser tal que $\bigcup_{j=1}^s T_{i,j} = 0, 1, 2, \dots$ e $T_{i,j} \cap T_{i,j'} = \emptyset$ sempre que $j \neq j'$.

Estes SBM são, na sua maior parte, considerados sistemas sem memória, pois basta saber a classe em que o segurado se encontra e o número de sinistros declarados no período anterior para determinar a classe para onde transitará, podendo o SBM ser estudado como uma Cadeia de Markov.

Os SBM podem ser avaliados do ponto de vista do segurado ou da seguradora. No primeiro caso conhecendo a frequência de sinistros, λ fixo, a probabilidade de transição num passo de C_i para C_j é:

$$p_{T,\lambda}(i, j) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(\lambda) t_{ij}(k) \\ = \Pr_{\lambda}(Z_{S,n+1} = j \mid Z_{S,n} = i), \quad i, j = 1, \dots, s$$

onde $p_k(\lambda)$ é a probabilidade de um segurado, com frequência de sinistralidade λ , dar origem a k sinistros numa anuidade e $Z_{S,n}$ representa a classe de bônus de uma apólice no período n .

A distribuição de $Z_{S,n}$ para o λ fixo é:

$$p_{S,\lambda}^{(n)}(j) = \Pr_{\lambda}(Z_{S,n} = j), \quad j = 1, 2, \dots, s.$$

Não considerando entradas nem saídas do sistema, se a cadeia for irredutível e finita será aperiódica e recorrente e a distribuição limite, $\pi_{T,\lambda}(j)$, coincide com a distribuição estacionária, ou seja, com o vetor próprio esquerdo associado ao valor próprio unitário da matriz $P_{T,\lambda} = [p_{T,\lambda}(i, j)]$. Esta matriz é a matriz de probabilidades de transição num passo da Cadeia de Markov que representa o SBM com as probabilidades $p_{T,\lambda}(i, j)$ a satisfazer $p_{T,\lambda}(i, j) \geq 0$ e $\sum_{j=1}^s p_{T,\lambda}(i, j) = 1$. A distribuição limite é dada por:

$$\pi_{T,\lambda}(j) = \lim_{n \rightarrow +\infty} p_{S,\lambda}^{(n)}(j), \quad j = 1, 2, \dots, s.$$

Caso esteja a avaliar-se do ponto de vista da seguradora, para se obterem os elementos da matriz de probabilidades de transição em n passos, $P_T^{(n)}$, integra-se em λ de acordo com a distribuição estrutural, ou seja, $p_T^{(n)}(i, j) = \int_0^{\infty} p_{T,\lambda}^{(n)}(i, j) dU(\lambda)$, $i, j = 1, 2, \dots, s$. A distribuição limite será

$$\pi_T(j) = \Pr(Z_T = j) = \int_0^{\infty} \pi_{T,\lambda}(j) dU(\lambda), \quad j = 1, 2, \dots, s \quad (2.1)$$

A distribuição de Poisson pode ser adequada para des-

crever o número de sinistros ocorridos a um determinado segurado num determinado período de tempo. No entanto, quando se pretende descrever o número de sinistros ocorridos a um segurado retirado ao acaso da carteira, a distribuição que fornece melhor ajustamento é a Poisson mista. Esta distribuição reflete a heterogeneidade dos riscos inerentes ao comportamento de cada um dos segurados, permitindo que a variância seja superior à média. O parâmetro da Poisson, usualmente, segue uma distribuição gama ou distribuição Inversa Gaussiana. No caso de $N \sim P(\Lambda)$ e

$$\Lambda \sim G\left(\alpha, \frac{1-p}{p}\right)$$

com $E(\Lambda) = \alpha\beta$, $N \sim BN(\alpha, p)$ ¹. λ é a variável de estrutura. Mais detalhe poderá ser encontrado em [12], [10] ou [16].

A distribuição limite, indica que, numa perspectiva de longo prazo, $\pi_T(1)$ por cento das apólices estarão na classe mais bonificada e $\pi_T(s)$ estarão na classe de maior agravamento. Atendendo a que as classes de desconto implicam uma perda de prémio para a seguradora, é importante ter a perceção de como vai evoluindo o prémio de um segurado que entre na classe C_{i_0} , o tal segurado que não tem desconto nem agravamento. Em condições de estacionaridade, isto é, multiplicando a distribuição limite pelo prémio de cada classe, obtemos o prémio médio de estacionaridade. Este prémio indica o valor que a seguradora espera receber em condições de estacionaridade da carteira.

Para determinar uma escala ótima de prémios, o modelo mais usual é o proposto por Norberg em 1976, [14], que determina o prémio que deverá ser cobrado às apólices em cada classe de bónus quando se atinge a estacionaridade da carteira, através da aplicação da estatística Bayesiana e de uma abordagem semelhante à utilizada em Teoria da Credibilidade, obtendo-se:

$$b^N(j) = \frac{1}{\pi_T(j)} \int_0^{+\infty} \sum_{j=1}^s \lambda \cdot \pi_{T,\lambda}(j) dU(\lambda), \quad j = 1, \dots, s. \quad (2.2)$$

O modelo de Borgan, Hoem e Norberg de 1981, [4], é uma generalização do modelo anterior. Neste modelo os autores sugerem a introdução de um sistema de ponderadores não negativos, $\{w_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$, cuja soma seja a unidade. Cada ponderador representa o peso a atribuir a cada período n e w_0 o peso a atribuir à distribuição estacionária. Por vezes os resultados obtidos não são crescentes, isto é, existe uma classe superior que tem um prémio mais baixo do que a anterior. Gilde e Sund em 1989, [8],

resolvem este problema linearizando a escala. Os autores garantem assim que os prémios estão ordenados de acordo com a gravidade das classes e que evoluem de uma forma regular. Andrade e Silva em 1991, [3], apresenta uma escala geométrica que verifica que o quociente entre os prémios de duas classes consecutivas é constante.

3. UM EXEMPLO SIMPLES

Para melhor compreensão dos conceitos apresentados iremos acompanhar um exemplo fictício com um número reduzido de classes. Os cálculos são efetuados recorrendo ao *software* R Cran versão 3.6.3. Aplicações a casos reais podem ser consultadas em [1], [2], [9], entre outros. A descrição do SBM de cada seguradora é de divulgação obrigatória e pode ser consultada nas condições gerais da apólice de seguro.

Assim, considere-se um SBM composto por três classes de desconto, três classes de agravamento e uma classe de entrada (sem desconto, nem agravamento).

Por cada anuidade sem sinistros a apólice desce uma classe e por sinistro declarado sobe duas classes. A escala de prémios é $b = (0,5; 0,65; 0,8; 1; 1,2; 1,5; 2,0)$. Numerando as classes por ordem crescente de propensão à sinistralidade:

- ▶ C1 - classe de 50% de desconto.
- ▶ C2 - classe de 35% de desconto.
- ▶ C3 - classe de 20% de desconto.
- ▶ C4 - classe de 0% de desconto ou agravamento.
- ▶ C5 - classe de 20% de agravamento.
- ▶ C6 - classe de 50% de agravamento.
- ▶ C7 - classe de 100% de agravamento.

O trio $S = (T, b, C_{i_0})$ será definido por:

▶ $b = (0,5; 0,65; 0,8; 1; 1,2; 1,5; 2,0)$ indicando, por exemplo, que um segurado na classe C2 em que $b_2 = 0,65$ paga 65% do seu prémio *a priori*.

▶ C_{i_0} é a classe C4.

▶ A matriz de transição será dada pela tabela 1 e cuja Cadeia de Markov, recorrendo ao package *igraph*, pode ser consultada na figura 1.

¹Distribuições definidas como no package *stats* do *software* R Cran

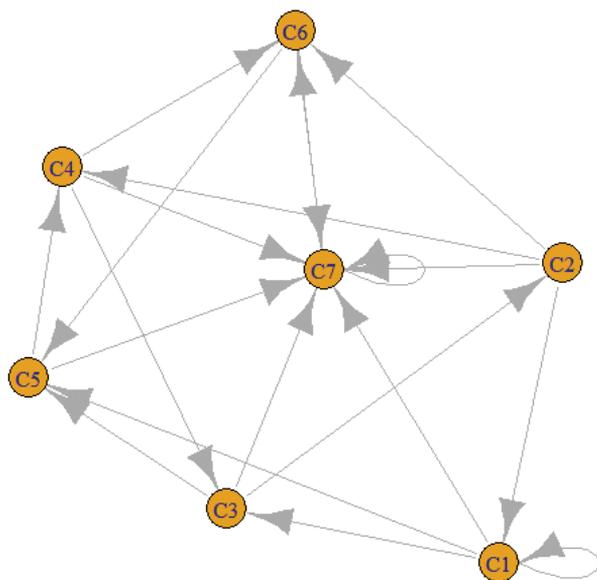


Figura 1. Cadeia de Markov representativa de T .

Analisando a matriz das Regras de Transição, verifica-se que a Cadeia de Markov assim definida é uma cadeia irreduzível, uma vez que todas as classes comunicam entre si. É aperiódica, pois existem duas classes de período 1 (C_1 e C_7), e, sendo irreduzível, cada um dos seus estados tem o mesmo período e igual a um.

Recorrendo ao package *markovchain* e à função *summary*, do software R Cran, obtemos a seguinte classificação da Cadeia de Markov:

```
BMS MARKOV CHAIN THAT IS COMPOSED BY:
CLOSED CLASSES:
C1 C2 C3 C4 C5 C6 C7
RECURRENT CLASSES:
{C1, C2, C3, C4, C5, C6, C7}
TRANSIENT CLASSES:
NONE
THE MARKOV CHAIN IS IRREDUCIBLE
THE ABSORBING STATES ARE: NONE
```

Supondo que, do histórico da seguradora, se apura a informação da tabela 2 sobre a frequência de sinistralidade recente (informação retirada de [1] ou [2]), iremos começar por ajustar uma distribuição ao número de sinistros declarados por um segurado retirado ao acaso da carteira.

Para obter os estimadores de verosimilhança para os parâmetros de uma Poisson e de uma Binomial Negativa recorreremos à função *fitdistr* do packa-

Tabela 1. Matriz de Transição do SBM.

$$T = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{matrix} & \begin{pmatrix} \{0\} & - & \{1\} & - & \{2\} & - & \{3,4,\dots\} \\ \{0\} & - & - & \{1\} & - & \{2\} & \{3,4,\dots\} \\ - & \{0\} & - & - & \{1\} & - & \{2,3,\dots\} \\ - & - & \{0\} & - & - & \{1\} & \{2,3,\dots\} \\ - & - & - & \{0\} & - & - & \{1,2,\dots\} \\ - & - & - & - & \{0\} & - & \{1,2,\dots\} \\ - & - & - & - & - & \{0\} & \{1,2,\dots\} \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Tabela 2. Número de sinistros declarados na carteira.

N.º de Sinistros	N.º de Apólices
0	408 348
1	31 993
2	2 010
3	133
4	6
Total	442 490

ge MASS. Testam-se agora as seguintes hipóteses recorrendo ao teste do Qui-Quadrado de Pearson $H_0 : N \sim P(\lambda = 0,08234)$ com $p - value < 2,2e - 16$ e $H_0 : N \sim BN(\alpha = 1,600322, p = 0,951068)$ com $p - value = 0,6779$. Assim, assume-se $N \sim P(\Lambda)$ e $\Lambda \sim G(1,600322; 0,0514)$.

O cálculo da expressão (2.1) apenas é possível recorrendo a métodos numéricos, pelo que necessitamos de discretizar a distribuição Gama. Iremos recorrer ao package *actuar* aplicando *discretize* (*pgamma*(x , *shape*=1,600322, *scale*=0,05144948), *method* = "rounding", *from* = 0, *to* = 2, *step* = 1/100). O resultado desta instrução é u_{λ}^d , o vetor das probabilidades da distribuição Gama discretizada. Assim a distribuição limite será

$$\pi_T(j) = \sum_{\lambda} \pi_{T,\lambda}(j) u_{\lambda}^d, \quad j = 1, 2, \dots, s. \quad (3.1)$$

Neste exemplo a distribuição limite é:

$$\pi_T = (0,7964; 0,0678; 0,0766; 0,0230; 0,0191; 0,00961; 0,0076)$$

Esta distribuição limite indica que numa perspetiva de longo prazo, 79,64% das apólices estarão na classe mais bonificada e cerca de 0,7% estarão na classe de maior agravamento.

Multiplicando a distribuição limite pelo prémio de cada classe (vetor b) obtém-se o prémio médio de estacionaridade de 57,9 para um prémio à entrada de 100.

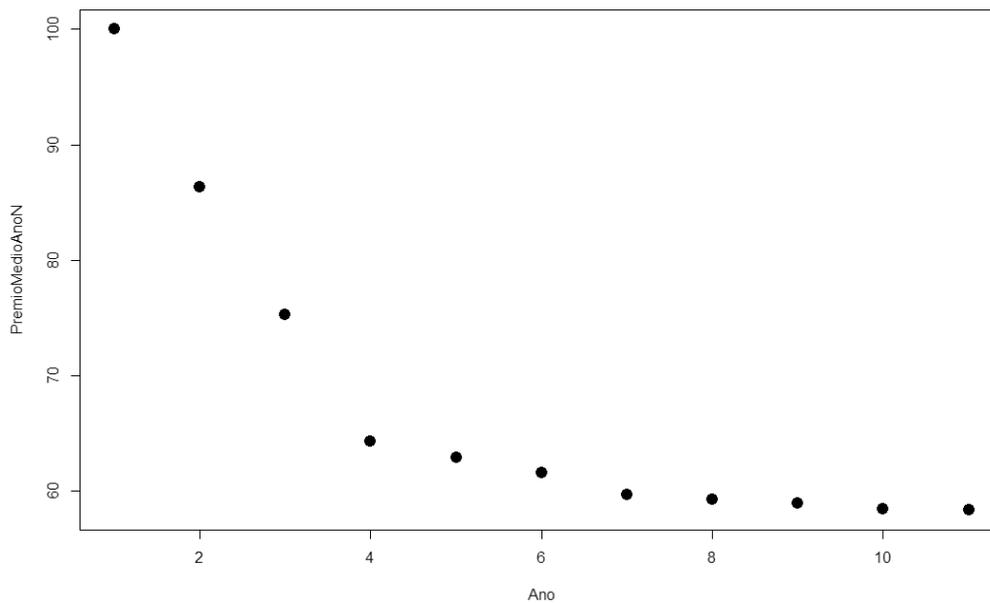


Figura 2. Evolução do prêmio médio ao longo do tempo.

Ou seja, a longo prazo, com esta sinistralidade e estas regras do SBM, a seguradora estará a cobrar quase metade do prêmio *a priori*. Este indicador sugere que as regras de transição deste SBM não são severas. Na figura 2 pode observar-se a evolução do prêmio médio de um segurado que entra na Classe 4. O prêmio decresce rapidamente nos primeiros quatro anos, estabilizando em torno dos 60 a partir daí.

Neste exemplo o vetor dos prémios está definido à partida. Aplicando (2.2), obtemos a escala ótima de Norberg $b^N(j) = (0,4914; 0,7287; 0,7581; 1,0000; 1,0731; 1,2997; 1,4228)$. Observa-se que o prêmio na classe mais bonificada é semelhante, cerca de 50%, mas na classe mais gravosa a proposta de Norberg é 142,28%, sendo inferior aos 200% considerado em b . Por vezes os resultados que se obtêm aplicando as escalas ótimas não são atrativos do ponto de vista comercial. É sempre possível redefinir a escala, avaliar a eficiência dos diferentes SBM e escolher o SBM adequado à seguradora.

4. ONDE APROFUNDAR OS CONHECIMENTOS

Mostrou-se o que é um Sistema de Bonus Malus, para que serve e algumas conclusões que podem ser importantes. Não sendo possível uma apresentação mais exaustiva do tema, deixamos algumas referências bibliográficas caso o leitor pretenda ter um ponto de partida para aprofundar os conhecimentos.

Existem, também, alguns indicadores para avaliar e

comparar diferentes SBM que podem ser consultados em [13] e [12]. Em [11] pode ser consultado um estudo comparativo de 30 SBM.

Em 1997, Pinquet, [15] apresenta um SBM que considera, além do número de sinistros, também o montante de sinistro pago pela seguradora. Mais recentemente surgiram trabalhos considerando o modelo aberto, um modelo mais complexo mas mais próximo da realidade das seguradoras, uma vez que permite a entrada e a saída dos segurados em qualquer classe, [6] e [9] são alguns exemplos. Afonso et al, em 2017 [1], e em 2020 [2], avaliam a probabilidade de ruína, da seguradora, num horizonte temporal finito na presença de um SBM no modelo fechado e no modelo aberto, respetivamente.

O futuro dos modelos de tarificação *a priori* está a mudar com a introdução da telemática. As variáveis de tarificação são lidas do computador do automóvel e a tarificação avizinha-se quase instantânea. Quem sabe o que o futuro nos reserva relativamente à tarificação no automóvel e em particular aos Sistemas de Bonus Malus?

REFERÊNCIAS

- [1] Afonso, L.; Cardoso, R.; Egídio dos Reis, A. e Guerreiro, G. (2017) "Measuring The Impact Of A Bonus-Malus System In Finite And Continuous Time Ruin Probabilities For Large Portfolios In Motor Insurance", *ASTIN Bulletin*, 47 (2), 417-435.

- [2] Afonso, L; Cardoso, R.; Egídio dos Reis, A. e Guerreiro, G. (2020). "Ruin Probabilities And Capital Requirement for Open Automobile Portfolios With a Bonus-Malus System Based on Claim Counts", *Journal of Risk and Insurance*, 87(2), 501-522.
- [3] Andrade e Silva, J. (1991), *Estruturas Tarifárias nos Ramos Reais da Indústria Seguradora - Uma aplicação ao sector automóvel em Portugal*, Instituto Superior de Economia e Gestão.
- [4] Borgan, Ø, J. Hoem e R. Norberg (1981), "A Non Asymptotic Criterion for the Evaluation of Automobile Bonus System", *Scandinavian Actuarial Journal*, pp. 165-178.
- [5] Centeno, L. (2003), . *Teoria do Risco na Actividade Seguradora*. Vol. 1. 211 pp.
- [6] Centeno, L. e Andrade e Silva, J. (2001), "Bonus Systems in Open Portfolio", *Insurance Mathematics e Economics*, pp. 341-350.
- [7] Frangos, N. e Vrontos, S. D. (2001) "Design Of Optimal Bonus-Malus Systems With A Frequency And Severity Component On An Individual Basis In Automobile Insurance", *ASTIN Bulletin* 31 (1), 1-22
- [8] Gilde, V. e Sundt, B. (1989), "On Bonus Systems with Credibility Scales", *Scandinavian Actuarial Journal*, pp. 13-22.
- [9] Guerreiro, G.R.; Mexia, J.T. e Miguens, M.F. (2014) "Statistical Approach for Open Bonus Malus", *ASTIN Bulletin*, 44 (1), 63-83.
- [10] Grandell, J. (1997), *Mixed Poisson Processes*, Chapman & Hall.
- [11] Lemaire, J. e Zi, H. (1994), "A Comparative Analysis of 30 Bonus Malus Systems", *ASTIN Bulletin*, 24 (2), 287-309.
- [12] Lemaire, J. (1995), *Bonus-Malus Systems in Automobile Insurance*, Kluwer Academic Publishers.
- [13] Loimaranta, K. (1972), "Some Asymptotic Properties of Bonus Systems", *ASTIN Bulletin*, 6, pp. 233-245.
- [14] Norberg, R. (1976), "A Credibility Theory for Automobile Bonus System", *Scandinavian Actuarial Journal*, pp. 92-107.
- [15] Pinquet, J. (1997). "Allowance for Cost of Claims in Bonus-Malus Systems". *ASTIN Bulletin*, 27(1), 33-57.
- [16] Sichel, H. (1971), "On a Family of Discrete Distributions Particular Suited to Represent Long Tailed Frequency Data", Laubscher N. , *Proceedings of Third Symposiums of Mathematics Statistics*, pp.51-97.

SOBRE A AUTORA

Lourdes B. Afonso é professora associada da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa, investigadora no Centro de Matemática e Aplicações e professora convidada da NOVA IMS Information Management School. É neste momento presidente da direção do Instituto dos Atuários Portugueses (<https://atuarios.pt>). É atuária responsável dos ramos não vida, certificada pela ASF. Aplica matemática a problemas de atuariado desde 1994.

Secção coordenada pela PT-MATHS-IN, Rede Portuguesa de Matemática para a Indústria e Inovação

pt-maths-in@spm.pt



Publicado originalmente no jornal Público, em 10/03/2022. Imagem gentilmente cedida pelo autor.

FICHA TÉCNICA

DIRETORA (EDITORA-CHEFE):

Sílvia Barbeiro Universidade de Coimbra

EDITORES:

Daniel Pinto Universidade de Coimbra

Hugo Tavares Instituto Superior Técnico

CONSELHO EDITORIAL:

Adérito Araújo Universidade de Coimbra • **Afonso Bandeira** ETH Zurich, Suíça • **António Machiavelo** Universidade do Porto • **António Pereira Rosa** E. S. M^a Amália Vaz de Carvalho, Lisboa • **Henrique Leitão** Universidade de Lisboa • **João Filipe Queiró** Universidade de Coimbra • **Juvenal Espírito Santo** Instituto Nacional de Segurança Social de S. Tomé e Príncipe e Universidade de S. Tomé e Príncipe • **Nátália Furtado** Universidade de Cabo Verde • **Nisa Figueiredo** Thomas More Hogeschool Roterdão • **Paolo Piccione** Universidade de São Paulo • **Rogério Martins** Universidade Nova de Lisboa • **Teresa Monteiro Fernandes** Universidade de Lisboa

ASSISTENTE EDITORIAL:

Ana Isabel Figueiredo SPM

REVISÃO:

Margarida Robalo

DESIGN:

Ana Pedro

IMPRESSÃO:

FR Absolut Graphic

Rua Professor Egas Moniz n 38 4^o Dto - 2620-138 Póvoa Sto. Adrião

CONCEÇÃO DO PORTAL WEB:

Alojamento Vivo

MANUTENÇÃO DO PORTAL WEB

Ana Isabel Figueiredo SPM

PROPRIEDADE, EDIÇÃO E REDAÇÃO

Sociedade Portuguesa de Matemática

SEDE: Av. República 45, 3^o Esq. 1050-187 Lisboa

Tel.: 217939785 Fax: 217952349 E-mail: spm@spm.pt

NIPC: 501065792

ESTATUTO EDITORIAL: <http://gazeta.spm.pt/politica>

TIRAGEM **1250 Exemplos**

ISSN **0373-2681** • ERC **123299** • DEPÓSITO LEGAL: **159725/00**

AFONSO BANDEIRA VENCE A PRIMEIRA EDIÇÃO DO PRÉMIO ANTÓNIO ANICETO MONTEIRO

O Prémio António Aniceto Monteiro, uma parceria da Sociedade Portuguesa de Matemática com a Unilabs, distinguiu na sua primeira edição o matemático Afonso Bandeira, de 34 anos. O prémio galardoa um(a) matemático(a) de nacionalidade portuguesa e com menos de 40 anos que se tenha distinguido por uma contribuição significativa para o desenvolvimento da disciplina.

Afonso Bandeira, antigo participante das Olimpíadas Portuguesas de Matemática, concluiu a licenciatura e o mestrado em Matemática na Universidade de Coimbra, tendo em seguida ido para os Estados Unidos da América, onde, em 2015, terminou o doutoramento em Matemática Aplicada e Computacional na Universidade de Princeton. No mesmo ano, iniciou o pós-doutoramento no Instituto de Tecnologia de Massachusetts. Ainda nos Estados Unidos, Afonso Bandeira foi professor no Instituto Courant da Universidade de Nova Iorque. Em 2019 mudou-se para a Suíça, onde atualmente é professor

catedrático no ETH Zurich.

Afonso Bandeira tem desenvolvido investigação na área de Matemática da Informação, combinando ferramentas de teoria da probabilidade, estatística teórica e otimização convexa. O Prémio António Aniceto Monteiro é a primeira distinção que o investigador ganhou em Portugal tendo em conta o seu trabalho de investigação. Internacionalmente, já tinha conquistado o Smale Prize, em 2020.

O galardão da primeira edição do Prémio António Aniceto Monteiro foi entregue pelo presidente da Sociedade Portuguesa de Matemática, João Araújo, no dia 20 de julho, no Instituto Politécnico de Tomar, durante o Encontro Nacional da Sociedade Portuguesa de Matemática 2022.

O júri da primeira edição contou com André Neves (University of Chicago), Georgia Benkart (University of Wisconsin), Irene Fonseca (Carnegie Mellon University), Marcelo Viana (IMPA) e Martin Hairer (Imperial College).





PORTUGAL CONQUISTOU UMA MEDALHA DE PRATA E TRÊS DE BRONZE NAS IMO2022

Portugal conseguiu a melhor pontuação de sempre nas Olimpíadas Internacionais de Matemática (IMO). Uma medalha de prata, três de bronze e duas menções honrosas são o saldo da equipa portuguesa na competição. Tiago Mourão, aluno do 12º ano da Escola Secundária de Santa Maria da Feira, conquistou a medalha de prata. Tiago Marques, aluno do 12º ano no Colégio Internato Claret, em Pedroso, Leonardo Tavares, aluno do 12º ano na Escola Secundária D. Filipa de Lencastre, em Lisboa, e Eduardo Guerreiro, aluno do 12º ano da Escola Secundária João de Deus, em Faro, arrecadaram as medalhas de bronze. Mariana Costa, aluna do 12º ano na Escola Secundária Camilo Castelo Branco, em Vila Real, e Rafael Inácio, aluno do 11º ano na Escola Secundária Dr. Mário Sacramento, em Aveiro, obtiveram menções honrosas.

As IMO 2022 decorreram, em Oslo, de 10 a 15 de julho. Este ano a competição retomou o formato presencial, depois de dois anos a decorrer online, e contou com mais de 580 participantes. Entre os 104 países presentes na competição, Portugal ficou no 44º lugar, à frente de nações como a Dinamarca, a Finlândia e a Noruega. Portugal participou pela primeira vez nas IMO em 1989 e, desde então, já conquistou três medalhas de ouro, oito de prata, 40 de bronze e 42 menções honrosas.

A participação de Portugal nestas competições é organizada pela Sociedade Portuguesa de Matemática, e a seleção e a preparação dos alunos está a cargo do Projeto Delfos, do Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra. O Ministério da Educação, a Ciência Viva, o novobanco e a Fundação Calouste Gulbenkian apoiam a realização das Olimpíadas.

JOSÉ CARLOS SANTOS É O NOVO PRESIDENTE DA SPM

A Sociedade Portuguesa de Matemática (SPM) elegeu, no dia 13 de julho, a nova direção para o biénio 2022/2024, com José Carlos Santos, da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, a assumir a presidência e com Fernando Pestana da Costa, da Universidade Aberta, e Isabel Hormigo, da Escola Secundária D. Filipa de Lencastre, como vice-presidentes.

José Carlos Santos sucede a João Araújo, que esteve à frente da SPM entre 2020 e 2022.

Os restantes membros da nova direção são Joana Teles (Universidade de Coimbra), Clementina Timóteo (Escola Secundária Padre Alberto Neto), Frederico Valsassina (Colégio Valsassina), Luís Roçadas (Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro), Óscar Felgueiras (Universidade do Porto), Paulo Vasconcelos (Universidade do Porto), Pedro Patrício (Universidade do Minho) e Pedro Serranho (Universidade Aberta).

A nova direção pretende representar a comunidade matemática portuguesa, desde os investigadores e professores de todos os níveis de ensino até aos estudantes, bem como os associados institucionais e coletivos; continuar a contribuir para um ensino de Matemática de elevada qualidade; manter a intervenção informada, rigorosa e construtiva sobre questões educativas, num momento em que a questão do ensino da Matemática em Portugal é mais importante do que nunca; apoiar, desenvolver e consolidar projetos, de âmbito nacional, que permitam desenvolver as capacidades dos alunos e incrementar o gosto pela Matemática; dar seguimento às numerosas atividades de divulgação que a Sociedade tem vindo a desenvolver e continuar a contribuir para o desenvolvimento da investigação matemática em Portugal.

PRÉMIO ÁLVARO BATISTA GONÇALVES

A Sociedade Portuguesa de Matemática (SPM), em parceria com a Associação Álvaro Gonçalves, acaba de criar o Prémio Álvaro Batista Gonçalves, um prémio anual para distinguir os melhores professores de Matemática do Ensino Básico e do Ensino Secundário de Portugal.

O prémio consiste numa dotação de cinco mil euros e será atribuído a um professor que se diferencie pelo seu “esforço e dedicação” e pelo “impacto nos alunos”.

João Araújo, presidente da SPM, referiu que “o objetivo é reconhecer a visão, a dedicação e os resultados de um professor”.

Fernando Gonçalves, presidente da Associação Álvaro Gonçalves, afirmou também que o prémio “vai reconhecer o papel dos professores”, acrescentando que vai mostrar que “estamos muito agradecidos e que os valorizamos”.

As candidaturas à primeira edição estarão abertas entre 29 de setembro de 2022 e 3 de fevereiro de 2023.



8TH IBERIAN MATHEMATICAL MEETING

A 8ª edição do Iberian Mathematical Meeting será realizada de 5 a 7 de outubro de 2022, no Instituto de Matemática da Universidade de Sevilha. Seguindo a tradição de encontros anteriores, o evento está estruturado em três áreas científicas. Nesta edição, as áreas científicas são: Matemática da Informação, Cálculo de Variações e Álgebra Computacional e Aplicações.

2ND WOMEN IN MATHEMATICS MEETING

A 2ª edição da Women in Mathematics Meeting (WM22) terá lugar, na Universidade do Minho, de 7 a 9 de setembro. Um dos principais objetivos desta conferência é cobrir, o mais amplamente possível, a diversidade de interesses das matemáticas portuguesas.

Em Portugal, como em muitos países, os lugares cimeiros das instituições de Ensino Superior são ocupados na sua maioria por homens. Também os oradores convidados para conferências nacionais e internacionais incluem, em geral, poucas mulheres. Além disso, o número de alunas que seguem para doutoramento em Matemática depois de completarem os primeiros ciclos de estudos é relativamente

baixo. Assim, esta conferência será uma oportunidade para partilhar experiências diferentes e ajudar a desenvolver uma comunidade mais solidária que pode inspirar futuras mulheres matemáticas.

Na WM22, além das palestras e da apresentação de pôsteres, o programa inclui uma sessão especial e um painel de discussão sobre a situação das disparidades de género em Portugal. A participação no evento é gratuita.

A primeira edição da conferência WM aconteceu em 2019, na Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa.

MARYAM MIRZAKHANI HOMENAGEADA EM BANDA DESENHADA

No passado dia 12 de maio, foi publicado um novo volume da série Comics & Science, intitulado The Mirzakhani Issue, uma homenagem à notável matemática Maryam Mirzakhani, a primeira mulher a vencer uma Medalha Fields, falecida precocemente em 2017. Produzido pelas Cnr Edizioni em colaboração com a União Matemática Italiana, este volume contém a história "Under the Sign of the Torus", escrita por Davide La Rosa e desenhada por Silvia Ziche.

Nesta edição podem ainda ler-se os artigos "The Right to be Wrong", de Chiara de Fabritiis, "Formulas and Drawings, Thinking of Maryam", de Chiara de Fabritiis e Barbara Nelli, "A Date to Remember", de Elisabetta Strickland, "One of a Kind, But Definitely Not Alone", de Barbara Fantechi, "Maryam's Mathematics", dos editores em colaboração com Corinna Ulcigrai, "In Memory of Maryam", de Ingrid Daubechies, e uma "Open Letter", de Donata Moschella.

A versão inglesa está disponível gratuitamente online.



MARYNA VIAZOVSKA É A SEGUNDA MULHER A RECEBER UMA MEDALHA FIELDS

Hugo Duminil-Copin, James Maynard, June Huh e Maryna Viazovska são os mais recentes distinguidos com as Medalhas Fields, um dos mais importantes prêmios em matemática. As medalhas foram entregues durante o Congresso Internacional de Matemáticos 2022 (ICM 2022), no dia 5 de julho, na Universidade de Aalto, em Helsínquia, na Finlândia. As Medalhas Fields são um prêmio atribuído pela União Matemática Internacional, desde 1936, de quatro em quatro anos, a matemáticos com menos de 40 anos que se destaquem por um trabalho notável.

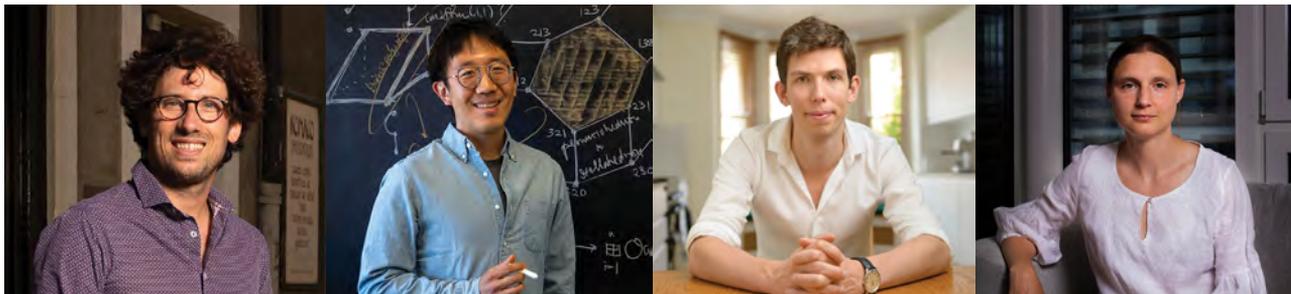
Maryna Viazovska é a segunda mulher a receber uma Medalha Fields, em mais de 80 anos. A pioneira foi a iraniana Maryam Mirzakhani, em 2014. A matemática ucraniana viu reconhecido o seu trabalho sobre o problema de empacotamento de esferas. Afinal, qual é a melhor forma de poupar espaço? Viazovska, investigadora na Escola Politécnica de Lausanne, na Suíça, encontrou as melhores soluções para esferas em 8 e 24 dimensões. O júri do prêmio salientou também as contribuições da investigadora para problemas extremos relacionados com o empacotamento e problemas de interpolação na análise de Fourier.

Hugo Duminil-Copin, investigador no Instituto de Altos

Estudos Científicos, na região de Paris, e da Universidade de Genebra, foi distinguido por transformar a teoria matemática das transições de fase em física estatística e resolver vários problemas abertos de longa data, em particular nas dimensões três e quatro. De acordo com o júri, o trabalho do matemático francês veio abrir várias hipóteses para novas pesquisas.

James Maynard, da Universidade de Oxford, com 35 anos, é o mais novo dos medalhados. O matemático britânico recebeu a medalha pelas suas contribuições para a teoria analítica dos números, que permitiram importantes avanços na compreensão da estrutura dos números primos e na aproximação diofantina. Maynard liderou vários dos contributos mais recentes sobre números primos.

June Huh, da Universidade de Princeton, recebeu o prêmio por trazer ideias da teoria de Hodge para a combinatória, a prova da conjectura de Dowling-Wilson para reticulados geométricos, a prova da conjectura de Heron-Rota-Welsh para matroides, o desenvolvimento da teoria dos polinómios de Lorentz e a prova da conjectura de Mason. O matemático norte-americano era referido como um forte candidato a vencer uma Medalha Fields há vários anos.



Hugo Duminil-Copin, June Huh, James Maynard e Maryna Viazovska

9º ENCONTRO LUSO-BRASILEIRO DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

O 9º Encontro Luso-Brasileiro de História da Matemática terá lugar na cidade de Setúbal, entre os dias 12 e 16 de outubro de 2022. A organização está a cargo do Seminário Nacional de História da Matemática (Portugal) e da Sociedade Brasileira de História da Matemática (Brasil).

Os Encontros Luso-Brasileiros de História da Matemática tiveram início em Coimbra, em 1993, e

decorrem em Portugal e no Brasil, alternadamente, tendo como objetivo estreitar as relações científicas nessa área entre os investigadores dos dois países.

O último Encontro Luso-Brasileiro de História da Matemática foi realizado em 2018, na Foz do Iguaçu, Brasil. O 9º Encontro deveria ter sido realizado em 2021 em Portugal, no entanto, devido a restrições relacionadas com a covid-19 foi adiado para 2022.

SABE O QUE ACONTECEU?

Não foi só a pandemia e a necessidade de adaptar as atividades tradicionais, imaginar outras adequadas às circunstâncias, a perturbação interpessoal, o planejar atividades na lotaria dos (des)confinamentos, etc. Houve muito mais!

1. Os matemáticos passaram a poder organizar retiros para investigação em imersão total na Rede Pedro Nunes, no Convento da Arrábida e no Centro de Alto Rendimento do Pocinho.

2. A matemática mostrou uma imagem mais presente, mais frequente e mais próxima das pessoas: 11 horas de televisão, 12 horas de rádio, dez capas de jornais, 40 páginas nos jornais, muitos artigos de opinião. Boa imprensa. Mais impacto.

3. Matemáticos excepcionais atraíram 67 sessões paralelas e 800 professores e investigadores ao ENSPM21 virtual. Patrícia Gonçalves (IST) conjeturou que Hugo Duminil-Copin seria Medalha Fields em 2022 e por isso foi colocado a fazer a última comunicação plenária do Encontro. Também em 2022, investigadores excepcionais (incluindo oito ERC) atraíram mais de 200 pessoas e 44 sessões paralelas ao ENSPM22 presencial de Tomar.

4. A matemática consagra jovens investigadores maduros com o Prémio António Aniceto Monteiro, UNILABS-SPM, cujo júri incluía Irene Fonseca, Martin Hairer, André Neves e Marcelo Viana, e distinguiu Afonso Bandeira, na primeira edição.

5. A matemática distingue a visão e a dedicação de professores do Básico e do Secundário com a criação do Pré-

mio Álvaro Gonçalves AAG-SPM, contando no júri da primeira edição com nomes como Ramalho Eanes, Maria Cortez de Lobão, Marçal Grilo e Nuno Crato. A apresentação do prémio contou com a presença dos principais meios de comunicação social nacionais e Luís Marques Mendes fez referência ao prémio no Jornal da Noite (SIC) a 10 de julho.

6. A matemática mostrou o seu lado solidário durante a pandemia com 200 associados e amigos da SPM disponíveis em voluntariado para dar aulas presenciais ou por Zoom e palestras em escolas.

7. A SPM tem agora a propriedade intelectual do seu site, que foi renovado: mais útil para os associados; mais atraente para o público.

8. Foi criada a estrutura informática da Sala de Dúvidas para que, em vez do “estava sozinho e ninguém me ajudou”, as crianças possam dizer “nas dúvidas, a SPM estava ali”. Várias autarquias se mostraram muito interessadas no projeto.

9. A matemática é agora servida por uma newsletter informativa, útil e breve, que noticia, anuncia seminários online, ofertas de emprego, etc.

10. Os Testes SPM deram contexto ao trabalho das esco-

las. Foram 97 em 2021, 126 em 2022, dezenas de milhares de alunos em cada ano e uma plataforma produzida de raiz.

11. Em conjunto com a EMS-Press, foi repensada e reorganizada a *Portugaliae Mathematica*, com novo corpo editorial devotado à missão de a elevar na cadeia do prestígio científico.

12. Forte carga simbólica na eleição de sócios honorários nos quatro pilares da SPM: Investigação, Ensino, Divulgação e História: Jorge Almeida, Nuno Crato, Gracinda Gomes, Henrique Leitão, Luís Magalhães e Luciano Santos. Obrigado por tudo o que fizeram pela matemática.

13. Frequentes reuniões multitudinárias da Sociedade e seus amigos, em particular a celebração dos 80 anos ou a palestra do Dia do Pi de Rogério Martins para quatro mil crianças de 5 anos espalhadas por todo o País.

14. Carinhosa mensagem de felicitações do Sr. Presidente da República para a SPM e o seu alto patrocínio para os nossos eventos.

15. O centro de formação serviu bem e oportunamente. Duas ações com 449 formandos desvendando segredos do ensino online e um total recorde de 1784 formandos.

16. O número de sócios subiu de 717 em 2020 para 912 em 2021, aumentando o envolvimento com a Sociedade e os custos fixos assegurados por receitas próprias.

17. Colaboração e apoio, dentro das circunstâncias pandémicas, com diversas entidades: estruturas regionais e autónomas, Clube da Matemática, CIM, Olimpíadas

da Matemática, Ludus, IPQ, Ciência Viva, três departamentos da Gulbenkian, tomadas de posição e audição nas Aprendizagens Essenciais, acreditação de manuais, e muito mais, tudo oportunamente detalhado nos relatórios de atividades.

18. Acordo sobre um concerto SPM-Gulbenkian de música gerada por inteligência artificial, incluído no programa da temporada de música da Gulbenkian 2023.

19. Mandato iniciado com alerta sério sobre a sustentabilidade financeira da SPM termina serenamente com o Conselho Fiscal a saudar a folga financeira conseguida.

20. Conhecemos imensas iniciativas geniais, comoventes, brilhantes, organizadas um pouco por todo o País, que mobilizam, inspiram e aproximam a matemática de todos e de cada um.

Quanto maior o envolvimento, o rejuvenescimento e a mobilização dos associados nos órgãos sociais, maior o rasgo, a vitalidade e o impacto das ações da SPM.

Este foi o mandato dos 80 anos da SPM. *It will be another million years before we understand the primes*¹. Mas quando isso acontecer, a SPM estará lá!

¹Paul Erdos.



Visite-nos em <https://clube.spm.pt>



POLÍTICA EDITORIAL DA GAZETA DE MATEMÁTICA:

A Gazeta de Matemática continua a ser, tal como acontece desde a sua fundação em 1940, o principal elo de ligação da Sociedade Portuguesa de Matemática com a comunidade matemática portuguesa.

A Gazeta de Matemática é uma publicação essencialmente de divulgação da cultura matemática. Pretende estimular o gosto pelo estudo da matemática assim como a troca de ideias entre quem estuda, ensina, investiga, usa ou simplesmente se interessa pela matemática.

A Gazeta de Matemática publica artigos submetidos espontaneamente, artigos convidados e secções permanentes.

Incentivamos os nossos leitores a enviarem textos para publicação na Gazeta de Matemática. Damos preferência a artigos curtos (4 a 6 páginas) sobre temas que tenham interesse para o nosso público: algo rela-

cionado com um tema de investigação que possa ser explicado à comunidade matemática em geral, algum aspecto curioso de matemática menos conhecido, uma nova perspectiva sobre um tema do interesse do leitor ou simplesmente algo que tenha uma ligação com o mundo matemático.

Os artigos poderão ser submetidos à apreciação de um ou mais especialistas com o objectivo de obter um parecer sobre a sua adequação para publicação na Gazeta de Matemática.

Os textos podem ser submetidos em **LaTeX** ou em **Word** (com uma versão em **PDF**). No caso de o documento conter muitas fórmulas aconselhamos o primeiro formato. Deve submeter o texto, junto com as imagens, para o seguinte endereço: gazeta@spm.pt.

ASSINATURA DA GAZETA PARA O ANO 2022

Preço de Capa (avulso) + portes de envio	Assinatura				Assinatura para sócios SPM	Assinatura de Apoio
	Portugal	Europa	Guiné-Bissau S. Tomé e Príncipe Timor Leste	Resto do Mundo		
4.2€	12€	15€	12€	17€	0€	≥ 17.5€

A SPM disponibiliza na página <http://www.spm.pt/carreira/carreira.phtml> informação sobre emprego e carreira para matemáticos. As pessoas interessadas em incluir anúncios neste site devem enviar um email com os dados para imprensa@spm.pt

VISITE O SITE DA **SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA**

www.spm.pt

E O DA **GAZETA DE MATEMÁTICA**

www.gazeta.spm.pt

VISITE A LOJA SPM EM WWW.SPM.PT

