GAZETA DE MATEMÁTICA

JORNAL DOS CONCORRENTES AO EXAME DE APTIDÃO E DOS ESTUDANTES DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS SUPERIORES

ANO XVIII — N.° 68-69 — SET.-DEZ. 1957

SUMÁRIO

DEPOSITÁRIO: LIVRARIA SÁ DA COSTA / RUA GARRETT, 100-102 / LISBOA

G A Z E T A   D E   M A T E M Á T I C A

EDITOR — *Gazeta de Matemática, Lda.* ADMINISTRADOR — *A. Sá da Costa*

Sede e Administração — Av. João Crisóstomo, 4, 7.º-D. — Tel. 771943 — Lisboa-N.

R E D A C Ç Ã O

Redactores: *J. Gaspar Teixeira, J. Morgado e J. da Silva Paulo*

OUTROS COMPONENTES

EM PORTUGAL:

Coimbra: L. Albuquerque, **Lisboa:** Almeida Costa, Ferreira de Macedo, A. Sá da Costa, J. Calado, J. Dionísio, J. Sebastião e Silva, S. Ventura, J. R. Albuquerque, M. Teodora Alves, Fernando de Jesus, Orlando M. Rodrigues; **Porto:** Andrade Guimarães, F. Soares David, Laureano Barros, L. Neves Real, Ruy Luís Gomes.

NO ESTRANGEIRO:

Argentina — *Buenos Aires:* António Monteiro, L. A. Santaló; *Mendoza:* F. Toranzos; *San Luís:* Manuel Balanzat; **Brasil** — *Belo Horizonte:* Cristovam dos Santos; *Recife:* Luiz Freire, Manuel Zaluar, Newton Maia e A. Pereira Gomes; *Rio de Janeiro:* Achille Bassi, Leopoldo Nachbin, Maria Laura Mousinho e Maurício Peixoto; *São Paulo:* Omar Catunda; **Espanha** — *Barcelona*: Francisco Sanvisens; *Madrid:* Sixto Rios Garcia; **Itália** — *Roma:* Emma Castelnuovo; **França** — *Paris:* Paul Belgodère; **Suissa** — *Zürich:* H. Wermus; **Uruguay** — *Montevideo:* Rafael La Guardia; **U. S. A.** — *Lincoln:* Maria Pilar Ribeiro.

Tipografia Matemática, L.da — Av. João Crisóstomo, 4, 7.º-D. — Telefone 771943 — LISBOA-N.

ANO XVIII—N.º 68-69 GAZETA DE MATEMÁTICA SET./DEZ. — 1957

EDITOR: *Gazeta de Matemática, Lda.* ADMINISTRADOR: *A. Sá da Costa*

REDACTORES: *J. Gaspar Teixeira, J. Morgado e J. da Silva Paulo*

Composto na Tipografia Matemática, Lda. — Avenida João Crisóstomo, 4, 7.º, Dto.—Telef. 771943—LISBOA-N.

Aspectos da actualidade Matemática

por **A. Pereira Gomes** *

Como seria de esperar, vou falar-vos de Matemática, ou mais precisamente (pois não quero despertar apreensões) «àcerca de Matemática».

A minha exposição terá, portanto, um carácter meramente descritivo, limitando-se a considerações muito gerais, onde procurarei delinear alguns aspectos actuais da Matemática — cujos traços principais são, em suma, um subido grau de abstracção, o apoio sistemático na teoria dos conjuntos, ou pelo menos no que se convencionou chamar «a teoria ingénua dos conjuntos», a axiomatização de diferentes teorias, a unificação numa só teoria de diferentes disciplinas até à pouco divorciadas umas das outras, etc.

Estas novas feições que nos mostra a Matemática de hoje levam, também, forçosamente a encarar a questão primordial do ensino desta ciência. Primordial, digo, e não vai aqui abuso de linguagem. Há quem afirme, e é muito plausível, que o embrião do conhecimento científico surgiu precisamente do desejo ou necessidade de conservar o fruto de experiências acumuladas por uma geração e transmiti-las às gerações futuras como a melhor das heranças.

A questão do ensino é portanto inerente à existência da própria ciência. É por ele que a ciência se perpetua. Por via dele a ciência se renova e se mantém (ou não) um organismo vivo e operante.

Pelo que toca à Matemática, não será demais realçar a importância desta questão. A Matemática é uma velha ciência feita por jovens e seria fácil confirmá-lo com exemplos numerosos, menos conhecidos do que os de Galois, Abel ou Cauchy.

Já alguém afirmou que as grandes ideias renovadoras da Matemática foram criações de menores de 30 anos. A asserção não será estrictamente rigorosa, mas o essencial dela permanece.

Tanto basta para dar relêvo à questão do ensino desta Ciência. Há necessidade não só de transmitir à juventude sólidos conhecimentos, mas simultâneamente imbuí-la dos métodos modernos, levá-la ao limiar dos verdadeiros problemas, impregná-la de espírito científico, incutir-lhe o gosto pela ciência — de par com uma compreensão lúcida do papel que a esta cabe na vida dos homens de hoje.

Ao ensino da Ciência e, em particular, da Matemática, cabe assim uma dupla função: a de exercer uma acção informativa, tecnoló-

* A Redacção apresenta aos Leitores da Gazeta a presente conferência que constituiu a Aula Inaugural do ano escolar de 1957 na Universidade do Recife.

gica e, paralelamente, numa acção formativa, educadora.

Nestes termos, torna-se patente a grave responsabilidade dos profissionais do ensino — quero dizer: professores e alunos. Com efeito, essa responsabilidade — nunca será demais sublinhá-lo — é assumida em comum, quaisquer que sejam as tentativas (sempre pueris) de separar professores e alunos em classes opostas, quando não hostis. Do ponto de vista em que nos colocamos, professores e alunos estão empenhados, e são intrìnsecamente solidários, na execução duma tarefa que transcende, pelos seus resultados e consequências, pela sua projecção social, os simples interesses pessoais e até o âmbito duma geração.

Não pretendo deter-me, neste momento, na análise de problema tão delicado e de repercussões tão profundas como é o de adaptar globalmente o ensino universitário às necessidades do tempo presente. Tanto mais que um tal programa interfere no ensino secundário e até primário, enquadrando-se, necessàriamente, por conseguinte, em toda uma política educacional.

Quero tão sòmente não esquecer de o mencionar, como numa condição essencial ao progresso técnico-científico duma nação. E sublinhar, a propósito, que não é só com respeito às ciências naturais ou experimentais que tal questão se apresenta — o que é correntemente aceite — mas igualmente com respeito à Matemática. Como aquelas, a Matemática evolui, renova os seus problemas, os seus métodos, a sua linguagem. Muda de feições, muda de roupagens. E torna-se indispensável que o ensino da Matemática leve isso em conta. Não se trata, como é óbvio, de preparar cada aluno duma escola superior para se lançar na pesquisa científica. Mas seria desejável que a atitude de cada estudante, como de cada professor, fosse a de um estudioso — vale dizer, de um pesquisador. Uma atitude activa e não estática ou passiva, crítica e não meramente receptiva, curiosa, indagadora, vigilante e não burocratizada na preparação ou execução de exames para a conquista, sem glória e sem gosto, dum almejado «Abre-te Sézamo!» de papel selado.

O problema, como disse, é delicado, complexo, e é também de extensão geográfica universal. Ele apresenta, além disso, o desagradável inconveniente de não poder resolver-se matemàticamente... Deixemo-lo pois entregue a outros cuidados.

*

* *

Muitos bons espíritos nos têm deixado, através da história do pensamento, diversas expressões definidoras da Matemática, sentenças brilhantes ou atraentes mas que, no melhor dos casos, fixam apenas uma face desta ciência.

Para Aristoteles, a Matemática é o estudo da quantidade, para Bacon ela é o estudo que torna os homens subtis, para Descartes a Matemática é a ciência da ordem e da medida, para Klein é a ciência das coisas evidentes, para Whitehead a Matemática é «o desenvolvimento de todos os tipos de raciocínio formal, necessário e dedutivo» ou, para Russell, «o assunto no qual nunca se sabe do que se está a falar, nem se o que se diz é verdadeiro».

«O que é a Matemática?» é o título sugestivo dum excelente livro de divulgação, que nos seus diferentes capítulos proporciona ao leitor um convívio ameno com alguns problemas básicos, conceitos e métodos matemáticos, clássicos e modernos.

Em guisa de resposta àquela pergunta excitante que encabeça o livro, os autores concluem o seu prefácio com a observação sibilina de que «apenas uma experiência activa com a matemática pode responder a tal questão.»

Há que reconhecer que esta observação é cheia de sabedoria.

Por outro lado, para sermos precisos, a questão «o que é a Matemática?» deverá situar-se històricamente. Como qualquer outra ciência, ou ramo de saber, ou produto de elaboração intelectual, a Matemática «vive», isto é, da sua fase rudimentar, larvar, incipiente, tem passado, através da história da civilização, por fases diversas, ora brilhantes ora apagadas, mas sempre «changeante», comportando a sua parcela de contingente, condicionada como toda obra de pensamento pelas circunstâncias históricas, crescendo, desenvolvendo-se, aperfeiçoando-se impulsionada quer por móbeis técnicos, pela pressão de questões oriundas de outras ciências — e entrelaçando-se não raro com elas — quer em busca de equilíbrio interior, de fundamentação sólida, criticando os seus princípios e métodos, de par com uma especulação de carácter filosófico.

Para ser preciso, portanto, essa questão deveria fraccionar-se: o que foi a matemática dos egípcios, dos babilónios, dos gregos, dos árabes, da renascença, etc.. O que é a Matemática de hoje? Quanto à Matemática do futuro apenas se poderá afirmar uma serena confiança no seu desenvolvimento e progresso, que não é senão a confiança na capacidade criadora do espírito do Homem, o qual continuará forjando os meios para uma compreensão mais profunda, ampla e precisa do mundo em que vive, uma mais eficaz intervenção e recreação desse mundo.

O carácter abstracto, formalista que as teorias modernas da Matemática apresentam em tão alto grau, não está em contradição com este papel ou com as razões motoras do seu desenvolvimento que esquemàticamente lhe estou atribuindo. É, a meu ver, ainda a preocupação de encontrar soluções justas para problemas formulados correctamente que leva o espírito à busca do rigor, à crítica dos fundamentos, à formulação precisa dos princípios, dos conceitos e das regras de construção.

Parece-me, contudo, não ser desprovida de interesse a análise de algumas daquelas definições lapidares a que me referi há pouco e seja-me permitido considerar dentre elas a referida «boutade» de RUSSELL, impregnada dum excelente humor inglês e extremamente feliz ao sintetizar uma das características essenciais da Matemática — a de uma teoria hipotético-dedutiva.

Vale a pena integrá-la no seu contexto e sondar-lhe o sentido profundo e exacto.

RUSSELL escreveu: «A Matemática pura consiste inteiramente em afirmações do género desta: se tal proposição é verdadeira àcerca de alguma coisa, então tal e tal proposição é verdadeira àcerca dessa coisa. É essencial não discutir se a primeira proposição é realmente verdadeira e não mencionar que coisa é aquela para a qual a proposição se supôs ser verdadeira... Se a nossa hipótese é àcerca de alguma coisa e não àcerca de uma ou mais coisas particulares, então as nossas deduções constituem Matemática. Assim — conclui RUSSELL — a Matemática pode ser definida como assunto no qual nunca se sabe àcerca de que se fala, nem se o que se está dizendo é verdadeiro.

Por mais chocante que possa ser tal afirmação para o senso comum, ela traça efectivamente o que há de mais característico na ciência Matemática, o segredo da sua universalidade e da sua eficiência como suporte de outras ciências, mas também a sua feição mais familiar a todos nós, incluindo aqueles para quem a Matemática está reduzida aos seus rudimentos.

Considere-se por exemplo a seguinte proposição: se um terreno tem 10 metros quadrados e vale 3 cruzeiros o metro quadrado, o terreno vale 30 cruzeiros. Ou esta outra: se cada laranja vale 3 cruzeiros, 10 laranjas valem 30 cruzeiros. Ou ainda: se um automóvel segue à velocidade de 3 quilómetros por minuto, ele percorre 30 quilómetros em 10 minutos.

Estas proposições referem-se a coisas particulares e não constituem pois Matemática pura. A proposição Matemática correspondente será: se adicionarmos 10 vezes 3 unidades obtemos 30 unidades, ou, abreviadamente, $10 \times 3 = 30$. E é manifesto que tanto podemos estar a falar de cruzeiros como de quilómetros.

A análise da segunda parte, quanto a saber «se o que se diz é verdadeiro», é um pouco mais subtil, embora à primeira vista pudesse interpretar-se como significando que o terreno pode valer ou não os 30 cruzeiros, sem que isso afecte a igualdade $10 \times 3 = 30$.

Um outro exemplo projectará nova luz sobre a asserção de RUSSELL: É bem conhecida a existência de geometrias não euclideanas que negam o célebre postulado das paralelas. KLEIN mostrou, nos fins do século passado, que o conteúdo duma tal geometria é tão aceitável quanto o da geometria euclideana. De resto é sabido que a teoria da Relatividade Generalizada adopta precisamente uma geometria não euclideana.

Então, qualquer proposição que resulte do postulado das paralelas, embora verdadeira na geometria euclideana, é falsa numa geometria não euclideana. Tudo depende, pois, de serem aceites, ou não, como verdadeiras as hipóteses de partida.

Estes exemplos elementares bastarão talvez para chamar a atenção sobre a natureza das proposições matemáticas. Por outro lado, surgem a seu respeito um certo número de questões.

Uma, é a de que a validade das afirmações matemáticas é condicionada; outra é a de saber, dentro desse condicionamento, qual o critério de verdade matemática.

Estas duas questões dizem evidentemente respeito a toda a teoria hipotético-dedutiva e logo voltaremos a elas. Mas há ainda uma terceira questão, quanto à interconexão da matemática com as ciências experimentais, o seu poder interpretativo do mundo físico, que tornam as teorias matemáticas um instrumento impulsionador do conhecimento dos fenómenos naturais e do seu controle.

Repare-se que històricamente as teorias matemáticas não aparecem geralmente como teorias lógico-dedutivas. Mas bem ao contrário, as suas origens são as mais das vezes de carácter empírico.

Assim a geometria parece ter surgido, como o seu nome indica, de problemas de mensuração de terras no velho Egipto. Também as origens do cálculo integral parece poderem situar-se na determinação, tratada por KEPLER, do volume de tonéis, sólidos limitados por superfícies curvas de geratrizes não rectilíneas, se não quisermos falar do método de exaustão de ARQUIMEDES, utilizado com finalidades análogas. E muitos outros exemplos seria fácil apontar.

Sòmente séculos após os primeiros estudos de geometria na civilização egípcia, aparece com EUCLIDES uma sistematização dos conhecimentos geométricos com carácter axiomático. Esta obra genial permaneceu como modelo de teoria dedutiva e exerceu uma vasta e profunda influência na elaboração moderna de outras teorias científicas, nomeadamente na axiomatização da Mecânica e certos ramos da Física.

No entanto a Análise, como a Aritmética, sòmente lograram uma sistematização axiomática no último quartel do século passado, quando DEDEKIND, WEIERSTRASS e outros conseguiram uma definição rigorosa do sistema de números reais. Ligada a ela, a axiomática de PEANO para os números naturais, a que se deverá acrescentar ainda o axioma de ZERMELO, pode constituir uma base axiomática de toda a Análise, e evidentemente também da Aritmética. Por essa época a Análise havia já atingido pràticamente as suas gigantescas proporções actuais.

São estes, dois exemplos bem sugestivos

A Gazeta de Matemática saúda os Leitores e Amigos, desejando-lhes Boas Festas e Novo Ano próspero e de Paz; formula ardentes votos pelo ressurgimento científico de Portugal.

duma situação que me vejo tentado a descrever da seguinte forma: não são as regras lógicas que promovem o desenvolvimento da Matemática: *são os seus problemas*. Esses problemas podem surgir internamente, duma discussão dos fundamentos lógicos, ou externamente por solicitação e sugestão das ciências experimentais.

Esta parece ser também a posição assumida, relativamente à natureza da Matemática, pelo notável cientista VON NEUMANN, recentemente falecido — quando escreve sintèticamente: «Existe uma duplicidade inteiramente peculiar à natureza da Matemática. Tem-se de conceber esta duplicidade, aceitá-la e assimilá-la ao próprio pensamento sobre a assunto. Esta dupla face é a face da Matemática e não creio que qualquer visão unitária, simplificada da coisa seja possível sem sacrificar a sua essência».

Esta posição não coincide com a de RUSSEL e outros logicistas, para quem a Matemática se reduziria a uma parte da lógica.

O grande matemático DENJOY, que recebemos na Universidade do Recife em 1954, sublinha, igualmente, numa bela frase, aquela duplicidade: «O racional, em Matemática como em outras partes — escreve ele em «L'innéité du transfini» — retempera-se periòdicamente no empírico para adquirir forças que não poderia encontrar em si mesmo».

Voltemos, porém, às duas primeiras questões suscitadas hà pouco, relativas a uma teoria hipotéctico-dedutiva. Já dissemos que a primeira teoria matemática com esta feição é a geometria de EUCLIDES. Mas há a notar que os *Elementos* de EUCLIDES não constituem uma solução satisfatória do problema de axiomatizar a Geometria.

Por um lado, as definições mais importantes são meras descrições apoiadas na intuição. Por outro, muitos axiomas não foram explìcitamente formulados. O trabalho de pesquisa duma axiomatização completa da Geometria, que se foi processando através dos tempos, recebeu um impulso vigoroso com a criação duma Geometria não euclediana, quase simultâneamente pelo húngaro BOLYAI e pelo russo LOBATSCHEWSKI, por volta de 1830. Cinquenta anos mais tarde PASCH «isolou» (para usar um termo expressivo da Bioquímica) os axiomas da ordem, até então renitentemente dissimulados. Finalmente, no fim do século XIX, HILBERT conseguiu dar forma definitiva — isto é, conforme as exigências da correcção lógica da nossa época — à axiomatização da geometria euclideana. Os seus «*Grundlagen der Geometrie*» são hoje um livro clássico nesta matéria, encontrando-se até traduzidos em língua portuguesa.

Em que consiste, então, a axiomatização duma teoria científica? Consiste em fixar um número limitado de conceitos ditos *primitivos* e de proposições básicas dessa teoria que serão chamadas *axiomas*, de modo que a estrutura dessa teoria esteja totalmente definida, quer dizer, todos os novos conceitos e proposições se possam obter por definição e por dedução lógica, respectivamente, a partir dos conceitos primitivos e dos axiomas.

«Tal é, pois, toda a arte de convencer — dizia PASCAL, no seu discurso «De l'esprit scientifique» — Ela está contida em dois princípios: definir todas as notações empregadas e provar cada coisa por substituição mental dos termos definidos pelas suas definições».

Um sistema de axiomas deve ser *consistente* ou *não-contraditório*, isto é, dele não deve ser possível inferir uma proposição e a sua negação.

Uma outra qualidade de um sistema de axiomas é a sua *independência*, que não é contudo um atributo indispensável à axiomatização duma teoria.

A questão da independência dos axiomas tem uma projecção histórica considerável, no caso da geometria euclideana. Já na antiguidade, o axioma das paralelas se não oferecia como intuitivamente evidente, o que se pode atribuir — segundo VON NEUMANN — ao facto dessa percepção intuitiva envolver de algum modo o conceito de contínuo e portanto de infinidade.

Numerosas foram as tentativas através dos séculos para o estabelecer como teorema, isto é, como consequência lógica dos restantes axiomas.

Os construtores duma geometria não euclideana puseram fim a essa questão, mostrando a independência do axioma das paralelas relativamente aos restantes, uma vez que a sua negação é consistente com eles.

A validade duma teoria dedutiva reduz-se pois à consistência dos seus axiomas. A verdade de uma proposição, numa teoria dedutiva, reduz-se à sua não contradição com as proposições deduzidas dos axiomas ou, em última análise, com os próprios axiomas.

Tal é o critério da verdade matemática.

Na realidade, o critério de verdade nas outras ciências não se afasta essencialmente dele. Se não é a não contradição lógica que intervem é, alternativamente, a não contradição entre a conceituação teórica dos fenómenos e a sua percepção experimental.

Haveria que falar ainda da *categoricidade* ou *completude* dos sistemas de axiomas. Mas creio ser agora mais atraente encarar esse assunto dum outro ponto de vista e em termos um tanto diferentes.

(Conclue no próximo número)

O ensaio χ^2 e os ensaios de concordância

por J. Tiago de Oliveira

1. Introdução. O nosso objectivo, neste artigo meramente expositório, é o de chamar a atenção para um comportamento bastante vulgarizado nas aplicações práticas da Estatística e pouco fundamentado: o uso da estatística χ^2 como indicador do ajustamento de distribuições de variáveis aleatórias (absolutamente) contínuas. Para isso começamos por expor o uso da estatística χ^2 para populações discretas.

2. A estatística χ^2 em populações discretas. O caso mais simples de aplicação da estatística χ^2 é o seguinte: as observações de uma dada população discreta podem classificar-se numa e numa só de k categorias $C_1, C_2, \cdots, C_k$ supondo-se as probabilidades de tal classificação, respectivamente, $p_1, p_2, \cdots, p_k$ $\left(\sum p_i = 1\right)$. Uma amostra de n observações revelou n_1 elementos da classe C_1, n_2 de $C_2, \cdots, n_k$ de $C_k \left(\sum n_i = n\right)$.

Pretende-se verificar se a amostra observada é compatível com a hipótese posta, a um nível de significância α, isto é, comportando o risco de se concluir erradamente que tal hipótese é falsa em $100\,\alpha\,\%$ das vezes, num grande número de provas.

O ensaio baseia-se na seguinte proposição: a distribuição assintótica da quantidade $Q^2 = \sum \frac{(n_i - n p_i)^2}{n p_i}$ é a distribuição de um χ^2 com $k-1$ graus de liberdade. Se n for suficientemente grande (os $n p_i \geq 5$) o resultado assintótico é usado como sendo efectivamente válido para o Q^2 calculado e rejeita-se a hipótese se $Q^2 > \chi^2(\alpha, k-1)$ em que $\chi^2(\alpha, k-1)$ é o ponto α do χ^2 para $k-1$ graus de liberdade.

Esta é a regra normal de uso da estatística χ^2 nestes problemas. De facto, porém, se algumas das quantidades $n p_i$ não são superiores a 5, fundem-se uma ou mais categorias obtendo-se então as categorias $C'_1, \cdots, C'_l$ com probabilidades $p'_1, \cdots, p'_l$ sendo os números observados $n'_1, \cdots, n'_l$ em que os p' e os n' são obtidos por soma dos p e dos n correspondentes. Note-se porém que, de facto, se está agora a ensaiar a nova hipótese $p'_1, \cdots, p'_l$ relativa a $C'_1, \cdots, C'_l$ e não a posta inicialmente. Todavia se houver um número nulo de observações em dada classe há, ainda, algumas modificações a fazer. Não entramos em tais detalhes que não interessam ao problema que queremos referir.

Podem ser dados exemplos de aplicação deste ensaio nos mais diversos domínios de Ciência e da Técnica desde a Engenharia à Genética, desde a Medicina à Psicologia.

De facto, vamos tratar apenas um exemplo genérico ligado à velha teoria dos jogos. Seja um conjunto de 3 baralhos iguais de cartas. Como cada baralho de cartas tem 52 cartas, eliminemos 56 cartas, ao acaso, de modo a ficar um total de 100. Pretende-se agora verificar se as probabilidades dos diversos naipes são iguais, isto é, se $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = \frac{1}{4}$. Extraiem-se, com reposição, das 100 cartas $n = 32$ $\left(np_i = 32 \cdot \frac{1}{4} = 8 > 5\right)$ obtendo-se, por exemplo, $n_1 = 10$, $n_2 = 12$, $n_3 = 6$, $n_4 = 4$. Que conclusões se podem tirar?

De facto, tem-se $Q^2 = \sum \frac{(n_i - n\,p_i)^2}{n\,p_i} = \frac{(10-8)^2}{8} + \frac{(12-8)^2}{8} + \frac{(6-8)^2}{8} + \frac{(4-8)^2}{8} = \frac{4+16+4+16}{8} = \frac{40}{8} = 5$. Como o χ^2, relativo a $k-1 = 4-1 = 3$ graus de liberdade e para o nível de significância de 5 % (95 % de decisões certas de aceitação se a hipótese fôr verdadeira), é $\chi^2(5\%, 3) = 7{,}815 > 5$, conclui a aceitação da hipótese. A descrição completa do ensaio χ^2 pode ser vista em [4].

3. As populações contínuas. Consideremos, agora, o problema análogo para uma população contínua. Ele enunciar-se-á assim: observou-se a amostra $x_1, \cdots, x_n$ e pretende-se saber se, com base na amostra observada, se deve aceitar ou rejeitar a hipótese de que a função de distribuição é $F(x)$. Para a fixação de êrros de 1.ª e 2.ª categorias, da teoria de NEYMAN-PEARSON será, como se sabe, necessário fixar o conjunto de alternativas possíveis. O problema é complexo e incompletamente estudado. Apenas se costuma fixar o êrro de 1.ª categoria α, isto é, fixar percentagem de rejeição incorrecta de hipótese quando ela é verdadeira.

Uma primeira ideia é a de aplicar o ensaio χ^2 nos termos seguintes: divide-se a recta real por $k-1$ pontos $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{k-1}$ de modo a obter k intervalos $I_1, I_2, \cdots, I_k$ de probabilidades $p_j = F(\alpha_j) - F(\alpha_{j-1})$, em que se tomou, por comodidade de notação, $\alpha_0 = -\infty$ e $\alpha_k = +\infty$. Sugere-se imediatamente a questão de qual deve ser a decomposição a efectuar. Se tivessemos considerado um só intervalo, seria

$$\chi^2 = \frac{(n-n)^2}{n} = 0, \quad \text{pois é} \quad I_1 = (-\infty, +\infty)$$

$p_1 = 1$, $n_1 = n$ e para uma tal partição da recta real *qualquer hipótese seria aceitável.* De facto, porém, ninguém faria uma escolha tão desacertada.

Encontram-se, fàcilmente, exemplos de casos em que *os mesmos dados* interpretados mediante duas partições diferentes, sem sequer se ir para este caso extremo, dão lugar a conclusões diferentes.

Consideremos, para exemplo, o seguinte problema: pretende-se ensaiar a hipótese de que uma variável aleatória contínua tem uma distribuição uniforme no intervalo [0,5] de densidade 1/5, a partir de uma dada amostra de, por exemplo, 50 observações. Suponhamos que o número de observações caídas no intervalo [0,1] é $n_1 = 10$, no intervalo (1,2] é $n_2 = 10$,

$(2,3]$ é $n_3=20$, $(3,4]$ é $n_4=5$, $(4,5]$ é $n_5=5$ e consideremos as 2 partições seguintes: $[0,2)$ $[2,5]$ e $[0,3)$ $[3,5]$. No primeiro caso é

$$Q^2=\frac{\left(20-50\cdot\frac{2}{5}\right)^2}{50\cdot\frac{2}{5}}+\frac{\left(30-50\cdot\frac{3}{5}\right)^2}{50\cdot\frac{3}{5}}=0$$

no segundo caso é $Q^2=\dfrac{\left(40-52\cdot\frac{3}{5}\right)^2}{50\cdot\frac{2}{5}}+$

$$+\frac{\left(10-50\cdot\frac{2}{5}\right)^2}{50\cdot\frac{2}{5}}=\frac{25}{3}=8{,}3\cdots,$$ devendo no 2.º caso ser rejeitada a hipótese mesmo para o nível de significância de 1 °/₀ pois $\chi^2(1\,°/_0,1)=6{,}635$ e no 1.º caso ser aceite.

Pode pôr-se, então, o problema de se não será possível obter uma partição óptima de recta real. De facto, tal partição existe e foi estudada em [7] para certos casos.

Podia, porém, procurar-se obter uma modificação, especialmente adaptada ao caso contínuo, da estatística χ^2. Em primeiro lugar, uma sugestão: decompor a recta real em grande número de intervalos I_j com probabilidades p_j levando cada decomposição a um

$$Q^2=\sum\frac{(n_i-n\,p_i)^2}{n\,p_i}$$

cujo limite, quando o diâmetro dos intervalos tendesse para zero, se procuraria.

Ora é fácil ver que tal limite é infinito. De facto, podemos, desde início, considerar uma partição tal que cada intervalo contenha apenas uma observação, pois elas podem sempre supor-se diferentes. Se tal não suceder, a modificação do raciocínio que segue é óbvia. Os intervalos I_j que não contêm observações contribuem com $\dfrac{(-n\,p_i)^2}{n\,p_i}=n\,p_i$ para o Q^2, enquanto que os outros intervalos contribuem com $\dfrac{(1-n\,p_t)^2}{n\,p_t}$. O Q^2 será então

$$\begin{aligned}Q^2&=\sum_{i\neq t}n\,p_i+\sum_t\frac{(1-n\,p_t)^2}{n\,p_t}=n\left(1-\sum p_t\right)\\&\quad+\sum_t\frac{(1-n\,p_t)^2}{n\,p_t}\\&=n+\sum_t\left[\frac{(1-n\,p_t)^2}{n\,p_t}-n\,p_t\right]=\\&=n+\sum_t\frac{1-2n\,p_t}{n\,p_t}=\frac{1}{n}\sum\frac{1}{p_t}-n\,.\end{aligned}$$

Quando o diâmetro da partição tende para zero, $p_t\to 0$, e portanto o Q^2 cresce além de todo o limite.

De resto, tal resultado era de esperar, pois, de facto, se decompusermos o intervalo I de probabilidade p e de número de observações m, em dois intervalos I' e I'' de probabilidades p' e p'' e de número de observações m' e m'', tem-se

$$\frac{(m'-n\,p')^2}{n\,p'}+\frac{(m''-n\,p'')^2}{n\,p''}>\frac{(m-n\,p)^2}{n\,p}$$

sendo $p=p'+p''$ e $m=m'+m''$.

Tal observação sugere-nos então procurar aquela partição menos fina que contém todas as observações, isto é, efectuar a partição dada pelas próprias observações. É fácil de ver que o Q^2 relativo a tal partição tem valor médio infinito. (De resto, repare-se que já tinhamos abandonado a restrição de ser $n\,p>5$).

4. A estatística de discrepância. Resumindo os resultados anteriores, pode dizer-se que a estatística χ^2 não pode ser aplicada ao caso contínuo, nem as suas modificações mais naturais. Deve, porém, observar-se que já tinha sido introduzida, uma estatística de discrepância por K. von-Mises e H. Cramer definida por $\sum_j\left(F(x_j)-\dfrac{2j-1}{2n}\right)^2$, cuja distribuição assintótica fora estudada em [6].

E. J. GUMBEL em [2], porém, propôs, tendo em vista certas aplicações a problemas concretos de Engenharia, o uso de estatística, $\sum\left(F(x_j)-\frac{j}{n+1}\right)^2$ em que x_j, como acima, representa a j^a observação contada a partir da mais pequena (x_1 será, pois, a menor observação e x_n a maior).

Era evidentemente de supor que tal estatística tivesse uma distribuição análoga à obtida por N. SMIRNOV para a estatística de R. VON-MISES e H. CRAMER. De facto, provou-se em [5] que

$$(n+1)\sum\left(F(x_j)-\frac{j}{n+1}\right)^2$$

tem a distribuição assintótica que N. SMIRNOV tinha determinado já para

$$n\sum\left(F(x_j)-\frac{2j-1}{2n}\right)^2$$

tabelada em [1].

Pode então formular-se a seguinte regra de comportamento:

Calcula-se a quantidade

$$(n+1)\sum\left(F(x_j)-\frac{j}{n+1}\right)^2$$

e aceita-se ou rejeita-se a hipótese $F(x)$ consoante tal quantidade é inferior ou superior a s_α, em que s_α é o ponto da distribuição de SMIRNOV correspondente ao nível de significância α.

REFERÊNCIAS

[1] T. W. ANDERSON and D. A. DARLING, *Asymptotic theory of certain goodness of fit criteria based on stochastic processes*. Ann. Math. Stat., 23, 1952.

[2] E. J. GUMBEL, *Simple tests for a given hypotheses*, Biom., 32, 1942.

[3] E. J. GUMBEL, *On the reliability of the classical chi square test*, Ann. Math. Stat., 14, 1943.

[4] A. M. MOOD, *An introduction to the theory of statistics.*, Mc. Graw Hill Books Company, 1950.

[5] J. TIAGO DE OLIVEIRA, *Distribution-free tests of goodness of fitting for distribution functions*, Rev. Fac. Ciênc. Lisboa, A, V, 10, 1955.

[6] N. SMIRNOV, *Sur la distribution de* ω^2, Comptes Rendus, 202, 1936.

[7] A. WALD e W. MANN, *On the choice of the number of class intervals in the application of the chi square test.*, Ann. Math. Stat., 12, 1942.

A criação de um satélite artificial da Terra

por J. Gaspar Teixeira

No início da Era Astronáutica (1), sentimo-nos no dever de apresentar aos Leitores da Gazeta de Matemática uma exposição elementar e esquemática dos problemas de ordem matemática — essencialmente de mecânica racional — sobre os quais se fundamentam as realizações recentemente efectuadas no campo da Astronáutica. A exposição, sob a forma de artigos a publicar, constitue uma dupla homenagem:

a) de saudação aos estudantes portugueses que terão o seu futuro profissional profundamente influenciado pelos problemas consequentes,

b) de reconhecimento aos cientistas e técnicos que levaram a efeito as realizações que marcam o início da referida Era.

No presente artigo, estabelece-se a equação geral do movimento dum foguetão-propulsor considerado sob a forma mais esquemática e a trajectória mais económica em

(1) Cf. *Sciences et Avenir* — n.º 129, Nov. 1957, pág. 577.

casos particulares simples; é redigido apenas na base dos conhecimentos adquiridos em vulgar tratado de mecânica racional [1].

A G. M. procurará obter de especialistas competentes ou artigos ou elementos que lhe permitam desenvolver ou esclarecer qualquer pormenor interessante do presente artigo e continuá-lo no sentido de completar a exposição elementar atrás referida.

Como se sabe, a criação de um satélite é possível mediante dois processos diferentes:

1) por um processo natural
2) por um processo artificial.

Sobre o «nascimento» da Lua a partir da Terra (particularizemos o caso) existem algumas teorias baseadas em factos de natureza geológica que podem ser confirmadas pela mecânica dos corpos fluidos e plásticos [2].

Interessa-nos aqui considerar o segundo processo — o artificial.

Qualquer corpo S que gravite [3] como satélite em torno de outro T, tem, em relação a T um movimento bem determinado que em mecânica racional, tem o nome de *movimento central*. No seu caso mais geral este movimento é traduzido analìticamente pela equação diferencial conhecida pela *fórmula de* BINET:

$$a = -\frac{c^2}{r^2}\left[\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r}\right]$$

— a é a aceleração [4] (escalar) de $S(r, \theta)$ em relação a T, colocado na origem dum referencial polar.

(1) Cf. p. ex. LOUIS ROY — *Cours de Mécanique Rationnelle* — Gauthier-Villars, Paris.

(2) Encontra-se uma descrição elementar de tais teorias no admirável livro de divulgação de GEORGE GAMOW — *Biografia da Terra*, Espasa — Calpe, Argentina.

(3) Admite-se em tudo o que vai seguir-se que são nulas as acções de outros corpos sobre S.

(4) Como se sabe, no movimento central só há componente radial da aceleração.

A primeira conclusão a tirar da fórmula de BINET é que o movimento central é de natureza cinemática, isto é, nele não intervem a noção de massa. Admitamos, por exemplo, que uma catástrofe universal aniquilava o planeta Marte; o homem poderá criar um «herdeiro» deste planeta, fazendo por exemplo, com que um grão de chumbo o substitua no movimento ao longo da sua trajectória: apenas é necessário, para isso, que durante um pequeno intervalo de tempo a posição e a velocidade do grão de chumbo coincida com a posição e a velocidade que Marte teria se não tivesse sido destruido. Outro aspecto da natureza cinemática do movimento central: todos os corpos existentes à superfície da Terra acompanham esta no seu movimento em torno do Sol — têm a mesma trajectória. Admitindo então que seria possível anular a força da gravidade, os corpos terrestres não se afastariam da Terra a não ser que sobre eles actuassem outras forças estranhas. Tudo isto é a aplicação do elementar *princípio da inércia*.

É esta a razão por que um compartimento estanque que contenha no seu interior um ser vivo e que acompanhe um satélite artificial na sua órbita, continuará «colado» no movimento ao próprio satélite mesmo que em determinado instante dele se separe fìsicamente. Para reaver o ser vivo será necessário provocar uma «saída» do compartimento da órbita do satélite, como inicialmente foi provocada uma «saída» do satélite da órbita da Terra.

A dificuldade da integração da fórmula de BINET — e é essa integração que determina explìcitamente a trajectória e, em cada instante, a velocidade de S como função do tempo — depende apenas do tipo da função que traduz a atracção entre S e T.

No caso porém da gravitação — e é apenas esse que se verifica em toda a mecânica celeste, particularmente no caso dos satélites

— a atracção entre S e T é de natureza newtoneana [1] e a fórmula de Binet conduz naturalmente ao estabelecimento das conhecidas três leis de Kepler [2]:

1) S *descreve uma elipse de que* T *ocupa um dos focos,*

2) *As áreas varridas pelo raio vector de* S *são proporcionais aos intervalos de tempo gastos em varrê-las,*

3) *Os quadrados dos tempos das revoluções são proporcionais aos cubos dos eixos maiores das órbitas.*

Inversamente, toda a elipse com um foco no centro de gravidade da Terra é uma *órbita admissível,* isto é, pode vir a ser órbita de um satélite da Terra – simplesmente, a velocidade em cada ponto da trajectória é univocamente determinada em função do tempo e independente da massa do satélite.

Recordadas estas considerações bem vulgares e conhecidas, observemos que o problema da criação de um satélite artificial da Terra [3] comporta, no seu aspecto matemático e no seu esquema geral, duas fases:

1) Determinação da trajectória que o satélite vai descrever no seu movimento central;

(1) Directamente proporcional às massas de S e T e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre os dois corpos.

(2) Consulte-se por exemplo: *E. Borel — La Mécanique et la Gravitation Universelle,* Albin Michel, Paris.

(3) Supomos que o problema da trajectória do satélite artificial é mais complexo, na realidade. Não se trata simplesmente da determinação da trajectória dum astro que gira em torno de outro mas sim do estudo da trajectória dum bólido que gira em volta da Terra sujeito também à acção do campo magnético terrestre (F. L. M.).

2) Transporte do satélite desde a superfície da Terra até um ponto da sua trajectória e, uma vez atingido tal ponto, lançamento do satélite na órbita.

Ora, a solução do problema relativo à fase 1) — de natureza exclusivamente cinemática, como se disse — obedece apenas a condições relacionadas com o objectivo a atingir.

Concretamente, os instrumentos de telemedida instalados no primeiro satélite artificial da Terra, deveriam estar ao descrever a órbita prevista, em boas condições para obter resultados precisos de observações do espaço cósmico e das camadas superiores da alta atmosfera integradas no programa das actividades soviéticas do Ano Geofísico Internacional [1].

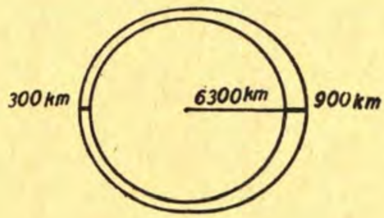


Fig. 1

Foi então escolhida para órbita teórica desse satélite uma circunferência com centro no centro de gravidade da Terra e raio cerca de 6.900 km.

(1) O lançamento do satélite permite obter conclusões de dois tipos diferentes:

a) do estudo preciso da trajectória descrita obtêm-se indicações sobre o atrito e portanto densidade das partículas de ar muito rarefeito a tão grande altura; saber a repartição das massas no geóide (com precisão dez vezes superior à obtida pelos clássicos métodos da geodésia); sobre a forma do mesmo geóide, etc.

b) os instrumentos instalados a bordo fornecem indicação sobre o radiamento solar (particularmente raios X e ultra-violeta) e sua influência sobre a ionosfera; a absorpção dos raios ultra-violetas pelas altas camadas da atmosfera; o radiamento cósmico fora da acção do campo magnético terrestre; a ionosfera; a densidade das poeiras interplanetárias e sua acção de atrito sobre a superfície do satélite, etc.

O *Observatório Astronómico Mullard Rádio de Cambridge* obteve por medições efectuadas no período 6-20 de Outubro (1) as seguintes características da órbita:

Inclinação da órbita	$64^\circ\ 40' \pm 10'$
periodo entre passagens sucessivas pela latitude $52^\circ\ 12'$ N	$5750{,}0 \pm 0{,}3$ seg. sol
decrescimento médio do período	$2{,}2 \pm 0{,}1$ seg/dia
semi-eixo maior	6937 km.
excentricidade	$0{,}053 \pm 0{,}001$
altura sobre o raio médio da Terra no perigeu	197 ± 10 km.
altura sobre o raio médio da Terra no apogeu	934 ± 10 km.

Quer dizer, os cientistas e técnicos encarregados do lançamento conseguiram assim realizar a órbita teórica com um êrro de cerca de $1\,^0/_0$, fig. 1 (2).

Em oposição, o problema do transporte do satélite até a sua órbita e do respectivo lançamento é de natureza essencialmente dinâmica pois envolve dispêndio de energia.

Nestes termos, duas questões se levantam: uma de natureza técnica — escolha do veículo e, consequentemente, do processo de libertação, no mesmo veículo, de altas quantidades de energia necessárias para o transporte e lançamento; outra questão, de natureza matemática — balística e cálculo das variações — determinação da trajectória de transporte correspondente ao mínimo consumo de energia.

Os técnicos (3) indicam o foguetão como o único veículo capaz de, presentemente, realizar tal função. Nos foguetões, até há pouco utilizados, ensaiaram-se diversos tipos de combustíveis e comburentes líquidos: nas bombas V_2 utilizava-se respectivamente álcool metílico e oxigénio líquidos, mas conhecem-se outras combinações como metanol e oxigénio líquido ou ainda hidrogénio e fluorina líquidos, se bem que o produto desta combustão seja tão corrosivo que até há pouco não se encontrava viabilidade da sua utilização.

(1) Cf. *Nature*, vol. 180 N. 4592, pg. 881.

(2) Declaração de G. A. Chebotarev.

(3) Cf. A. Sternfeld — *O Voo no espaço cósmico*, pg. 81.

Equação geral do movimento dum foguetão propulsor

Ora, como se sabe, um foguetão é um projectil auto-propulsionado segundo o princípio estabelecido pelo teorema da quantidade de movimento relativo ao escoamento de um fluido (1):

Em cada instante, é equivalente a zero o seguinte sistema dos vectores aplicados ao volume τ *dum fluido contido numa superficie* σ:

resultante das forças de massa relativas a cada partícula do fluido,
resultante das forças de inércia das mesmas partículas,
resultante das pressões sobre σ *exercidas do exterior de* τ, *e*
resultante da quantidade de movimento por unidade de tempo, relativa ao caudal do fluido através de σ.

Consideremos então um projectil cilindro-ogival, terminado por uma câmara de combustão que se prolonga por uma conduta difusora D; o gaz, produto da combustão em C escoa-se ao longo de D (fig. 2).

Vamos admitir que o escoamento se faz em regime permanente e uniforme.

Sejam m e $m+dm$ a massa do foguetão nos instantes t e $t+dt$. Assim, $-dm$ é a massa do gás expelido, isto é, dos produtos da combustão, no intervalo de tempo considerado; ou ainda a massa que no intervalo dt sai da câmara de combustão, entra no

(1) Cf. p. ex. G. de Marchi — *Idraulica*, pág. 64 — Ulrico Hoepli — Milão.

tubo de escape e nele ocupa um volume elementar $d\tau_x$,

$$-dm = \rho(x)\,d\tau_x = \rho(x)\,S(x)\,dx\,,$$

deslocando-se em relação às suas paredes com velocidade $\mathbf{v}(x)$, dirigida segundo o eixo da conduta de escape.

A massa total contida no tubo de escape é

$$\int_0^l \rho(x)\,S(x)\,dx = \int_0^l -dm\,.$$

Apliquemos o teorema anterior ao fluido contido no volume $d\tau_x$:

foguetão. Se representarmos por $d\mathsf{G}$ e $d\mathsf{P}$ respectivamente a resultante das forças de massa e das pressões exercidas sobre a superfície elementar que limita $d\tau_x$, temos

$$d\mathsf{G} + d\mathsf{P} + dm\boldsymbol{\gamma} - dm\frac{d\mathbf{v}}{dt} = 0\,.$$

Considerando agora todo o gaz contido no tubo de escape, temos

$$1)\quad \mathsf{G} + \mathsf{P} + \int_0^l dm\boldsymbol{\gamma} + \int_0^l -dm\frac{d\mathbf{v}}{dt} = 0\,.$$

Ora os dois termos G e P equilibram, em

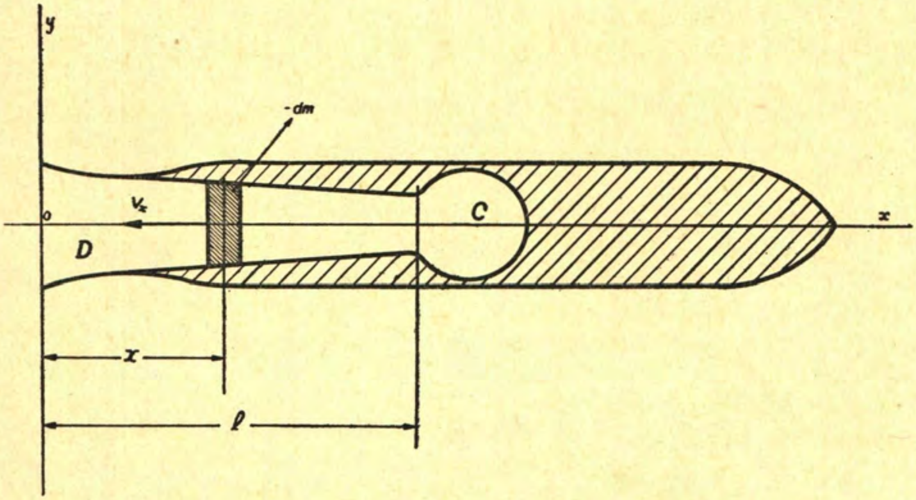


Fig. 2

cada instante, a força de inércia do foguetão e a resultante das forças exteriores (peso, resistência do ar, etc.):

$$\mathsf{G} + \mathsf{P} - m\boldsymbol{\gamma} + \mathsf{F}_e = 0\,,$$

de modo que a equação 1) toma a forma:

$$2)\qquad \left[m + \int_0^l dm\right]\boldsymbol{\gamma} + \int_0^l -dm\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathsf{F}_e$$

em que F_e é a resultante das forças exteriores.

A resultante da quantidade de movimento por unidade de tempo é

$$\frac{1}{dt}\rho S[\mathbf{v}(x+dx) - \mathbf{v}(x)]\,dx = \frac{d\mathbf{v}}{dt}\rho S\,dx = -dm\frac{d\mathbf{v}}{dt};$$

a resultante das forças de inércia

$$-\rho S\,dx\,\boldsymbol{\gamma} = dm\,\boldsymbol{\gamma}$$

em que $\boldsymbol{\gamma}$ é a aceleração do centro de gravidade do sistema constituido por todo o

Esta é a equação geral do movimento dum foguetão-propulsor, estabelecida nas condições de aproximação atrás citadas.

Não conhecemos ainda qual o grau de precisão teórica e quais os métodos de integração da equação anterior utilizados nas últimas realizações. Vamos, no entanto, seguindo a reduzida bibliografia de que dispomos, considerar alguns casos simples e fazer o respectivo estudo.

Comecemos por observar que a massa $\int_0^l -dm$ do gaz contido na conduta de escape é desprezável em relação à massa restante m do foguetão. Por outro lado, verifica-se que esse mesmo gás

— em C está a pressão muito alta e tem velocidade pràticamente nula

— em O tem pressão pràticamente nula (atmosférica) e velocidade V muito elevada (fig. 2).

Nestes termos é, apròximadamente

$$\int_0^l dm \frac{d\mathrm{v}}{dt} = \frac{dm}{dt} \mathsf{V}$$

e a equação 2) torna a forma muito simples

$$m\gamma = -\mathsf{V}\frac{dm}{dt} + \mathsf{F}_e .$$

«A relação entre a massa expulsa em cada explosão e a massa restante é muito importante, quanto ao dispêndio de combustível e comburente» (1).

Ora, considerando na equação anterior $\mathsf{F}_e = 0$, isto é, desprezando a gravidade e a resistência do ar, temos

$$m\frac{d\mathrm{v}}{dt} = -\mathsf{V}\frac{dm}{dt}$$

e

$$v_1 - v_0 = \mathsf{V} \log \frac{m_0}{m_1}$$

ou

$$m_1 = m_0 e^{-\frac{\Delta v}{\mathsf{V}}},$$

expressão que nos dá a massa do foguetão num instante t_1 em que ele adquire o acréscimo de velocidade Δv.

Assim, para provocar um acréscimo de velocidade igual à velocidade de escape V é necessário consumir 63 % da massa inicial

$$\Delta m = m_0 - m_1 = m_0 \frac{e-1}{e};$$

e para obter $\Delta v = 2\mathsf{V}$ utilizar-se-á 86,5 % da massa inicial. Compreende-se por outro lado, que o pêso da estrutura passiva não possa ser reduzido além de certo limite sem comprometer as condições de resistência e estabilidade da mesma estrutura.

Por esta razão, os técnicos indicam que com um *foguetão simples* não se deve ultrapassar o acréscimo $\Delta v = \log 6 . \mathsf{V}$

Para atingir velocidades mais elevadas é necessário recorrer a um *foguetão composto* que se vai desembaraçando sucessivamente das massas dos depósitos-reservatórios dos combustível e comburente, à medida que aqueles se vão esvaziando (1).

Determinação da trajectória mais económica (2)

Consideremos o caso de um foguetão que, durante determinado intervalo de tempo (o, T), deverá deslocar-se desde $O(o,o)$ até $P(a,b)$, fig. 3, com velocidades inicial e final respectivamente (3)

---

(1) Cf. A. Sternfeld — op. cit. pág. 59.

(1) Cf. A. Sternfeld — op. cit. pág. 61.

(2) Cf. D. F. Lawden — *The Mathematical Gazette*, Vol XLI, N.º 337, pág. 172, donde extraímos o resumo que segue.

(3) É fácil provar que, no caso implícito na equação 4), o movimento é plano.

$$
3)\quad \left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0} = u_0 \qquad \left(\frac{dy}{dt}\right)_{t=0} = v_0 \qquad \left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=T} = u_T \qquad \left(\frac{dy}{dt}\right)_{t=T} = v_T
$$

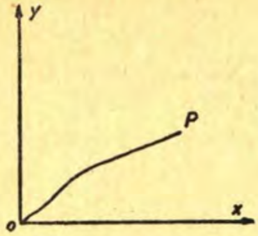


Fig. 3

Admitamos ainda que o movimento é regido pela equação

$$
4)\qquad m\gamma = -\mathrm{V}\frac{dm}{dt}
$$

isto é, que se desprezam os efeitos da gravidade e da resistência do ar.

A equação 4) conduz ao sistema

$$
m\ddot{x} = -\mathrm{V}\cos\alpha\frac{dm}{dt} \qquad m\ddot{y} = -\mathrm{V}\,\mathrm{sen}\,\frac{dm}{dt}
$$

donde

$$
m\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2} = -\mathrm{V}\frac{dm}{dt}
$$

e

$$
\mathrm{V}\log\frac{m_0}{m_P} = \int_0^T \sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2}\,dt.
$$

Ora, como atrás se disse, o dispêndio de combustível e comburente pode exprimir-se por meio da relação m_0/m_P.

Interessa-nos, portanto, calcular uma trajectória de O a P, sujeita às condições 3), para a qual a razão anterior seja mínima, ou seja, ao longo da qual o integral

$$
5)\qquad I = \int_0^T \sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2}\,dt
$$

seja mínimo.

As equações de Euler para este caso tomam a forma (1)

$$
\frac{d^2}{dt^2}\left\{\frac{\ddot{x}}{\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2}}\right\} = \frac{d^2}{dt^2}\left\{\frac{\ddot{y}}{\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2}}\right\} = 0
$$

(1) Cf. E. Goursat — *Cours d'Analyse Mathématique*, Tome III, pág. 629.

donde

$$
\frac{d^2}{dt^2}(\cos\alpha) = \frac{d^2}{dt^2}(\mathrm{sen}\,\alpha) = 0
$$

e

$$
\cos\alpha = At+B \qquad \mathrm{sen}\,\alpha = Ct+D
$$

Daqui resulta, necessàriamente,

$$
A = C = 0 \qquad B^2+D^2 = 1
$$

e $\alpha = \text{const.}$ — o foguetão deve manter uma trajectória rectilínea.

«É fácil mostrar que estes resultados não conduzem à solução correcta do problema. Se o lançamento é feito por forma a garantir a prevista variação de velocidade no intervalo $(o,\ T)$, a trajectória não é, em geral, respeitada; se, pelo contrário, o lançamento é feito por forma a realizar a trajectória prevista, a variação de velocidade não é cumprida» (1).

Teremos que modificar, portanto, o tipo de cálculo, admitindo que a solução do problema possa comportar pontos de descontinuidade para as componentes da velocidade, isto é, que o foguetão pode estar sujeito a impulsões.

Estudemos em que condições o integral 5) toma um valor mínimo no plano $p = \dot{x}$, $q = \dot{y}$, isto é, num plano em que, como se verá, as descontinuidades atrás referidas não introduzem descontinuidade da trajectória do ponto figurativo do movimento.

$$
I = \int_0^T \sqrt{\left(\frac{dp}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dq}{dt}\right)^2}\,dt
$$

representa o comprimento do arco da curva $\widehat{AB}$. Pretende-se então determinar o menor arco que liga A a B, sob a condição de

$$
\int_0^T p\,dt = a \qquad \int_0^T q\,dt = b
$$

ou, o que é o mesmo, de manter ao longo do trajecto a mesma velocidade média

$$
\bar{p} = \frac{a}{T} \quad , \quad \bar{q} = \frac{b}{T}.
$$

(1) Cf. D. F. Landen — op. cit.

É fácil de provar (1) que a única curva que satisfaz à questão é constituída pelos segmentos da recta $\overline{AC}$ e $\overline{CB}$, percorridos instantâneamente, ao passo que o ponto figurativo $Q(p, q)$ permanece em C durante todo o intervalo (o, T). Isto significa:

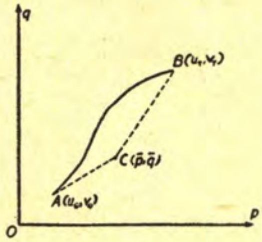


Fig. 4

1.º que em O deve dar-se uma combustão muito rápida que faz variar a velocidade, por impulsão do valor inicial (u_0, v_0) ao valor médio $(\overline{p}, \overline{q})$.

2.º que o foguetão deve permanecer durante o intervalo (o, T) com a velocidade média $(\overline{p}, \overline{q})$, isto é, sem funcionamento do motor de reacção.

3.º que no instante $t = T$ deve dar-se nova combustão muito rápida (portanto nova impulsão) que altera a velocidade de $(\overline{p}, \overline{q})$ para o valor final (u_T, v_T).

Retomemos de novo a fórmula de Binet; cálculo simples (2) mostra que um corpo animado de velocidade horizontal de 7,912 km/s à superfície da Terra manter-se-á indefinidamente como satélite, descrevendo um círculo máximo em torno da Terra: 7,912 kms é a *velocidade circular* à superfície da Terra.

Se a velocidade decrescer, o corpo cairá sobre a Terra.

Se a velocidade for porém de 11,189 km/s, a trajectória do corpo será arco de parábola tangente à superfície da Terra: 11,189 km/s é a *velocidade de fuga* à superfície da Terra.

Para velocidade intermédia entre a circular e a de fuga a trajectória é elipse; enfim, sendo superior à de fuga o corpo descreverá um arco de hipérbole.

Ora a velocidade circular à altitude de 600 km sobre a Terra é cerca de 7,5 km/s.

Isto é, os cientistas e técnicos soviéticos tiveram que calcular um foguetão capaz de imprimir a um corpo de 80 kg uma velocidade de 7,5 km/s.

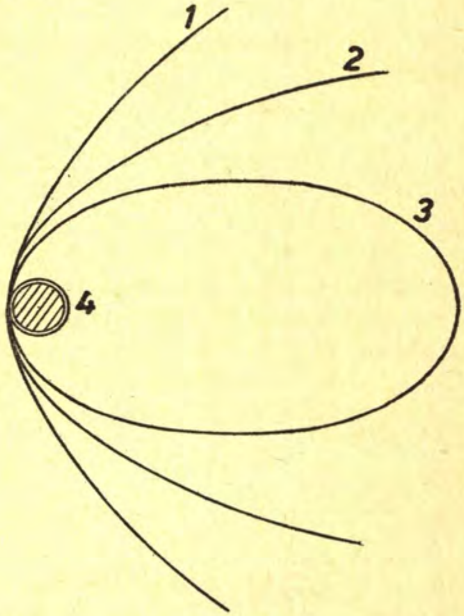


Fig. 5

Admitindo que a velocidade de saída dos gases do foguetão foi de 5 km/s, que o foguetão partiu do repouso e que apenas interessava atingir a altitude de 600 km com a velocidade indicada (que nenhuma importância tinha a direcção dessa velocidade) quererão os Leitores calcular o peso de toda a estrutura no momento da partida e o número de andares do foguetão utilizado? A imprensa falou em 3 andares que pesavam no conjunto cerca de 90 t.

A Gazeta de Matemática teria muito prazer em publicar nos próximos números as considerações dos seus Leitores.

(1) Cf. D. F. Lawden, op. cit. pág. 174.

(2) Desprezando a resistência do ar.

As superfícies planificáveis e as envolventes das faces do triedro móvel

por J. Ribeiro de Albuquerque

Apresentam-se neste artigo muitos assuntos, relacionados intimamente entre si, no estudo geométrico das curvas do espaço.

Dada uma família de curvas do espaço, com um só parâmetro, cujas equações são

$$\begin{cases} f_1(x,y,z,a)=0 \\ f_2(x,y,z,a)=0 \end{cases}$$

quando as funções f_1 e f_2 forem contínuas e admitirem derivadas relativamente ao parâmetro a, uniformemente em certa região do espaço, um raciocíneo bem conhecido permite achar as equações da curva envolvente, com a eliminação de a, entre três das quatro equações:

$f_1=0, \dfrac{\partial f_1}{\partial a}=0,\ f_2=0, \dfrac{\partial f_2}{\partial a}=0$ quando uma destas equações fôr consequência das outras.

Do mesmo modo, dada uma família de superfícies com um só parâmetro

$$F(x,y,z,a)=0$$

determina-se a equação da superfície envolvente, eliminando o parâmetro no sistema:

$$F=0\,,\frac{\partial F}{\partial a}=0.$$

Este último sistema representa uma família de curvas, ao longo de cada uma das quais a envolvente tem contacto com uma envolvida.

Tais curvas são as curvas características, e a envolvente das características é uma curva situada sobre a superfície envolvente das superfícies, e que se chama a aresta de reversão.

Isto mesmo vai ser considerado num caso particular notável; é o caso da superfície envolvente duma família de planos do espaço.

Chamam-se superfícies planificáveis às envolventes dos planos duma família de planos com um só parâmetro.

Considere-se, no espaço, uma família de planos, que possa ser encarada como o conjunto contínuo e ordenado de todas as posições dum mesmo plano que tivesse executado um determinado movimento no espaço, durante um certo intervalo de tempo.

Tomando o tempo como parâmetro, uma variável t definida num intervalo finito ou infinito, a equação da família de planos será

$$A(t).X+B(t).Y+C(t).Z+D(t)=0$$

com $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $D(t)$ funções contínuas e deriváveis de t. É possível tirar o valor de uma das variáveis, por exemplo Z, e mudar de parâmetro, de modo a ter

$$1)\qquad Z=\alpha.X-\varphi(\alpha)Y-\psi(\alpha)$$

supondo φ e ψ funções de α, contínuas e com derivadas de primeira e segunda ordem, pelo menos numa vizinhança de certo ponto α.

É com estas condições que vamos abordar alguns conceitos geométricos importantes; quando as condições se não verificarem, é fácil de ver quais os conceitos que ficam sem sentido, ou quais as anormalidades, isto é, as singularidades que os afectarão, e que se põem à margem deste estudo.

Dada a família de planos 1), com um parâmetro α, as curvas características são as rectas $r(\alpha)$ definidas por

$$2)\qquad \begin{cases} Z = \alpha X - \varphi(\alpha)\, Y - \psi(\alpha) \\ O = X - \varphi'(\alpha)\, Y - \psi'(\alpha) \end{cases}$$

e a planificável é o lugar geométrico destas rectas. É sempre possível resolver o sistema 2), obtendo o valor de duas variáveis, X e Z por exemplo, em função da outra e do parâmetro α; teríamos uma representação paramétrica da planificável.

Se tomarmos para Y uma função arbitrária de α, teremos o sistema

$$3)\qquad \begin{cases} X = \varphi'\, Y + \psi' \\ Y = \theta \\ Z = (\alpha\varphi' - \varphi)\, Y + (\alpha\psi' - \psi) \end{cases}$$

que representa uma curva arbitrária traçada sobre a planificável.

Resolvamos o seguinte problema: Quais as curvas traçadas sobre a planificável às quais as rectas $r(\alpha)$ são tangentes?

Determina-se a função θ de modo que a tangente à curva 3) seja perpendicular aos eixos dos planos do sistema 2). As condições de perpendicularidade dão:

$$\theta = -\frac{\psi''}{\varphi''} \qquad \text{ou} \qquad Y = -\frac{\psi''}{\varphi''}$$

e vê-se que esta curva é a aresta de reversão da planificável, cujas equações serão obtidas do sistema 3) com a função determinada.

Para procurarmos o plano osculador da aresta de reversão, teremos que calcular os menores compreendidos na matriz seguinte:

$$\left\| \begin{matrix} \varphi'' Y + \varphi' \dfrac{dY}{d\alpha} + \psi'' & \dfrac{dY}{d\alpha} & \alpha\varphi'' Y + (\alpha\varphi' - \varphi)\dfrac{dY}{d\alpha} + \alpha\psi'' \\ \varphi'' \dfrac{dY}{d\alpha} + \varphi' \dfrac{d^2 Y}{d\alpha^2} & \dfrac{d^2 Y}{d\alpha^2} & \alpha\varphi'' \dfrac{dY}{d\alpha} + (\alpha\varphi' - \varphi)\dfrac{d^2 Y}{d\alpha^2} \end{matrix} \right\|$$

e com cálculos muito fáceis se obtém para equação do plano osculador

$$A(\xi - X) + B(\eta - Y) + C(\zeta - Z) = 0$$

onde

$$A = \alpha\varphi'' \left(\frac{dY}{d\alpha}\right)^2$$

$$B = -\varphi\varphi'' \left(\frac{dY}{d\alpha}\right)^2$$

$$C = -\varphi'' \left(\frac{dY}{d\alpha}\right)^2.$$

Isto conduz a:

$$\alpha(\xi - X) - \varphi(\eta - Y) - (\zeta - Z) = 0$$

mas, atendendo à terceira equação do sistema 3) ou à segunda do sistema 2), obtém-se finalmente

$$\zeta = \alpha\xi - \varphi\eta - \psi$$

Conclusão: *o plano osculador num ponto da aresta de reversão é o plano da família de planos envolvidos, que passa por esse ponto.*

Esta propriedade permite, evidentemente, achar as equações da planificável quando sejam dadas as equações da aresta de reversão.

Com efeito, suponhamos dadas as equações duma curva Γ; suporemos que os pontos de Γ são obtidos com a coordenada curvilínea s, e as equações paramétricas são então

$$x = x(s) \qquad y = y(s) \qquad z = z(s).$$

O plano osculador é dado pela equação

$$4)\qquad (X - x)\lambda + (Y - y)\mu + (Z - z)\nu = 0$$

onde λ, μ, ν representam os cosenos directores da binormal, $\vec{B}$.

Temos na equação 4) uma família de planos com um só parâmetro s; deveremos achar a envolvente e provar que Γ é a aresta de reversão. Derivemos, em ordem a s, a equação 4)

$$(X - x)\frac{d\lambda}{ds} + (Y - y)\frac{d\mu}{ds} + (Z - z)\frac{d\nu}{ds} = \\ = \alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu = 0$$

onde α, β, γ são os cosenos directores da tangente, $\vec{T}$. Com os fórmulas de FRENET-SERRET

$$5)\begin{cases} \dfrac{d\alpha}{ds}=\dfrac{\xi}{\rho} & \dfrac{d\beta}{ds}=\dfrac{\eta}{\rho} & \dfrac{d\gamma}{ds}=\dfrac{\zeta}{\rho} \\ \dfrac{d\lambda}{ds}=\dfrac{\xi}{\tau} & \dfrac{d\mu}{ds}=\dfrac{\eta}{\tau} & \dfrac{d\nu}{ds}=\dfrac{\zeta}{\tau} \\ \dfrac{d\xi}{ds}=-\dfrac{\alpha}{\rho}-\dfrac{\lambda}{\tau} & \dfrac{d\eta}{ds}=-\dfrac{\beta}{\rho}-\dfrac{\mu}{\tau} & \dfrac{d\zeta}{ds}=-\dfrac{\gamma}{\rho}-\dfrac{\nu}{\tau} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{T}}{ds}=\dfrac{\vec{N}}{\rho} \\ \dfrac{d\vec{B}}{ds}=\dfrac{\vec{N}}{\tau} \\ \dfrac{d\vec{N}}{ds}=-\left(\dfrac{\vec{T}}{\rho}+\dfrac{\vec{B}}{\tau}\right) \end{cases}$$

a última equação transforma-se em

$$(X-x)\xi+(Y-y)\eta+(Z-z)\zeta=0$$

que é a equação do plano rectificante. As rectas características são definidas pela equação 4) e esta última, e são as tangentes à curva Γ.

Isto prova-nos, já, que a curva Γ é a aresta de reversão da envolvente dos planos osculadores da curva dada. E com efeito, derivando mais uma vez, obtemos

$$(X-x)\frac{d\xi}{ds}+(Y-y)\frac{d\eta}{ds}+(Z-z)\frac{d\zeta}{ds}= \\ =\alpha\xi+\beta\eta+\gamma\zeta=0$$

e de novo com as fórmulas de FRENET-SERRET e com as equações já obtidas, vem

$$(X-x)\alpha+(Y-y)\beta+(Z-z)\gamma=0.$$

As três equações obtidas dão a aresta de reversão. Ora no sistema,

$$\begin{cases}(X-x)\lambda+(Y-y)\mu+(Z-z)\nu=0\\(X-x)\xi+(Y-y)\eta+(Z-z)\zeta=0\\(X-x)\alpha+(Y-y)\beta+(Z-z)\gamma=0\end{cases}$$

de equações homogéneas nas incógnitas $(X-x)$ $(Y-y)$ $(Z-z)$ tem-se, como é bem sabido

$$6)\qquad \begin{vmatrix}\alpha & \beta & \gamma\\ \xi & \eta & \zeta\\ \lambda & \mu & \nu\end{vmatrix}=1$$

o que implica uma solução nula, a única solução: $X=x(s)$, $Y=y(s)$, $Z=z(s)$.

A aresta de reversão da planificável envolvente dos planos osculadores duma curva dada, é a própria curva.

Chegamos ao mesmo resultado com um terço do esforço, utilizando os vectores. A equação do plano osculador é o produto interno nulo

$$(M-P)/\vec{B}=0$$

onde $P(s)$ é o ponto de Γ, e M o ponto genérico do plano. Derivando, vem

$$(M-P)\Big/\frac{d\vec{B}}{ds}-\frac{dP}{ds}\Big/\vec{B}=(M-P)\Big/\frac{d\vec{B}}{ds}- \\ -\vec{T}\Big/\vec{B}=(M-P)\Big/\frac{d\vec{B}}{ds}=0$$

e com as fórmulas 5) tem-se

$$(M-P)/\vec{N}=0$$

que é a equação do plano rectificante. Derivando, ainda uma vez

$$(M-P)\Big/\frac{d\vec{N}}{ds}-\vec{T}\Big/\vec{N}=(M-P)\Big/\frac{d\vec{N}}{ds}=0$$

ou, com as fórmulas 5) e atendendo ao já obtido

$$(M-P)/\vec{T}=0$$

que é a equação do plano normal. A aresta de reversão é dada por

$$(M-P)/\vec{T}=0;\ (M-P)/\vec{N}=0;\ (M-P)/\vec{B}=0$$

e o vector $M-P$ tem componentes nulas no triedro móvel, donde: $M\equiv P$.

*

Seja dado um plano π cuja equação tomaremos com a forma

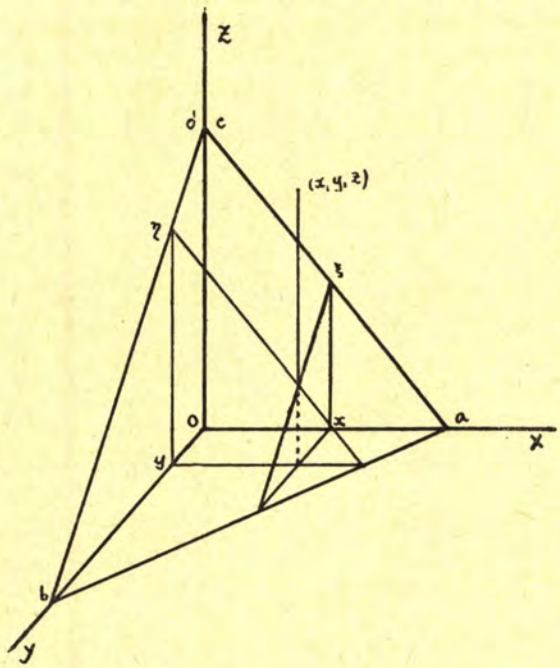
$$7)\qquad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

e procuremos estudar a secção feita por π na planificável.

As equações da secção serão as equações 3) com uma função $\theta(\alpha)$ que se determina com a equação 7). A função θ é dada por

$$8) \qquad \frac{\varphi'\theta+\psi'}{a}+\frac{\theta}{b}+\frac{(\alpha\varphi'-\varphi)\theta+(\alpha\psi'-\psi)}{c}=1$$

Façamos uma mudança de coordenadas: mudemos o plano XOY para o plano $\xi O'\eta$ coincidente com π e conservando os outros planos coordenados. Na figura 1, estão re-



presentadas secções feitas pelos planos $X=x$ e $Y=y$ no tetraedro formado pelos antigos planos coordenados e o plano π.

Por semelhança de triângulos, tira-se

$$\begin{cases} \xi = \dfrac{\sqrt{a^2+c^2}}{a}\,x = K_1\,x \\[2ex] \eta = \dfrac{\sqrt{b^2+c^2}}{b}\,y = K_2\,y \\[2ex] \zeta - z = c\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}-1\right). \end{cases}$$

As equações da curva secção, transformam-se em

$$\begin{cases} \xi = K_1\,X & \qquad X=\varphi'\theta+\psi' \\ \eta = K_2\,Y = K_2\,\theta \\ \zeta = O \end{cases}$$

onde θ é determinada pela equação 8).

Derivando esta equação 8), vem

$$\frac{\varphi''\theta+\varphi'\theta'+\psi''}{a}+\frac{\theta'}{b}+\frac{\alpha\varphi''\theta+\alpha\psi''+(\alpha\varphi'-\varphi)\theta}{c}=0$$

o que nos mostra o seguinte: os valores α_0 que anulam θ', fazem

$$\frac{\varphi''\theta+\psi''}{a}+\frac{\alpha(\varphi''\theta+\psi'')}{c}=0$$

ou

$$\theta(\alpha_0) = -\frac{\psi''(\alpha_0)}{\varphi''(\alpha_0)} = Y(\alpha_0)$$

e inversamente. A função $Y(\alpha)$ é da aresta de reversão, ao passo que $\theta(\alpha)$ é da secção.

Achemos as derivadas de ξ e η, para estudo da tangente.

$$\frac{d\xi}{d\alpha} = K_1(\varphi''\theta+\varphi'\theta'+\psi'') \qquad \frac{d\eta}{d\alpha} = K_2\,\theta'$$

Vê-se, agora, que: se α_0 é valor que conduz a um ponto comum à secção e à aresta de reversão, isto é, $\theta(\alpha_0)=Y(\alpha_0)$, vem:

$$\frac{d\xi}{d\alpha}=\frac{d\eta}{d\alpha}=0.$$

Há singularidade nos pontos de encontro.

Temos, ainda, com facilidade

$$\frac{d^2\xi}{d\alpha^2} = K_1(\varphi'''\theta+2\varphi''\theta'+\varphi'\theta''+\psi''')$$

$$\frac{d^2\eta}{d\alpha^2} = K_2\,\theta''$$

e portanto

$$\Delta\eta = (\alpha-\alpha_0)\frac{d\eta}{d\alpha_0}+\frac{(\alpha-\alpha_0)^2}{2}\,\frac{d^2\eta}{d\alpha_0^2}+\cdots$$

$$\Delta\xi = (\alpha-\alpha_0)\frac{d\xi}{d\alpha_0}+\frac{(\alpha-\alpha_0)^2}{2}\,\frac{d^2\xi}{d\alpha_0^2}+\cdots$$

donde vem

$$\lim_{\alpha=\alpha_0} \frac{\Delta \eta}{\Delta \xi} = \frac{K_2 \theta''}{K_1 \left[\varphi''' \left(- \frac{\psi''}{\varphi''} \right) + \varphi' \theta'' + \frac{\psi''' \varphi''}{\varphi''} \right]} = \frac{K_2 \theta''}{K_1 [\varphi' \theta'' - \varphi'' Y']} .$$

Estes valores estão calculados para $\alpha = \alpha_0$ e Y' representa o valor da derivada de $Y(\alpha) = - \frac{\psi''(\alpha)}{\varphi''(\alpha)}$ para $\alpha - \alpha_0$

Quando $Y'(\alpha_0) \neq \theta'(\alpha_0) = 0$ este limite é perfeitamente determinado; no caso contrário haverá contacto entre a secção e a aresta de reversão no ponto em comum.

Afastada a hipótese de contacto, quando α cresce ou decresce para α_0, em ambos os casos a partir de certa altura, o cociente $\frac{\Delta \eta}{\Delta \xi}$ tem o mesmo sinal e existem duas semi-tangentes à secção, coincidentes, e não no prolongamento uma da outra; o ponto singular é um ponto de reversão, uma cúspide.

Em resumo: *todo o plano que não tenha contacto com a aresta de reversão, mas que a corte, determina na planificável uma secção com um ponto de reversão, naquele ponto em que encontra a aresta.*

*

São superfícies planificáves, as superfícies cónicas e cilíndricas. Consideremos uma família de planos, todos eles com o ponto fixo $(0, 0, c)$ e cuja equação se pode pôr com a forma

$$\frac{x}{a(t)} + \frac{y}{b(t)} + \frac{z}{c} = 1$$

onde $a(t), b(t)$ são funções dum mesmo parâmetro t, o parâmetro da família. Tirando o valor de Z, vem:

$$Z = - \frac{c}{a(t)} X - \frac{c}{b(t)} Y + c$$

e, pondo $\alpha = - \frac{c}{a(t)}$, uma mudança de parâmetro, temos a equação

$$Z = \alpha X + \varphi(\alpha) Y + c .$$

As rectas características são dadas por

$$r(\alpha) \begin{cases} Z = \alpha X + \varphi(\alpha) Y + c \\ 0 = X + \varphi'(\alpha) Y \end{cases}$$

e, como o segundo plano passa por $\overrightarrow{OZ}$, todas as rectas características passam pelo ponto $(0, 0, c)$.

A aresta de reversão obtem-se derivando mais uma vez: $\varphi''(\alpha) Y = 0$ ou $Y = 0$. As equações da aresta de reversão, reduzem-se a

$$\begin{cases} X = 0 \\ Y = 0 \\ Z = c . \end{cases}$$

A planificável é uma superfície cónica, com o vértice em $V(0, 0, c)$ e com a directriz situada no plano XOY, dada por:

$$\begin{cases} \alpha X + \varphi(\alpha) Y + c = 0 \\ X + \varphi'(\alpha) Y = 0 \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} X = - \dfrac{c \varphi'}{\alpha \varphi' - \varphi} \\ Y = \dfrac{c}{\alpha \varphi' - \varphi} \end{cases} \qquad \text{ou} \qquad X + \varphi' Y = 0 .$$

Consideremos agora uma família de planos π todos paralelos a uma direcção fixa. Para fixar um sistema de eixos coordenados conveniente, tomemos um dos planos da família para plano XOZ, e todos os outros cortarão este, segundo rectas paralelas. A equação da família de planos pode então pôr-se sob a forma

$$\frac{X}{a \cdot k(t)} + \frac{Y}{b(t)} + \frac{Z}{c \cdot k(t)} = 1$$

onde $b(t)$ e $k(t)$ são duas funções do parâmetro t, da família.

Pode tirar-se o valor de X e temos:

$$X = -a\frac{k(t)}{b(t)}Y - \frac{a}{c}Z + a\,k(t)$$

e, pondo $\alpha = -a\dfrac{k(t)}{b(t)}$, mudança de parâmetro, temos a equação:

$$X = \alpha\,Y - \frac{a}{c}Z - a\,\psi(\alpha).$$

As rectas características são dadas por

$$r(\alpha)\begin{cases} X = \alpha\,Y - \dfrac{a}{c}Z - a\,\psi(\alpha) \\ O = Y - a\,\psi'(\alpha) \end{cases}$$

e são todas paralelas à direcção fixa, pois estes dois planos são paralelos a essa direcção. A aresta de reversão está portanto no infinito.

A envolvente é um cilindro de geratrizes paralelas à direcção dada, e, com directriz situada em XOY dada pelas equações paramétricas

$$9)\qquad \begin{cases} X = a\,[\alpha\,\psi' - \psi] \\ Y = a\,\psi'. \end{cases}$$

Se tivéssemos tomado o eixo $\overrightarrow{OZ}$ com a direcção dada, os resultados eram ainda os mesmos, bastando supor $c = +\infty$.

As equações duma curva traçada sobre o cilindro, são, como já dissemos no caso geral,

$$10)\qquad \begin{cases} X = a\,(\alpha\,\psi' - \psi) \\ Y = a\,\psi' \\ Z = \theta \end{cases}$$

onde θ é uma função arbitrária de α.

Procuremos as curvas cujas tangentes fazem ângulo constante V com o eixo $\overrightarrow{OZ}$. Orientamos a tangente de modo que $O < V < \dfrac{\pi}{2}$ e orientamos a curva de modo concordante. As equações da tangente são

$$\frac{\xi - X}{a\,\alpha\,\psi''} = \frac{\eta - Y}{a\,\psi''} = \frac{\zeta - Z}{\theta'}$$

e então vem

$$\cos V = \frac{\theta'}{\sqrt{a^2\,\psi''^2(\alpha^2+1) + \theta'^2}}$$

e $$\theta' = \operatorname{cotg} V \cdot a\,\psi''\sqrt{\alpha^2+1}.$$

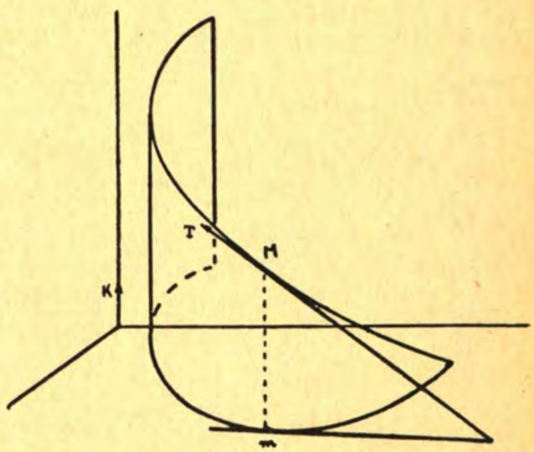
As curvas procuradas foram chamadas *hélices* e as suas equações são as 10), com uma das funções θ, dadas por

$$\theta = a\cdot\operatorname{cotg} V\int_{\alpha_0}^{\alpha}\psi''\sqrt{\alpha^2+1}\,d\alpha + c^{te}.$$

Orientando a directriz 9) do cilindro de modo concordante com a hélice fornecida por θ que se anula para $\alpha = \alpha_0$; tomando para origem da coordenada curvilínea s sobre a directriz 9) o ponto em que a hélice a encontra, virá como medida do arco s da directriz, desde essa origem até à projecção m do ponto M da hélice

$$s = \int_{\alpha_0}^{\alpha}\psi''\sqrt{\alpha^2+1}\,d\alpha.$$

A cota Z do ponto M da hélice é proporcional ao comprimento S do arco, da



directriz do cilindro, descrito, pela projecção m de M, desde o ponto de encontro.

Inversamente, sejam $x = x(s)$, $y = y(s)$ as equações duma curva Γ situada em XOY e,

$$X = x(s) \qquad Y = y(s) \qquad Z = k\,s$$

as equações duma curva no espaço; esta curva está evidentemente no cilindro de directriz Γ, e o terceiro coseno director da tangente é K

Se $\vec{T}$ é o vector unitário sobre a tangente à hélice, e se $\vec{K}$ é o vector unitário sobre $\overrightarrow{OZ}$, será:

$$\vec{T} / \vec{K} = 0$$

Derivando em ordem a S, coordenada curvilínea sobre a hélice, temos

$$\frac{d\vec{T}}{dS} \Big/ \vec{K} = 0$$

e com as fórmulas 5) de FRENET-SERRET, vem

$$\frac{\vec{N}}{\rho} \Big/ \vec{K} = 0$$

afastando a hipótese da curva rectilínea, $\rho \neq \infty$, será: $\vec{N} / \vec{K} = 0$

Nas hélices a normal principal é perpendicular a $\overrightarrow{OZ}$ *e, inversamente*, pois o raciocínio se deixa inverter.

Derivando $\vec{N} / \vec{K} = 0$, de novo, em ordem a S, vem: $\frac{d\vec{N}}{dS} \Big/ \vec{K} = 0$ e com as fórmulas 5), temos:

$$\left(-\frac{\vec{B}}{\tau} - \frac{\vec{T}}{\rho}\right) \Big/ \vec{K} = 0$$

Ora, da figura, tira-se com facilidade que, $\vec{B} / \vec{K} = \pm \operatorname{sen} V$, logo

$$\mp \frac{\operatorname{sen} V}{\tau} = \pm \frac{\cos V}{\rho}$$

e finalmente

$$\frac{\tau}{\rho} = -\, tg\, V$$

Nas hélices é, portanto, constante o cociente das duas curvaturas.

Inversamente: se $\tau = k\rho$, com as fórmulas de FRENET-SERRET, vem $d\vec{B} = k\, d\vec{T}$ e $\vec{B} = k \,.\, \vec{T} + \vec{k'}$ onde $\vec{k'}$ não é nulo. Multiplicando internamente por $\vec{N}$ vem: $\vec{k'} / \vec{N} = 0$ e, como já se viu, a curva é uma hélice.

Nas hélices, é constante o cociente das duas curvaturas, e inversamente.

(Continua no próximo número)

Duas fórmulas de Análise Combinatória

por ***Austregésilo Gomes Spíndola***

A dedução apresentada foi-me sugerida pelo artigo *Nota a «Uma demonstração por indução finita»* do Dr. GUSTAVO DE CASTRO, Gaz. de Mat. 54, Abril de 1953, que fui encarregado, pelo Prof. M. ZALUAR, de expôr em 1956 numa das sessões do Seminário do Cálculo das Probabilidades do Instituto de Física e Matemática da Universidade do Recife.

Problema

Uma urna contém n *esferas negras e* a *esferas azuis. Retiram-se simultâneamente* b *esferas. Qual a probabilidade de saída de* i *esferas azuis?*

O número N de casos igualmente possíveis é $N = \binom{n+a}{b}$ e o número F_i dos casos favoráveis ao acontecimento A_i, de que pretendemos calcular a probabilidade, é $F_i = \binom{n}{b-i}\binom{a}{i}$.

Temos então

$$p(A_i) = \frac{\binom{n}{b-i}\binom{a}{i}}{\binom{n+a}{b}}.$$

Consequências:

1) Caso $b \geq a$.

É claro que o acontecimento $A = \sum_{i=0}^{a} A_i$ é a certeza, isto é, $p(A) = 1$. Como para $i \neq j$, é $A_i A_j = 0$, podemos escrever:

$$p(A) = \sum_{i=0}^{a} p(A_i) = 1 \quad \text{ou} \quad \sum_{i=0}^{a} \frac{F_i}{N} = 1 \quad \text{ou ainda}$$

$\sum_{i=0}^{a} F_i = N$, donde a fórmula da análise combinatória,

$$\binom{n+a}{b} = \binom{n}{b} + \binom{n}{b-1}\binom{a}{1} + \cdots + \binom{n}{b-a} = \sum_{i=0}^{a} \binom{a}{i}\binom{n}{b-i}.$$

2) Caso $b < a$

Neste caso os acontecimentos

$$A_{b+i} \quad (i = 1, 2, \cdots, a-b)$$

são impossíveis, isto é, $p(A_{b+i}) = 0$.

Teremos então

$$\sum_{i=0}^{b} \frac{F_i}{N} = 1$$

donde

$$\sum_{i=0}^{b} \binom{n}{b-i}\binom{a}{i} = \binom{n+a}{b}$$

ou, desenvolvidamente,

$$\binom{n+a}{b} = \binom{n}{b} + \binom{n}{b-1}\binom{a}{1} + \cdots + \binom{a}{b},$$

fórmula bem conhecida da Análise Combinatória.

Problemas fundamentais da teoria da aproximação funcional

por Luís G. M. de Albuquerque

(Continuação do número anterior)

6. Sistema de vectores ortogonais e orto-normados.

Dois sistemas de vectores linearmente independentes dizem-se *equivalentes* quando geram a mesma variedade linear.

Um sistema finito ou infinito de vectores linearmente independentes x_n de um espaço de Hilbert é *ortogonal* quando se verifique a condição

$$(x_i, x_j) = 0 \quad \text{para} \quad i \neq j.$$

O sistema finito ou infinito de vectores linearmente independentes e_n de um espaço de Hilbert, H, diz-se *orto-normado* quando

(6. 1) $$(e_i, e_j) = \delta_{ij}$$

onde δ_{ij} é o símbolo de Kroenecker.

Teorema A. *De todo o sistema de vectores linearmente independentes de* H

(6. 2) $$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$$

é possível deduzir um sistema orto-normado de vectores, equivalente ao dado.

Demonstração Para provar o teorema basta dar o processo de construção do sistema orto-normado a partir de (6. 2), por um método devido a E. Schmidt (1907).

Pondo $e_1 = x_1 / \| x_1 \|$, com $x_1 \neq 0$, é $\| e_1 \| = 1$; seja depois $y_2 = x_2 - (x_2, e_1) e_1$, de modo que $(y_2, e_1) = 0$, e fazendo $e_2 = y_2 / \| y_2 \|$, fica e_2 ortogonal com e_1 e tal que $\| e_2 \| = 1$;

procedendo sempre de igual modo, obtém-se:

$$y_{k+1} = x_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} (x_{k+1}, e_i) e_i,$$

sendo y_{k+1} ortogonal com cada $e_i (i=1,2,\cdots,k)$, pois

$$(y_{k+1}, e_i) = (x_{k+1}, e_i) - \sum_{j=1}^{k} (x_{k+1}, e_j)(e_j, e_i)$$
$$= (x_{k+1}, e_i) - \sum_{j=1}^{k} (x_{k+1}, e_j) \delta_{ij} = 0;$$

e portanto, pondo

$$e_{k+1} = y_{k+1} / \| y_{k+1} \| \ \text{é} \ \| e_{k+1} \| = 1$$

e e_{k+1} ortogonal com cada $e_i (i=1,2,\cdots,\mathrm{k})$.

Este processo conduz, como se desejava, a um sistema de vectores $e_1, e_2, \cdots, e_k, \cdots$, que é orto-normado, pois verifica (6. 1), e além disso equivalente ao sistema dado, pois

$$\begin{aligned} e_1 &= a_{11} x_1 \\ e_2 &= a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \\ &\cdots \\ e_n &= a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \cdots + a_{nn} x_n \\ &\cdots \end{aligned}$$

com $a_{11} = 1 / \| x_1 \| \neq 0, \quad a_{kk} = 1 / \| y_k \| \neq 0$
$(k = 2, \cdots, n, \cdots)$.

Teorema B. *Num espaço de* Hilbert *separável, todo o sistema orto-normado é finito ou numerável.*

Demonstração. Seja H um espaço de Hilbert, separável, e $\{ e_\alpha \}_{\alpha \in A}$ um sistema orto-normado de vectores de H, isto é, tais que $(e_\alpha, e_{\alpha'}) = 0$ ou 1 consoante se tem $\alpha \neq \alpha'$ ou $\alpha = \alpha'$; e $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ o conjunto numerável de vectores $x_k \in H$ que é denso em H. Vamos mostrar que entre os conjuntos $\{ x_k \}_{k=1,2,\ldots}$ e $\{ e_\alpha \}_{\alpha \in A}$ se pode estabelecer uma correspondência bi-unívoca. Suponhamos que a cada $e_\alpha \in \{ e_\alpha \}$ se faz corresponder um vector $x_k \in \{ x_k \}$ tal que

(6. 3); $\delta(x_k, e_\alpha) = \| x_k - e_\alpha \| < \frac{1}{2} \sqrt{2}$

com esta lei de correspondência fàcilmente se verifica que a dois vectores distintos e_α e $e_{\alpha'}$ de $\{ e_\alpha \}_{\alpha \in A}$ correspondem dois vectores distintos x_k e $x_{k'}$ de $\{ x_k \}_{k=1,2,\ldots}$, e isso basta para que o teorema fique demonstrado; admitamos então que era $x_k = x_{k'}$; como por (6. 3) se tem

$$\| x_k - e_\alpha \| < \frac{1}{2} \sqrt{2} \quad \text{e} \quad \| x_k - e_{\alpha'} \| < \frac{1}{2} \sqrt{2}$$

ficaria

$$(6.\ 4) \quad \| e_\alpha - e_{\alpha'} \| \leqq \| e_\alpha - x_k \| + \| x_k - e_{\alpha'} \| < \sqrt{2};$$

por outro lado

$$\| e_\alpha - e_{\alpha'} \|^2 = \| e_\alpha \|^2 + \| e_{\alpha'} \|^2 = 2$$

visto ser $(e_\alpha, e_{\alpha'}) = 0$, ou seja

$$\| e_\alpha - e_{\alpha'} \| = \sqrt{2}$$

igualdade em contradição com (6. 4). Assim, não pode ser $x_k = x_{k'}$, e o teorema fica demonstrado.

Teorema C. *Se* $\{ \mathrm{e}_k \}_{k=1,2,\ldots}$ *é um sistema ortogonal* (não necessàriamente orto-normado) *de vectores de um espaço de* Hilbert, *a série*

$$(6.\ 5) \qquad \mathrm{e}_1 + \mathrm{e}_2 + \cdots + \mathrm{e}_n + \cdots$$

e a série de termos positivos

$$(6.\ 6) \quad \| \mathrm{e}_1 \|^2 + \| \mathrm{e}_2 \|^2 + \cdots + \| \mathrm{e}_n \|^2 + \cdots$$

são da mesma natureza.

Demonstração. Designemos por s_n e σ_n as somas dos n primeiros termos das séries (6. 5) e (6. 6), respectivamente. Na métrica do espaço de Hilbert considerado a primeira série será convergente desde que $\| s_n - s_m \| < \sqrt{\delta}$ ou $\| s_n - s_m \|^2 < \delta$ para $n > m > N(\delta)$; mas:

$$\| s_n - s_m \|^2 = \left\| \sum_{k=m+1}^{n} e_k \right\|^2 =$$

$$= \left(\sum_{k=m+1}^{n} e_k, \sum_{i=m+1}^{n} e_i \right) = \sum_{k=m+1}^{n} \sum_{i=m+1}^{n} (e_k, e_i);$$

e como $(e_k, e_i) = 0$ para $k \neq i$,

$$\|s_n - s_m\|^2 = \sum_{k=m+1}^{n} (e_k, e_k) = \sum_{k=m+1}^{n} \|e_k\|^2 = \sigma_n - \sigma_m;$$

esta última igualdade mostra que as séries (6. 5) e (6. 6) são da mesma natureza, como desejavamos concluir.

Finalmente,

TEOREMA D. *Os vectores de um sistema orto-normado são linearmente independentes.*

Demonstração. Se $\{e_k\}$ é um sistema orto-normado de vectores de um espaço de HILBERT, qualquer que seja n a relação

$$(6.\ 7) \qquad \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k = 0$$

só pode ter a solução trivial $\alpha_k = 0$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$; pois se um dos α_k for diferente de zero, por exemplo $\alpha_i \neq 0$, multiplicando (6. 7) escalarmente por e_i vinha:

$$0 = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (e_k, e_i) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \delta_{ki} = \alpha_i$$

o que é impossível.

7. Aproximação linear nos espaços lineares normados.

Seja E um espaço linear normado, definido sobre um corpo $\mathfrak{k}$, e considerem-se os m vectores linearmente independentes de E

$$x_k \, (k = 1, 2, \cdots, m)$$

que geram a variedade linear $V \subset E$, constituída por vectores que se podem escrever na forma

$$(7.\ 1) \qquad x = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k x_k,$$

com os $\alpha_k \in \mathfrak{k}$.

Sendo dado um vector $y \in E - V$ (que não é possível exprimir linearmente em função dos x_k), pode-se pôr a questão de saber qual seja, entre os vectores (7. 1) da variedade V, aquele que está à mínima distância de y, isto é, pôr o problema da determinação dos coeficientes α_k de modo que

$$(7.\ 2) \qquad \delta(x, y) = \left\| \sum_{k=1}^{m} \alpha_k x_k - y \right\|$$

seja mínima. Se existir um vector x_0 nestas condições, diremos que ele é *o polinómio de melhor aproximação de* y em V (*), *ou que é a projecção de* y *na variedade* V:

$$(7.\ 3) \; \|x_0 - y\| = \min_{\alpha_k} \left\| \sum_{k=1}^{m} \alpha_k x_k - y \right\|$$

O problema a resolver consiste, portanto, em tornar mínima a função dos parâmetros α_k:

$$\varphi(\alpha_1, \cdots, \alpha_m) = \left\| \sum_{k=1}^{m} \alpha_k x_k - y \right\| = \left\| y - \sum_{k=1}^{m} \alpha_k x_k \right\|.$$

Notaremos, em primeiro lugar, que φ é uma função contínua dos α_k; tem-se

$$|\varphi(\alpha'_1, \cdots, \alpha'_m) - \varphi(\alpha_1, \cdots, \alpha_m)| = \left| \left\| y - \sum_1^m \alpha'_k x_k \right\| - \left\| y - \sum_1^m \alpha_k x_k \right\| \right|;$$

e como a identidade

$$y - \sum_1^m \alpha'_k x_k = (y - \sum_1^m \alpha_k x_k) + \sum_1^m (\alpha_k - \alpha'_k) x_k$$

(*) O vector x_0 é um polinómio em $x_k \, (k = 1, 2, \cdots, m)$ e coeficientes no corpo $\mathfrak{k}$; daí a designação. Conf. I. SINGER, «Propriétati ale suprafetei sferei unitate si aplicatii la resolvarea problemei unicitatii polinomului de cea mai buna aproximatie in spatii BANACH oarecare», *Studii si cercetari mat.*, Vol. 1 (1956), p. 95 ess.

dá, por aplicação de n_3), § 4:

$$\left\| y - \sum_1^m \alpha'_k x_k \right\| \leqq \left\| y - \sum_1^m \alpha_k x_k \right\| + \\ + \left\| \sum_1^m (\alpha_k - \alpha'_k) x_k \right\|,$$

fica

$$\left| \varphi(\alpha'_1, \cdots, \alpha'_m) - \varphi(\alpha_1, \cdots, \alpha_m) \right| \leqq \\ \leqq \left\| \sum_1^m (\alpha_k - \alpha'_k) x_k \right\| \leqq \sum_1^m \left| \alpha_k - \alpha'_k \right| \cdot \left\| x_k \right\|,$$

ou ainda

$$\left| \varphi(\alpha'_1, \cdots, \alpha_m) - \varphi(\alpha_1, \cdots, \alpha_m) \right| \leqq \\ \leqq \max_k \left| \alpha_k - \alpha'_k \right| \cdot \sum_1^m \left\| x_k \right\|,$$

o que estabelece a continuidade da função φ.

De maneira análoga se mostraria que

$$\psi(\alpha_1, \cdots, \alpha_m) = \left\| \sum_1^m \alpha_k x_k \right\|$$

é uma função contínua dos seus argumentos. Assim, na superfície esférica de equação $\sum_1^m |\alpha_k|^2 = 1$, que é um conjunto fechado e limitado de um espaço euclidiano com m dimensões, ψ admitirá um mínimo $\mu > 0$ (visto serem linearmente independentes os x_k e a relação $\sum_1^m \alpha_k x_k = 0$ não admitir senão a solução trivial).

Posto isto podemos estabelecer o seguinte

TEOREMA DE EXISTÊNCIA. *Considerado o vector* $\mathrm{y} \in \mathrm{E}$, *não pertencente à variedade* V *de base* $\{\mathrm{x}_1, \cdots, \mathrm{x}_m\}$, *existe em* V *pelo menos um vector à mínima distância de* y. *Se a norma do espaço é forte, esse vector é único.*

Demonstração. Retome-se a funcão φ, não negativa, e seja $\lambda \geq 0$ o seu limite inferior; vamos mostrar que é possível determinar uma esfera S_R

$$\sum |\alpha_k|^2 = R^2$$

de raio tal que no exterior dela seja sempre

$$\varphi(\alpha_1, \cdots, \alpha_m) > 1 + \lambda .$$

Seja $R = \frac{1}{\mu}(1 + \lambda + \|y\|)$, e consideremos os pontos de coordenadas $(|\alpha_1|, \cdots, |\alpha_m|)$ exteriores a S_R, isto é, tais que

$$\sqrt{\sum_1^m |\alpha_k|^2} > R = \frac{1}{\mu}(1 + \lambda + \|y\|).$$

Da relação

$$\left\| \sum_1^m \alpha_k x_k - y \right\| + \|y\| \geq \left\| \sum_1^m \alpha_k x_k \right\|$$

tira-se

$$\varphi(\alpha_1, \cdots, \alpha_m) = \left\| \sum_1^m \alpha_k x_k - y \right\| \geqq \left\| \sum_1^m \alpha_k x_k \right\| - \|y\| \\ \geqq \sqrt{\sum_1^m |\alpha_k|^2} \cdot \left\| \sum_1 \frac{\alpha_k}{\sqrt{\sum_1^m |\alpha_k|^2}} x_k \right\| - \|y\|;$$

como se tem:

$$\sum_{k=1}^m \left| \frac{\alpha_k}{\sqrt{\sum_1^m |\alpha_k|^2}} \right|^2 = 1$$

e ψ atinge na superfície da esfera $\sum_1^m |\alpha_k|^2 = 1$ o mínimo μ, segue-se que

$$\varphi(\alpha_1, \cdots, \alpha_m) \geq \sqrt{\sum_1^m |\alpha_k|^2 \cdot \mu} - \|y\|;$$

assim, no exterior da esfera S_R os valores de φ satisfazem à desigualdade

$$\varphi(\alpha_1, \cdots, \alpha_m) > \frac{1}{\mu}(1 + \lambda + \|y\| = 1 + \lambda.$$

Deste modo, o limite inferior λ da função φ é o seu limite inferior no domínio fechado e limitado

$$\sum_1^m |\alpha_k|^2 \leq R^2;$$

e como a função φ é aí contínua, segue-se que λ é um mínimo, isto é, existe pelo menos um ponto $(\alpha_1^0, \cdots, \alpha_m^0)$ onde se tem

$$\lambda = \min \varphi(\alpha_1, \cdots, \alpha_m) = \varphi(\alpha_1^0, \cdots \alpha_m^0) =$$

$$(7.\ 4) \qquad = \left\| \sum_{k=1}^m \alpha_1^0 x_k - y \right\|;$$

os vectores nestas condições

$$(7.\ 5) \qquad x_0 = \sum_1^m \alpha_k^0 x_k \in V$$

dão o *polinómio* de melhor aproximação de y em V, e a primeira parte do teorema fica demonstrada.

Provaremos agora que, se a norma do espaço E considerado é forte, o vector x_0 nas condições de (7. 5) é único. Suponhamos que existia em V um outro vector x' nas mesmas condições, isto é, tal que

$$\lambda = \min_{\alpha_k} \varphi(\alpha_1, \cdots, \alpha_m) = \left\| \sum_1^m \alpha'_k x_k - y \right\|;$$

para o vector de V com as componentes $\frac{\alpha_k^0 + \alpha'_k}{2}$ ter-se-ia: $\lambda \leq \left\| \sum_1^m \frac{\alpha_k^0 + \alpha'_k}{2} x_k - y \right\| \leq$

$$\leq \frac{1}{2} \left\| \sum_1^m \alpha_k^0 x_k - y \right\| + \frac{1}{2} \left\| \sum_1^m \alpha'_k x_k - y \right\| = \lambda$$

donde:

$$\left\| \left(\sum_1^m \alpha_k^0 x_k - y \right) + \left(\sum_1^m \alpha'_k x_k - y \right) \right\| = \left\| \sum_1^m \alpha_k^0 x_k - y \right\| + \left\| \sum_1^m \alpha_k^1 x_k - y \right\|;$$

mas sendo a norma do espaço forte, esta igualdade só é possível quando

$$\sum_1^m \alpha_k^0 x_k - y = \alpha \left(\sum_1^m \alpha'_k x_k - y \right);$$

ora se $\alpha \neq 1$, tira-se da última igualdade

$$(1 - \alpha) y = \sum_1^m (\alpha_k^0 - \alpha'_k) x_k$$

que dá y como combinação linear dos x_k, ou seja $y \in V$, contràriamente à hipótese; tem, pois, de ser $\alpha = 1$, e neste caso ficaria $\sum_1^m (\alpha_k^0 - \alpha'_k) x_k = 0$, equação que, em virtude de serem os x_k linearmente independentes, só tem a solução trivial $\alpha_k^0 - \alpha_k^1 = 0$ $(k = 1, \cdots, m)$. Portanto: é $x_0 = x'$, e o vector (7. 4) é único. O teorema fica assim completamente demonstrado (*).

(*) Confr. N. I. Ahcieser, *Vorlesungen über Approximations-theorie*, Berlin, 1953, pág. 10-12, e L. A. Ljusternik — W. I. Sobolew, *Elemente der Funktionalanalysis*, Berlin, 1955, pág. 78-81.

(Continua no próximo número)

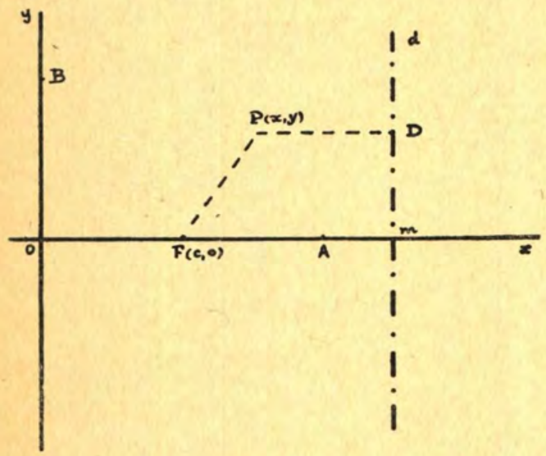
TRIBUNA DO LEITOR

Uma dedução elementar da forma canónica das equações das cónicas

por **Pedro R. de Almeida**

Cónica é o lugar geométrico dos pontos P cujas distâncias a um ponto fixo F (*foco*) e uma recta d, também fixa, (*directriz*) estão numa razão constante e, (*excentricidade*).

Tomemos um referencial ortogonal com $X'X$ passando por F perpendicularmente a d.



Seja c a abscissa do foco e $y = m$ a equação da directriz. Por definição de cónica, tem-se:

$$\frac{\overline{PF}}{\overline{PD}} = \frac{\sqrt{(x-c)^2+y^2}}{|m-x|} = e$$

donde

$$(x-c)^2 + y^2 = e^2(m-x)^2$$

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = e^2m^2 - 2e^2mx + e^2x^2$$

$$(1) \quad (1-e^2)x^2 - 2(c-e^2m)x + y^2 = e^2m^2 - c^2$$

Conforme for $e<1$, $e>1$ ou $e=1$, assim se tem uma *elipse*, uma *hipérbole*, ou uma *parábola*.

1) *Elipse* $e<1, \quad 1-e^2>0$.

Escolhamos m de modo a anular o termo em x: $\quad c - e^2m = 0$ ou $m = \dfrac{c}{e^2}$.

A equação da directriz é $y = \dfrac{c}{e^2}$.

Então (1) torna-se:

$$(2) \qquad (1-e^2)x^2 + y^2 = \frac{c^2(1-e^2)}{e^2}.$$

A curva corta os eixos nos pontos

$$A\left(\frac{c}{e}, 0\right), \quad A'\left(-\frac{c}{e}, 0\right),$$

$$B\left(0, \frac{c\sqrt{1-e^2}}{e}\right), \quad B'\left(0, -\frac{c\sqrt{1-e^2}}{e}\right),$$

(*vértices da curva*).

Pondo $\dfrac{c}{e} = a$ e $\dfrac{c\sqrt{1-e^2}}{e} = b$, a equação (2) toma a forma:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

que é a *equação canónica da elipse*.

De $\dfrac{c^2(1-e^2)}{e^2} = b^2$ e $\dfrac{c}{e} = a$, tira-se: $a^2 - c^2 = b^2$ ou $a^2 = b^2 + c^2$ e como $\dfrac{c}{e^2} = \dfrac{a}{e}$ e $e<1$, tem-se: $\dfrac{a}{e} > a > c$. Então a posição relativa de F,

A, e d é a indicada na figura. E como c e a se acompanham em sinal, ao vértice A', simétrico de A com respeito à origem, corresponde um foco $F'(-c, 0)$ e uma directriz $d' \equiv x = -\frac{a}{e}$, simétricos de F e d com respeito à origem.

2) *Hipérbole* $e > 1$, $e^2 - 1 < 0$.

Procedendo como anteriormente, (1) torna-se:

$$-(e^2 - 1)x^2 + y^2 = -\frac{c^2(e^2-1)}{e^2}$$

ou

$$(e^2 - 1)x^2 - y^2 = \frac{c^2(e^2-1)}{e^2}$$

A curva corta OX nos pontos

$$A\left(\frac{c}{a}, 0\right) \text{ e } A'\left(-\frac{c}{a}, 0\right)$$

e OY nos pontos imaginários

$$B\left(0, \frac{c\sqrt{e^2-1}}{e}i\right) \text{ e } B'\left(0, -\frac{c\sqrt{e^2-1}}{e}i\right)$$

(*vértices da curva*).

Pondo $\frac{c}{e} = a$ e $\frac{c\sqrt{e^2-1}}{e} = b$,

a equação da curva toma a forma:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

que é a *equação canónica de hipérbole* com o *eixo real* ou *transverso* segundo OX.

De $\frac{c^2(e^2-1)}{e^2} = b^2$ tira-se $c^2 - a^2 = b^2$ ou $c^2 = a^2 + b^2$ e como $\frac{c}{a} = \frac{a}{e}$ e $e > 1$, tem-se $\frac{a}{e} < a < c$. Então a posição relativa de d, A e F não é representada na figura, ficando d à esquerda de A e F à direita.

3) *Parábola* $e = 1$.

A equação (1) torna-se:

$$-2(c - m)x + y^2 = m^2 - c^2$$

Escolhamos m de modo que $m^2 - c^2 = 0$ ou $m = \pm c$. Para $c = m$ vem $y^2 = 0$ que é a equação de duas rectas coincidentes com OX, caso particular da parábola. Para $m = -c$, vem:

$$y^2 = 4mx \text{ ou, pondo } 2m = p$$

$$y^2 = 2px$$

que é a *equação canónica da parábola.*

Então tem-se: $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ e $d \equiv x = -\frac{p}{2}$.

A origem dos eixos é um ponto da curva; é precisamente o seu *vértice.*

Recomendação n.º 43 da Conferência Internacional da Instrução Pública

A Conferência Internacional da Instrução Pública, convocada para Genebra, pela Organização das Nações Unidas para a educação, para a ciência e cultura, e pela Junta Internacional da Educação, tendo-se aí reunido em 9 de Julho de 1956, na sua 19.ª sessão, adopta, a 17 de Julho de 1956, a recomendação seguinte:

A Conferência:

Considerando que a matemática teve sempre um valor cultural e prático indiscutível e uma função importante no desenvolvimento científico, técnico e económico e, em particular, que a nossa época apresenta uma conjuntura matemática sem precedente na história;

Considerando que a formação matemática é um bem e um direito para todo o ser humano, quaisquer que sejam a sua raça, o seu sexo, a sua condição e as suas actividades;

Considerando que, para assegurar o progresso e a prosperidade dos povos, a elevação do nível matemático geral deve acompanhar o desenvolvimento técnico e científico superior;

Considerando que as diversas civilizações desempenharam um papel na criação e desenvolvimento da matemática;

Considerando que a psicologia reconhece que todo o ser humano é capaz de uma certa actividade matemática e que, particularmente, não há nenhuma razão para crer que as raparigas são menos aptas que os rapazes para estudar a matemática;

Considerando que a pedagogia da matemática se torna cada dia mais científica e mais eficaz;

Considerando que há razões para dar um prolongamento à Recomendação n.º 31, respeitante à iniciação matemática na escola primária, adoptada pela 16.ª Conferência Internacional da Instrução Pública;

Submete aos Ministérios da Instrução Pública dos diferentes países a recomendação seguinte:

Objectivos do ensino da matemática

1 – No decurso dos estudos secundários, quer técnicos quer de formação geral, convém atingir, na mais larga medida possível, os fins educativos do ensino da matemática que dizem respeito às funções intelectuais e à formação do carácter. Esses fins resultam dos progressos da lógica em acção (reflectir, analisar, abstrair, esquematizar, raciocinar dedutivamente, generalizar, especializar, aplicar, criticar, etc.); das qualidades racionais do pensamento e da sua expressão (ordem, precisão, clareza, concisão, etc.); do espírito de observação; das concepções especiais e quantitativas; da intuição e da imaginação do domínio abstracto; do desenvolvimento da atenção e do poder de concentração; da aquisição da perseverança e do hábito do trabalho ordenado e, enfim, da formação do espírito científico (objectividade, probidade intelectual, gosto da pesquisa, etc.);

2 – As operações de ordem prática, a adaptação ao meio natural e a necessidade de compreender os problemas que suscita a vida técnica, económica e social exigem cada vez mais conhecimentos matemáticos correntes (cálculo, geometria usual, representações geométricas, fórmulas, equações, funções, tábuas, e gráficos). Estas noções e meios fundamentais intervêm também num número crescente de profissões;

3 — A matemática e o estilo de pensamento que lhe é peculiar devem ser considerados como um elemento essencial da cultura geral do homem moderno, mesmo que ele não desempenhe uma actividade científica ou técnica.

É de desejar que o ensino da matemática, em estreita ligação com o ensino de outras disciplinas, conduza os alunos a compreender a função que desempenha a matemática nas concepções científicas e filosóficas do mundo actual;

4 — Um dos fins principais do curso adiantado de matemática nos últimos anos do ensino secundário deve ser a preparação para os estudos superiores científicos ou técnicos cuja base matemática aumenta dia a dia.

Lugar da matemática

5 – O ensino da matemática, obrigatório nas diferentes classes do ciclo inferior das escolas secundárias, deve dispor de um número de horas adequado;

6 — No ciclo superior das secções científicas, o curso de matemática deve beneficiar de um horário amplo;

7 – É de desejar que os alunos que manifestam disposições especiais para os estudos científicos tenham a possibilidade de seguir um ensino mais desenvolvido e que possam dedicar-se a estudos complementares pessoais;

8 — Nos países em que o ensino da matemática não figura a título obrigatório em certas secções (secções literárias, por exemplo), um ensino de matemática com tendência cultural, de preferência a pura técnica matemática, deveria ser organizado, pelo menos a título facultativo;

9 – A importância atribuída à matemática, por ocasião da apreciação dos resultados dos alunos, qualquer que seja a maneira de a exprimir, deve ser proporcional ao valor que é reconhecido a esta disciplina. Quando esta é obrigatória, e especialmente em secções científicas, ela deverá ser considerada como uma das disciplinas principais, designadamente na altura das passagens de classe e da atribuição dos certificados de fim de curso.

Programas

10 — O programa de matemática de uma secção determinada da escola secundária deve estar de harmonia com os fins gerais do ensino deste ramo e com os objectivos particulares da secção;

11 — Os programas serão mantidos em dia e adaptados aos progressos das ciências e às necessidades da técnica e da vida modernas, sacrificando questões antiquadas. Tomar-se-á particularmente em consideração o facto de que, para elevar o nível dos programas das classes superiores, certos países introduziram a geometria analítica, o cálculo infinitesimal, a estatística e as probabilidades e concedem uma importância ao estudo das funções e dos vectores, assim como às aplicações da matemática.

12 — A dificuldade e a extensão das matérias a ensinar estarão em relação com a idade mental média correspondente a cada classe e com os interesses e as

necessidades dos alunos. Se convém dar aos indivíduos dotados para a matemática complementos, é preciso evitar provocar o desalento dos alunos fracos impondo-lhes matérias cuja complexidade ultrapassa os seus recursos intelectuais;

13 — Convém estabelecer os planos de estudo de maneira a organizar o ensino da matemática à volta de unidades funcionais que coordenem os seus diversos ramos, embora destacando as noções gerais;

14 — Nesta ordem de ideias, é de desejar determinar, por ensaios pedagógicos realizados sem preconceitos, em que medida as estruturas amplamente polivalentes da matemática moderna podem servir para melhorar o ensino secundário;

15 — Seria desejável que os professores tivessem uma certa liberdade de iniciativa para prolongar eventualmente os programas-base por complementos facultativos.

Métodos

16 — Quando são dadas directivas metodológicas, convém que elas sejam conselhos e sugestões tendentes a conformar o ensino ao mesmo tempo com o progresso da psicologia da inteligência e da pedagogia da matemática e com a natureza e uso da matemática, ciência teórica que tem uma origem ligada ao real e um alcance eficaz na nossa acção sobre ele;

17 — Tudo deve ser posto para estimular e favorecer no aluno a aprendizagem activa da matemática por uma participação pessoal tão vasta quanto possível na sua elaboração;

18 — É necessário:

a) despertar e manter o interesse dos alunos tanto pela matemática em si mesma como pelas suas aplicações;

b) estar atento à marcha do pensamento matemático juvenil;

c) adaptar o ensino às capacidades individuais e à evolução mental dos alunos e diferenciá-lo sucessivamente segundo o seu destino;

19 — É preciso:

a) partir tanto quanto possível do concreto para chegar ao abstracto sobretudo nas classes inferiores, e, cada vez que isso se mostre vantajoso, apelar para a experimentação real, figurada ou imaginada, para sugerir a definição ou a demonstração;

b) ter em conta que o conhecimento matemático nasce e desenvolve-se pela interiorização das acções concretas e pela organização dos esquemas operatórios;

c) aproveitar questões suscitadas pelas situações concretas, não sòmente para mostrar a importância prática da matemática, mas sobretudo para motivar desenvolvimentos teóricos;

20 — Importa:

a) conduzir o aluno a formular as noções e a descobrir as relações e as propriedades matemáticas, em vez de lhe impor um pensamento adulto completamente elaborado;

b) assegurar a aquisição das noções e dos processos operatórios antes de apresentar o formalismo;

c) não confiar ao automatismo senão as operações assimiladas;

21 — É indispensável:

a) fazer adquirir primeiramente ao aluno a experiência dos seres e das relações matemáticas e iniciá-lo, em seguida, no raciocínio dedutivo;

b) alargar progressivamente a construção dedutiva da matemática;

c) ensinar a pôr problemas, a buscar dados, a explorar e apreciar os resultados;

d) conceder a preferência à investigação heurística das questões e não à exposição doutrinal dos teoremas;

e) fazer tomar consciência da estrutura duma teoria hipotético-dedutiva em que, sobre a base dos postulados, os teoremas são construídos por demonstrações e os termos novos introduzidos por definições, de maneira a chegar a uma exposição lógica dedutiva da matéria estudada;

22 — É preciso:

a) estudar os erros dos alunos e ver neles um meio de conhecer o seu pensamento matemático;

b) conduzir à prática do controle pessoal e da auto-correcção;

c) dar o sentido da aproximação, da ordem da grandeza e da verosimilhança dos resultados;

d) dar a prioridade à reflexão e ao raciocínio, de preferência ao «adestramento» e ao «de cor», e limitar o papel da memória à fixação dos resultados fundamentais;

e) propor assuntos de exame que exijam mais formação matemática que preparação intensiva;

23 — Importa:

a) encorajar os modos de expressão pessoais, mesmo aproximados, e melhorá-los gradualmente;

b) levar o aluno à precisão e ao rigor pelas necessidades de uma comunicação eficaz com outrem e uma exigência de clareza do seu próprio pensamento;

c) favorecer a pesquisa e a iniciativa individuais tanto como o trabalho de equipa;

d) aumentar o número de alunos que se interessem pela matemática e contribuir para desenvolver a sua formação e os seus conhecimentos organizando círculos, conferências, competições e outras manifestações de carácter facultativo e difundindo livros e revistas que lhes sejam acessíveis;

24 — É indispensável:

a) sublinhar a unidade intrínseca da matemática, não lhe separar os ramos e relacionar os diversos métodos de resolução duma questão dada;

b) indicar as etapas importantes da história das noções e das teorias matemáticas estudadas;

25 — É necessário:

a) manter a coordenação da matemática com as ciências que dela fazem uso;

b) tirar partido das exigências do pensamento matemático para aumentar a precisão, a clareza e a concisão da linguagem;

c) manter o contacto da matemática com a vida real.

Material didáctico

26 — A evolução da metodologia da matemática exige uma adaptação dos manuais. Ao lado dos livros de iniciação na matemática que permitem o acesso progressivo às noções abstractas, o aluno deverá poder dispor de obras de revisão, em que as matérias adquiridas são retomadas e organizadas num plano mais elevado. Deverão ser postas à disposição de cada um, nas bibliotecas de turma, obras de referência, de complemento e de vulgarização, revistas, etc..

Essa documentação será adaptada aos objectivos das diferentes secções e respeitará, para cada uma delas, a dosagem entre o ponto de vista prático, as necessidades técnicas, os desenvolvimentos teóricos e a preocupação cultural;

27 — Desempenhando os auxiliares audio-visuais os modelos matemáticos concretos (tirados da vida corrente, construídos pelos alunos ou pelos professores ou ainda fabricados por firmas comerciais), um lugar cada vez mais importante no ensino, convém tirar partido do seu uso para fazer adquirir activamente, pelos alunos, as abstracções matemáticas.

Pessoal docente

28 — Em matemática, mais talvez que noutras disciplinas, o papel do professor é primordial. O recrutamento, a formação e o aperfeiçoamento dos professores de matemática devem ser objecto duma atenção e duma solicitude particulares da parte das autoridades responsáveis pela educação da juventude;

29 — Os professores encarregados de ensinar a matemática nas escolas secundárias devem ter uma formação matemática dum nível nitidamente superior ao do seu ensino. Essa formação deve comportar não só o estudo da matemática teórica, mas uma parte de matemática aplicada, a história geral do pensamento matemático, a própria metodologia da ciência matemática e o estudo da matemática elementar considerada dum ponto de vista superior;

30 — Uma preparação pedagógica e psicológica adequada deve ser o complemento indispensável da formação matemática do professor e inspirar-se num conhecimento claro e bastante profundo dos objectivos gerais e dos princípios da educação humana. Essa preparação deve incidir sobre a evolução estrutural da inteligência em relação com a elaboração do pensamento matemático. Ela dará um lugar às relações do concreto e do abstracto, de forma a situar a metodologia dos modelos no ensino matemático.

O futuro professor será encaminhado à observação e à experimentação em matéria de pedagogia matemática. Acima de tudo, deverá ser-lhe despertado o interesse pelos adolescentes e pelas suas aspirações, afim de que ele possa ser o animador e o guia da juventude;

31 — Convém velar para que todos os alunos das classes inferiores e os alunos menos dotados das classes superiores tenham bons mestres;

32 — É preciso que o professor de matemática em exercício possa estar a par ao mesmo tempo da evolução moderna das ciências matemáticas teóricas, das aplicações actuais importantes da matemática e dos progressos recentes da didáctica da sua disciplina.

É de desejar que sejam tomadas medidas com vista a facilitar o aperfeiçoamento dos professores: conferências, cursos de férias, seminários, grupos de trabalho, estágios, publicações, etc.;

33 — As sugestões de inspectores especializados ou de conselheiros pedagógicos e o exemplo do trabalho de professores experimentados são meios excelentes para aumentar o rendimento do ensino;

34 — O professor de matemática deve gozar, na sociedade moderna, da consideração e da categoria social a que lhe dão direito a sua formação científica e a sua missão de educador;

35 — Visto que em todos os países um ensino adequado da matemática é um elemento essencial da educação, importa assegurar o recrutamento dum número suficiente de professores competentes, tanto mais que está nisso uma condição para o desenvolvimento científico, técnico, económico e social de todos os povos.

Colaboração internacional

Os Governos e os organismos culturais ou educativos internacionais, tais como a Unesco, a Junta Internacional da Educação, a Comissão Internacional do Ensino da Matemática, a Comissão Internacional para o Estudo e Melhoramento do Ensino da Matemática, devem favorecer, por todos os meios (publicações, conferências, reuniões, exposições, viagens de estudo e estágios no estrangeiro, etc.) o intercâmbio internacional das ideias, dos trabalhos, das pesquisas e dos resultados obtidos no ensino da matemática, a fim de que a juventude de todo o Mundo possa beneficiar o mais cedo possível das experiências e dos progressos realizados pelos professores de todos os países.

MOVIMENTO MATEMÁTICO

DR. JOÃO JOSÉ LOPES FARINHA

No dia 19 de Outubro faleceu numa clínica de Paris, o Dr. João José Lopes Farinha, membro do corpo redactorial da *Gazeta de Matemática* — e elemento de primeiro plano no nosso reduzido quadro de investigadores e professores de Matemática.

João Farinha licenciou-se na Universidade de Coimbra, com distinção, em 1934. Os seus méritos ficaram inaproveitados durante muitos anos, em que a sua actividade se limitou ao ensino médio em vários colégios particulares daquela cidade. Só em 1950 a Faculdade de Ciências de Coimbra o chamou para ocupar um lugar de segundo assistente, que viria a oferecer-lhe a oportunidade de se dedicar, com desvelo e sentido das responsabilidades, à investigação científica. Do seu labor neste campo deu provas na dissertação de doutoramento (1954), sobre a convergência de fracções contínuas, e em cerca de uma dezena de trabalhos originais publicados em diversas revistas.

Mas ao lado das suas qualidades de investigador próbo e arguto, realçaram em João Farinha dons pouco vulgares de professor — com uma exposição aliciante, bom senso na maneira de a conduzir, e uma vigilante atenção na organização dos seus cursos. As lições do curso de «Probabilidades, Erros e Estatística» são modelares, e bem mereciam ser editadas; porque se um livro não pode, na frieza das suas páginas, transmitir o entusiasmo e o calor humano com que João Farinha fazia as suas aulas, poderá ao menos revelar com que exemplar atenção as escolhia e preparava.

A morte surpreendeu-o prematuramente quando, beneficiando de uma bolsa da Fundação Calouste Gulbenkian, se especializava em Mecânica Quântica, no Instituto Henri Poincaré. Com o seu desaparecimento perde a Faculdade de Ciências de Coimbra um dos seus colaboradores de maior préstimo. Mas da vaga que deixou em aberto não sofre apenas a Escola que serviu: sentimo-lo todos os que à valorização do Estudo da Matemática temos procurado dar, na medida das nossas possibilidades, o melhor dos nossos esforços.

Registo bibliográfico

Na *Gazeta de Matemática* publicou o Dr. João Farinha os seguintes trabalhos:

«O teorema dos resíduos e o cálculo da soma de uma série», N.º 44-45 (1950), pág. 15.

«Sobre um caso de convergência de fracções contínuas de elementos complexos», N.º 50 (1951), pág. 81.

Eis os títulos dos restantes trabalhos publicados pelo Dr. João Farinha:

Exercícios de Álgebra e Geometria Analítica (de colaboração com Luís Albuquerque), Coimbra, 1946.

Exercícios de Geometria Descritiva (Idem), Coimbra, 1951.

Sobre a convergência de fracções contínuas de elementos complexos (Tese), Coimbra, 1953.

«Sobre dois teoremas de Pincherle», *Rev. da Fac. Cien.* de Coimbra, 21 (1952), pág. 161.

«Sur les limites des zéros d'un polynôme», *Rev. da Fac. Cienc* de Lisboa, 2.ª série, A, 3 (1953), 181.

«Fracções contínnas ascendentes periódicas», *Rev. da Fac. Cienc.* de Coimbra, 22 (1953), 110.

«Sur la convergence de $\Phi\, a_i/1$», *Port. Math.* 13 (1954), 145.

«Quelques propositions concernant les zéros d'un polynôme», *Rev. da Fac. Cienc.* de Lisboa, 2.ª série, A, 4 (1954-55), 187.

«Sur la moyenne arithmétique», *Rev. da Fac. Cienc* de Coimbra, 23 (1954), 14.

«Une condition de convergence», *Ibidem*, pág. 17.

«Sur la probabilité maximum d'accord de deux états», *Ibidem*, pág. 21.

«Sobre o valor preferível de uma série de observações» (comunicação). *Assoc. Port. para o Progresso das Ciências. XXIII Congresso Luso-Espanhol* — Coimbra, 1956, vol. III, pág. 41.

L. A.

CICLO ANUAL DE CONFERÊNCIAS DO LICEU NORMAL DE PEDRO NUNES

A iniciar o ciclo anual de conferências do Liceu Pedro Nunes, o professor efectivo do mesmo liceu Dr. José Jorge Gonçalves Calado pronunciou a 19 de Novembro último uma lição intitulada «Sobre o Ensino das Matemáticas Elementares».

Servindo-se da sua prosa agradável, dicção fluente, vastos conhecimentos matemáticos e larga experiência pedagógica, o Prof. Calado focou principalmente dois aspectos gerais relacionados com o ensino das matemáticas: «o problema do recrutamento de professores de matemática, por um lado; e o problema da formação de largas «equipes» de matemáticos, solicitadas insistentemente, e cada vez mais, por variados sectores da Administração, quer pública, quer privada, por outro».

Quanto à primeira questão, verifica o Prof. Calado que ela «constitue um problema inquietante e nacional que urge resolver, fazendo uma revisão dos métodos de recrutamento e de preparação científica dos professores do ensino liceal, no sentido de a actualizar».

O ensino das matemáticas – seja qual for o seu grau – deve subordinar-se a duas espécies de exigências: de conteúdo (programa) e de forma (método) e estes devem ser condicionados por forma que verifiquem os três axiomas seguintes:

I) *O nosso ensino deve vizar a iniciar os alunos no espírito da ciência contemporânea.*

II) *Qualquer que seja o seu grau, o ensino deve sempre decorrer ao nível da evidência dos nossos alunos.*

III) *O acto de aprender, deve ser um acto criador e e não um acto meramente receptivo.*

Quanto à actualização, o Prof. Calado preconiza que o ensino liceal seja impregnado do espírito das matemáticas modernas; nesse sentido expõe, em termos acessíveis a alunos do 7.º ano, os conceitos fundamentais e introdutórios à Álgebra: operação algébrica, estrutura algébrica, e estrutura de grupo, dos quais dá vários e sugestivos exemplos.

Conclue que «carecemos em muitos casos, de actualizar a nossa cultura científica (envolvendo neste vocábulo a própria pedagogia) pois só assim criaremos as condições que possibilitam a renovação do ensino em termos de o tornar compatível com os nossos axiomas iniciais», e solicita ao Ministro da Educação Nacional

a) actualização dos problemas de matemática dos cursos complementares, de acordo com o axioma I)

b) 6 horas semanais para o ensino da matemática nos mesmos cursos

c) a instituição nos Liceus Normais de cursos ou colóquios de iniciação à Álgebra da Lógica, Fundamentos da Matemática e Álgebra Moderna

d) que tais cursos sejam de frequência obrigatória aos estagiários do 8.º grupo e facultados aos professores de matemática e física

e) que as lições proferidas sejam publicadas e distribuidas gratuitamente aos professores do 8.º grupo que as solicitem.

A Redacção da «Gazeta de Matemática» felicita vivamente o Liceu Pedro Nunes e o Prof. Dr. Calado, seu ilustre colaborador pela actualidade dos problemas tratados e forma como foram abordados.

J. G. T.

O PRIMEIRO COLOQUIO BRASILEIRO DE MATEMÁTICA

Sob o patrocínio do Conselho Nacional de Pesquisas (CNPq) e da Campanha Nacional de Aperfeiçoamento do Pessoal de Nível Superior (CAPES) realizou-se em Julho de 1957 em Poços de Caldas, Minas Gerais, o primeiro colóquio brasileiro de matemática, promovido por um grupo de professores e pesquisadores de várias universidades e centros de estudos matemáticos dentre os quais o Instituto de Matemática Pura e Aplicada do CNPq. Durante 20 dias estiveram reunidos cerca de 50 matemáticos num ambiente de trabalho e cooperação; muito deve o êxito do congresso ao entusiasmo do coordenador Prof. Chaim S. Honig, jovem matemático brasileiro, professor da Universidade de São Paulo.

Foram atingidos os objectivos do colóquio: proporcionar o contacto entre os pesquisadores e os que se iniciam na investigação da Matemática Moderna e estabelecer colaboração entre vários centros de estudos matemáticos do Brasil (Porto Alegre, S. Paulo, S. Carlos, S. José dos Campos, Belo Horizonte, Recife, Fortaleza, etc.).

Além de conferências científicas e de outras sessões de trabalho, realizaram-se os cursos: 1) Introdução à Geometria Diferencial e à Álgebra Multilinear e Variedades Diferenciáveis (Profs. António Rodrigues, Alexandre A. Martins Rodrigues, Maurício Matos Peixoto e Chaim Samuel Honig); 2) Teoria dos Números Algébricos e Teoria dos Ideais (Profs Fernando Furquim de Almeida, Luiz H. Jacy Monteiro e Paulo Ribemboim); 3) Introdução à Análise Funcional—Espaços Vectoriais Topológicos, Funcionais Analíticas e Teoria das Distribuições — (Profs. Cândido da Silva Dias, A. Pereira Gomes, Domingos Pizanelli, José Barros Neto e Nelson Onuchic) e 4) Introdução à Topologia Algébrica (Profs. C. B. de Lyra, Alexandre A. Martins Rodrigues). Estes cursos foram redigidos, mimeografados e distribuidos aos participantes no início da reunião o que permitiu serem realizados nas melhores condições. Tiveram também lugar os dois cursos especializados: Complex Homogeneous Spaces pelo Prof. Morikumi Goto da Universidade de Tóquio e Variétés Feuilletées pelo Prof. Georges Reeb da Universidade de Grenoble.

A oração de encerramento do colóquio, foi preferida pelo nosso colaborador Prof. A. Pereira Gomes, um dos componentes da Comissão Organizadora e que representou o Instituto de Física e Matemática da Universidade do Recife.

A realização do colóquio é um acontecimento bem digno de nota e é desnecessário frizar a importância para o futuro do desenvolvimento dos estudos matemáticos no Brasil e da investigação neste campo. Está previsto novo colóquio dentro de 2 anos sendo ampliado o domínio dos assuntos a tratar.

M. Zaluar Nunes

RÉUNION DES MATHÉMATICIENS D'EXPRESSION LATINE

De 12 a 19 de Setembro de 1957 teve lugar em Nice a «Réunion des Mathématiciens d'Expression Latine», cujos trabalhos se distribuiram pelos seguintes domínios: 1) geometria diferencial e topologia; 2) álgebra e geometria algébrica; 3) equações em derivadas parciais; 4) probabilidades e física matemática. As conferências proferidas foram as seguintes:

Adem (José) — *Operaciones cohomógicas de ordem superior.*

Eckmann (Beno) — *Homotopie et dualité.*

Gaeta (F.) — *Sur le calcul effectif de la forme associée à l'intersection de deux cycles en fonction de celles des sécants et questions qui s'y rattachent.*

Gillis (Paul) — *Propriétés et existence des solutions de certaines classes d'équations du type elliptique.*

Miranda (Carlo) — *Alcuni aspectti della teoria delle equazioni ellittiche.*

Segre (Beniamino) — *Recenti prospettive nella teoria delle corrispondenze.*

Lions (Jacques) — *Equations différentielles à coefficients opérateurs non bornés.*

Ville (Jean) — *Processus stochastiques et réseaux ramifiés.*

Para realizar a conferência (única) sobre cálculo das probabilidades, tinha sido anteriormente convidado o Prof. Manuel Zaluar Nunes, que, infelizmente, por razões estranhas à sua vontade, não poude aceitar o convite, o que foi lamentado, na sessão de encerramento, pelo Presidente do Comité de Organização, Prof. André Marchaud.

As conferências eram seguidas de discussão, durante cerca de uma hora.

Participaram na Reunião cerca de duzentos congressistas, dos seguintes países: Bélgica, Canadá, Espanha, E. U. A., França, Irão, Israel, Itália, México, Polónia, Portugal, Roménia, Suíça e Yugoslávia.

Como delegado português, o autor desta notícia presidiu à sessão em que teve lugar a conferência do Prof. P. Gillis. À Fundação Calouste Gulbenkian deixo aqui expresso o meu reconhecimento pela concessão dum subsídio que, juntamente com o concedido pelo Comité da Organização, me permitiu participar na referida Reunião.

J. Sebastião e Silva

PROF. GOTTFRIED KÖTHE

Foi nomeado Presidente da Sociedade Alemã de Matemática o Prof. Gottfried Köthe, que, em 1954, a convite do Instituto de Alta Cultura, esteve em Lisboa prestando a sua valiosa colaboração ao Centro de Estudos Matemáticos, com uma série de conferências sobre a Teoria dos Espaços Localmente Convexos e questões afins. Esta notícia não pode deixar de interessar vivamente a todos os que então, tiveram a feliz oportunidade de conhecer de perto o insigne matemático.

J. Sebastião e Silva

DOUTORAMENTOS NA F. C. L.

Nos dias 15 e 16 de Julho deste ano tiveram lugar na Faculdade de Ciências de Lisboa as provas de doutoramento em Ciências Matemáticas dos assistentes daquela Faculdade José Tiago de Oliveira e Raimundo de Oliveira Vicente. O primeiro candidato apresentou a dissertação «Residuais de Sistemas e radicais de anéis» que foi arguida pelos Profs. Almeida Costa e Arnaldo Madureira. A dissertação do segundo candidato versou o tema «A influência da constituição do interior da Terra no valor das nutações» e teve como arguentes os Profs. Francisco Nazaré e Manuel dos Reis.

Ambos os doutorandos foram aprovados com a classificação de dezoito valores.

A «Gazeta de Matemática» felicita os novos Doutores.

J. J. D.

CONGRESSO INTERNACIONAL DOS MATEMÁTICOS 1958

Em Edimburgo, de 14 a 21 de Agosto de 1958, sob o patrocínio das Municipalidade e Universidade de Edimburgo e da Sociedade Real de Londres, realizar-se-á o Congresso Internacional dos Matemáticos.

A Comissão de Organização propõe-se convidar certo número de matemáticos para realizarem conferências de 1 a $1^1/_2$ horas. Haverá também reuniões cotidianas consagradas à apresentação de comunicações de $^1/_4$ hora.

Os membros do Congresso que desejarem apresentar comunicações fá-lo-ão a partir de Janeiro de 1958.

O Congresso terá oito secções:

1 — Lógica e fundamentos das matemáticas
2 — Álgebra e teoria dos números
3 — Análise
4 — Topologia
5 — Geometria
6 — Cálculo das probabilidades e Estatística
7 — Matemáticas aplicadas, física matemática e análise numérica
8 — História e ensino.

O Comité prevê durante o Congresso uma série de recepções, reuniões de ordem recreativa, excursões, etc.

O Congresso comportará duas categorias de membros:

Membros ordinários, tendo o direito de participar em todas as actividades do Congresso e de receber as Comunicações.

Membros associados, acompanhando os membros ordinários e gosando de todos os privilégios excepto os de participar nas reuniões científicas e receber as Comunicações.

Mais informações poderão ser obtidas quer por intermédio da Gazeta de Matemática quer pela Secretaria do Congresso:

Secretário — Frank Smithies, Mathematical Institute, 16, Chambers Street, Edinburgh, 1, Scotland.

J. G. T.

MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAME DE FREQUÊNCIA E FINAIS

MATEMÁTICAS GERAIS

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 2.° exame de frequência ordinário — 29-6-57.

4311 — *a*) Defina limite mínimo e limite máximo duma sucessão u_n e diga em que caso estes limites coincidem, respectivamente, com o limite inferior e o limite superior de (u_n). Quando não se dá essa coincidência quais são os limites de Weierstrass de (u_n)? Calcule

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n \log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\log n} \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{n!}{\log n}}$$

b) Enuncie a condição necessária e suficiente de convergência duma série e prove a sua necessidade. Enuncie os critérios da raíz e da razão, demonstre este último e exemplifique com a série harmónica que as condições $\sqrt[n]{a_n} < 1$ e $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ não garantem convergência.

Se $\mu = \overline{\lim} \sqrt[n]{a_n}$, indique os valores de μ para os quais a série $\Sigma a_n (x - x_0)^n$ é: (1) convergente para todos os valores de x; (2) divergente para todo o $x \neq x_0$; (3) convergente em certo intervalo (a, b) (indique os valores de a e b).

Estude a natureza da série $\Sigma a^{\log n}$ (considere os casos $a > 1$ e $a < 1$).

R: a) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\log n} = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{\log n} =$
$= \dfrac{1}{\infty} = 0$. *Aplicando um teorema de* Cauchy, *calcule-se*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \quad com \quad x_n = \frac{n!}{n^n \log n}.$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)!\, n^n \log n}{(n+1)^{n+1} \log (n+1)\, n!} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{\log n}{\log (n+1)} = \frac{1}{e}.$$

Como este limite existe, então $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{x_n} = \dfrac{1}{e}$.

b) *Com* $a > 1$ *o termo geral* $u_n = a^{\log n}$ *é um infinitamente grande e a série é divergente.*

Considerando $a < 1$, *aplique-se o critério de* Raabe·

$$\lim_{n \to \infty} n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n \to \infty} n \left[\frac{a^{\log n}}{a^{\log (n+1)}} - 1\right] =$$

$$= \lim_{n \to \infty} n \left[a^{\log \frac{n}{n+1}} - 1\right] = \lim_{n \to \infty} n \left[e^{\log a \cdot \log \frac{n}{n+1}} - 1\right] =$$

$$= \lim_{n \to \infty} n\, n^{-1} \log a \log \frac{n}{n+1} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} n^{-1} \log a \log \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = -\log a = \log \frac{1}{a}.$$

Se $\log \frac{1}{a} > 1$ *ou* $a < \frac{1}{e}$, *a série é convergente; se* $\log \frac{1}{a} < 1$ *ou* $a > \frac{1}{e}$ *a série é divergente. Se* $a = \frac{1}{e}$ *é fácil ver que* $\Sigma a^{\log n}$ *se reduz à série* $\Sigma \frac{1}{n}$ *divergente.*

Resumindo: a série é convergente se $a < \frac{1}{e}$ *e divergente se* $a > \frac{1}{e}$.

4312 – Enuncie e demonstre o teorema que garante a continuidade de $F(x) = \Phi[f(x)]$ em $x = a$. Mostre que, existindo $f'(a)$ e $\Phi'(b)$, é $F'(a) = \Phi'(b) \cdot f'(a)$, com $b = f(a)$, e diga como pode concluir desta regra que a derivada de uma função é a inversa aritmética da derivada da função inversa.

Calcule

$$P \frac{x^3 + x^2 - x + 1}{(x-1)^2 (x^2+1)}.$$

b) Demonstre o teorema de Lagrange para as funções regulares e indique a sua interpretação geométrica.

Escreva a fórmula de Taylor para a função $f(x)$, referente a $x = a$, e mostre a sua aplicação ao estudo dos máximos e mínimos.

R: *Decomponha-se prèviamente a fracção proposta em elementos simples.*

$$\frac{x^3 + x^2 - x + 1}{(x-1)^2 (x^2+1)} = \frac{a_0 + a_1 (x-1)}{(x-1)^2} + \frac{S_0}{x^2+1}.$$

O polinómio $a_0 + a_1 (x - 1)$ *obtem-se, ordenando segundo as potências crescentes de* $(x - 1)$ *o numerador e o denominador da fracção auxiliar* $R_1(x) = \dfrac{x^3 + x^2 - x + 1}{x^2 + 1}$ *e efectuando a divisão algébrica até obter um cociente do grau* 1. *Ter-se-á então* $R_1(x) = \dfrac{2 + 4(x-1) + \cdots}{2 + 2(x-1) + \cdots}$ *que permite obter o polinómio* $1 + (x - 1)$.

Para obter S_0 *(expressão linear) considere-se a fracção auxiliar* $R_\Delta(x) = \dfrac{x^3 + x^2 - x + 1}{(x-1)^2}$ *e proceda-se à ordenação do numerador e denominador segundo as potências crescentes de* $\Delta = x^2 + 1$. *Obtem-se*

$$R_\Delta(x) = \frac{-2x + \cdots}{-2x + \cdots} \quad e \quad S_0 = 1.$$

Então

$$\frac{x^3 + x^2 - x + 1}{(x-1)^2 (x^2+1)} = \frac{1 + (x-1)}{(x-1)^2} + \frac{1}{x^2+1}$$

$$e \quad P \frac{x^3 + x^2 - x + 1}{(x-1)^2 (x^2+1)} = P \frac{1}{(x-1)^2} + P \frac{1}{x-1} +$$

$$+ P \frac{1}{x^2+1} = -\frac{1}{x-1} + \log |x - 1| + \operatorname{arctg} x + C.$$

4313 – Responda a uma das seguintes alíneas:

a) Deduza o teorema dos acréscimos finitos para a função de duas variáveis $f(x, y)$.

Escreva a fórmula que dá a derivada de $f(x, y)$ ao longo da curva de equações $x = \varphi(t)$ e $y = \psi(t)$ e diga o que é a derivada de $f(x, y)$ segundo uma direcção r.

Qual a condição necessária e suficiente para que a derivada de $f(x,y)$ em $P(a,b)$ se anule em todas as direcções?

b) Demonstre o teorema fundamental do Cálculo Integral.

Estabeleça as diferenças e analogias entre o integral indefinido e a função primitiva de $f(x)$ no intervalo (a,b).

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 2.° exame de frequência extraordinário — 8-7-957.

4314 — *a*) Enuncie a condição necessária e suficiente de convergência de uma sucessão e prove que sucessão monótona limitada verifica essa condição.

Prove que $\sqrt[n]{P_1 \cdot P_2 \cdots P_n} \to P$ quando $P_n \to P$ e aplique esta proposição ao cálculo de

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1-\frac{a}{1}\right)\left(1-\frac{a}{2}\right)^2 \cdots \left(1-\frac{a}{n}\right)^n}.$$

b) Demonstre que se obtem uma série convergente, multiplicando os termos de uma série convergente por números positivos decrescentes.

Defina série absolutamente convergente e prove que a sua soma é independente da ordem dos seus termos.

Supondo que $\frac{u_n}{a_n}$ tende para limite finito com u_n qualquer e $a_n > 0$ prove que $\sum u_n$ é absolutamente convergente se $\sum a_n$ for convergente.

Calcule S_n para a série $\sum \log \frac{n+1}{n}$ e conclua que ela é divergente.

R: a) $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1-\frac{a}{1}\right)\left(1-\frac{a}{2}\right)^2 \cdots \left(1-\frac{a}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{a}{n}\right)^n = e^{-a}.$$

b) $$S_n = \sum_1^n [\log\,(n+1) - \log\,n] = \log\,(n+1).$$

Como $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$, *a série é divergente.*

4315 — Demonstre que função contínua num intervalo não passa de um valor a outro sem passar pelos valores intermédios.

Defina oscilação da função $f(x)$ em $x=a$ e prove que em ponto de continuidade a oscilação é nula. A recíproca é verdadeira? Porquê?

Prove que num ponto interior de máximo ou mínimo de $f(x)$ a derivada $f'(x)$ é nula ou infinita de duplo sinal.

Determine intervalos de monotonia, extremos e sentido da concavidade de $y = \frac{x}{x-1}$.

R: *Como* $y = 1 + \frac{1}{x-1}$ *vem fàcilmente*

$$y' = -\frac{1}{(x-1)^2} < 0$$

o que indica que a função é sempre decrescente.

$y'' = \frac{2}{(x-1)^3}$ *e portanto a concavidade está voltada para baixo em* $(-\infty, 1)$ *e para cima em* $(1, +\infty)$.

4316 — Prove que $f(x,y)$ é contínua num ponto onde tem derivadas finitas desde que em torno desse ponto uma das derivadas se conserve limitada.

Considerando $x = \varphi(u)$ e $y = \psi(u)$ diferenciáveis em $u = u_0$ e $f(x,y)$ diferenciável em $P(a,b)$ $(a = \varphi(u_0), b = \psi(u_0))$ escreva a expressão da primeira derivada de $F(u) = f[\varphi, \psi]$ em $u = u_0$. Deduza a expressão da segunda derivada.

Enuncie as condições em que a equação $f(x,y) = 0$ define uma função implícita $y = \varphi(x)$ na vizinhança do ponto $P(a,b)$ e prove que, sendo $f(x,y)$ diferenciável em $P_1(a_1, b_1)$ e $f'_y(a_1, b_1) \neq 0$, então $y = \varphi(x)$ é diferenciável para $x = a_1$.

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — Exame final — Época de Julho — (1.ª chamada) — 15-7-1957.

4317 — 1) Separe os zeros de $x^3 - 3x^2 - 4x + 13$, utilizando a sucessão de Fourier e calcule o menor pelo método de Newton, em primeira aproximação.

2) Sejam $A^1, \cdots A^n$ e B $n+1$ vectores do espaço a n dimensões. Mostre que o último é composição linear dos primeiros sempre que estes sejam independentes. Qual é a condição de independência?

Admitida a independência quais são os valores de λ_i na composição $B = \lambda_i A^i$?

R: *Os limites excedente e deficiente, calculados pelo método de* Newton, *são, respectivamente,* $L = 3$ *e* $l = -3$.

Construindo o quadro

	−3	−2	−1	0	1	2	3
f	−	+	+	+	+	+	+
f′	+	+	+	−	−	−	+
f″	−	−	−	−	0	+	+
f‴	+	+	+	+	+	+	+
var.	3	2	2	2	2	2	0

verifica-se que a sucessão de Fourier *perde uma variação no intervalo* $(-3, -2)$ *e duas no intervalo* $(2, 3)$.

Então existe um zero no primeiro intervalo e dois ou nenhum no segundo.

Como em $(2,3)$ $f'' \neq 0$, *todas as condições de* Fourier *são necessárias mas, como se verificam, nada esclarecem.*

Calculando o zero da primeira derivada em $(2,3)$, *que é* $x' \approx 2,5$, *conclui-se pela existência de dois zeros para* $f(x)$ *pois* $f(2) > 0$ *e* $f(2,5) < 0$.

Existem assim três zeros reais nos intervalos $(-3,-2)$, $\left(2,\frac{5}{2}\right)$ *e* $\left(\frac{5}{2},3\right)$.

A menor raiz, calculada em primira aproximação, é

$$x_1 = -3 - \frac{f(-3)}{f'(-3)} = -3 + \frac{29}{41} = -\frac{94}{41} = -2,2\cdots$$

2) *Representando por* A *a matriz* $[A^1 A^2 \cdots A^n]$, *a condição de independência é* $|A| \neq 0$. *Considerando o sistema* $AX = B$, *os valores de* λ *serão* $(x'_1, x'_2, \cdots x'_n)$, *solução do sistema.*

4318 — Deduza o desenvolvimento em série de $\log\left(\frac{1+x}{x}\right)$, segundo as potências de $1/x$ e aproveite-o para achar o verdadeiro valor de

$$x\left[x\log\left(\frac{x+1}{x}\right)-1\right] \quad \text{para } x=\infty.$$

R:
$$\log\left(\frac{1+x}{x}\right) = \log\left(1+\frac{1}{x}\right) =$$
$$= \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{4x^4} + \cdots \qquad |x| > 1$$
$$\lim_{x\to\infty} x\left[x\log\left(\frac{x+1}{x}\right)-1\right] =$$
$$= \lim_{x\to\infty} x\left[1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{3x^2} - \frac{1}{4x^3} + \cdots - 1\right] =$$
$$= \lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3x} - \cdots\right) = -\frac{1}{2}.$$

4319 — Considere a função

$$f(x,y) = xy^2 \operatorname{sen}\frac{1}{y}, \; f(0,0) = 0$$

calcule $f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$ e mostre que $f''_{xy}(0,0) = f''_{yx}(0,0)$.

Calcule também $f''_{xy}(x,y)$ em qualquer ponto distinto da origem e mostre que esta derivada rectangular é descontínua nesse ponto. Que conclui deste resultado sobre a validade da recíproca do teorema de Schwarz? Porquê?

R:
$$f'_x(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = 0$$
$$f'_y(0,0) = \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = 0$$
$$f'_x(0,y) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,y)-f(0,y)}{x} = y^2 \operatorname{sen}\frac{1}{y}$$
$$f'_y(x,0) = \lim_{y\to 0}\frac{f(x,y)-f(x,0)}{y} = 0$$
$$f''_{xy}(0,0) = \lim_{y\to 0}\frac{f'_x(0,y)-f'_x(0,0)}{y} = 0$$
$$f''_{yx}(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{f'_y(x,0)-f'_y(0,0)}{x} = 0$$

Como $f''_{xy}(x,y) = 2y \operatorname{sen}\frac{1}{y} - \cos\frac{1}{y}$, *verifica-se que* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f''_{xy}(x,y)$ *não existe e portanto* $f''_{xy}(x,y)$ *é descontínua em* $(0,0)$. *A recíproca do teorema de* Schwarz *não é verdadeira pois, como se vê, pode dar-se a igualdade das derivadas mistas num ponto sem que* $f''_x(x,y)$ *seja contínua nesse ponto.*

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — Exame final — Epoca de Julho — (2.ª Chamada) — 19-7-57.

4320 — 1) A função $\Gamma(x)$ verifica a propriedade $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

Utilize-a para provar que $\Delta\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x)$ e para achar a função cuja primeira diferença é $\log x$ (considere $h=1$).

2) Determine m por forma que o sistema homogéneo

$$\begin{aligned} x + y + z + t &= 0\\ 2x + 3y + z - t &= 0\\ x + 2y - z + t &= 0\\ x + 2y \qquad + mt &= 0 \end{aligned}$$

tenha soluções não nulas. Qual é neste caso o seu grau de indeterminação? Quantas soluções independentes existem?

R: 1) $\Delta\Gamma(x) = \Gamma(x+1) - \Gamma(x) = x\Gamma(x) - \Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x)$.

Como $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, *tomando logaritmos em ambos os membros obtem-se* $\log\Gamma(x+1) = \log x + \log\Gamma(x)$ *ou* $\Delta\log\Gamma(x) = \log x$. *A função pedida é pois* $\log\Gamma(x)$.

2) *A condição para que admita soluções não nulas é que*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 1 & -1\\ 1 & 2 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 0 & m \end{vmatrix} = 0$$

o que dá $m = -2$. *Como existe um determinante de 3.ª ordem diferente de zero o grau de indeterminação é* 1, *existindo assim* 1 *solução independente.*

4321 — 1) Determine os valores de α e β por forma que a função $x^6 + \alpha x^5 + \beta x^4$ tenha extremos para $x=2$ e $x=3$. Qual é a natureza desses extremos?

2) Calcule $P\,\frac{x^3}{1+x^2}$ e $P e^x \cdot x^2$.

3) Desenvolva em série de MAC LAURIN a função $\frac{1}{(x+1)\,(x+2)}$ e determine o intervalo onde é válido esse desenvolvimento.

R: 1) *Calculando a derivada* $6\,x^5+5\,\alpha\,x^4+4\,\beta\,x^3$, *terá de ser* $\begin{cases} 6\cdot(2)^2+5\,\alpha\cdot 2+4\,\beta=0, \\ 6\cdot(3)^2+5\,\alpha\cdot 3+4\,\beta=0\end{cases}$ *sistema que tem a solução* $\alpha=-6 \quad \beta=9$.

A segunda derivada $30\,x^4-120\,x^3+108\,x^2$ *é negativa para* $x=2$ *e positiva para* $x=3$. *Assim* $x=2$ *é um máximo e* $x=3$ *um mínimo*.

2) $P\frac{x^3}{1+x^2}=P\left(x-\frac{x}{1+x^2}\right)=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\log(1+x^2)+C$ $\quad P\,e^x\,x^2=e^x\,x^2-2\,P\,e^x\,x=e^x\,x^2-2\,(e^x\,x-P\,e^x)=e^x\,x^2-2\,e^x\,x+e^x+C$.

3) $$\frac{1}{(x+1)\,(x+2)}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}=$$
$$=\sum_0^\infty(-1)^n\,x^n-\sum_0^\infty(-1)^n\,\frac{x^n}{2^{n+1}}=$$
$$=\sum_0^\infty\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)(-1)^n\,x^n\,.$$

O intervalo onde é válido o desenvolvimento é $(-1\,,1)$.

4322 – Considere o domínio limitado pela curva simples fechada $\Gamma\equiv\varphi(x\,,y)=0$, interceptada em dois pontos pela recta $r\equiv\begin{cases}x=\alpha\,t\ (\alpha^2+\beta^2=1)\,.\\ y=\beta\,t\end{cases}$ Sendo $z=f(x\,,y)$ função diferenciável nesse domínio e constante sobre Γ, prove que a sua derivada ao longo da recta r se anula pelo menos uma vez no domínio considerado.

Sendo k o valor constante assumido por $z=f(x\,,y)$ sobre Γ, onde está situado $P(a\,,b)$ se na sua vizinhança se verificam as condições de existência de uma função implícita para a equação $f(x\,,y)-k=0$?

R: *Sendo* t_0 *e* t_1 *os valores do parâmetro* t *correspondentes à intersecção de* r *com* Γ *tem-se, em virtude da hipótese,* $f(\alpha\,t_0\,,\beta\,t_0)=f(\alpha\,t_1\,,\beta\,t_1)$. *A derivada de* $f(x\,,y)$ *segundo a direcção* r, $\frac{\partial f}{\partial x}\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\beta$, *anular-se-á (teorema de* ROLLE) *pelo menos uma vez entre* t_0 *e* t_1.

$P(a\,,b)$ *estará situado sobre* Γ.

Enunciados e soluções dos números 4311 a 4322 de Fernando de Jesus.

ANÁLISE MATEMÁTICA

I. S. C. E. F. – ANÁLISE MATEMÁTICA – **Exame final – 20-7-56.**

4323 – *a*) Faça no integral $\int_0^\pi \frac{x\,\mathrm{sen}^3 x}{(2-\mathrm{sen}^2 x)^2}\,dx$ a mudança de variável definida por $x+y=\pi$ e calcule-o.

b) Estude a convergência de

$$I_n=\int^a\frac{x^n}{\sqrt{a\,x-x^2}}\,dx$$

Estabeleça para I_n uma fórmula de recorrência; relacione I_n com a função Beta; calcule I_0.

R: *Por ser* $d\,x+d\,y=0$ *vem*

$$-\int_\pi^0\frac{(\pi-y)\,sen^3(\pi-y)}{[2-sen^2(\pi-y)]^2}\,d\,y=\int_0^\pi\frac{(\pi-y)\,sen^3\,y}{(2-sen^2\,y)^2}\,d\,y=$$
$$=\pi\int_0^\pi\frac{sen^3\,y}{(2-sen^2\,y)^2}\,d\,y-\int_0^\pi\frac{y\cdot sen^3\,y}{(2-sen^2\,y)^2}\,d\,y\,.$$

Calculemos $\pi\int_0^\pi\frac{sen^3\,y}{(2-sen^2\,y)^2}\,d\,y$ *fazendo* $cos\,y=t$ *monótona no intervalo* $(0\,,\pi)$; *vem* $-sen\,y\,d\,y=d\,t$ *e então o integral transforma-se em*

$$-\pi\int_1^{-1}\frac{(1-t^2)\,sen\,y}{(2-1+t^2)^2}\,\frac{d\,t}{sen\,y}=$$
$$=\pi\int_{-1}^1\frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}\,d\,t=\pi\int_{-1}^1\frac{1+t^2-2\,t^2}{(1+t^2)^2}\,d\,t=$$
$$=\pi\int_{-1}^1\frac{d\,t}{1+t^2}-\pi\int_{-1}^1 t\cdot 2\,t\,(1+t^2)^{-2}\,d\,t=$$
$$=\pi\int_{-1}^{+1}\frac{d\,t}{1+t^2}+\pi\left[\frac{t}{1+t^2}\right]_{-1}^{+1}-\pi\int_{-1}^{+1}\frac{d\,t}{1+t^2}=\pi$$

Então, o integral dado, representado por I, *tem o valor*

$$I=\int_0^\pi\frac{(\pi-y)\,sen^3\,y}{(2-sen^2\,y)^2}\,d\,y=\pi-I\qquad\text{donde } I=\frac{\pi}{2}.$$

No integral $I_n=\int^a\frac{x^n}{\sqrt{a\,x-x^2}}\,d\,x$, *quando* x *se aproxima de* a, *a função não se conserva limitada*.

Já o mesmo não sucede quando x *se aproxima de zero, porque sendo regulares o numerador e o denominador, em qualquer intervalo* (a, x), *com a regra de* Cauchy *tem-se*

$$\lim_{x=0+} \frac{x^n}{\sqrt{a x - x^2}} = \lim_{x=0+} \frac{n x^n}{(a - 2x)\,\frac{1}{2}\,(a x - x^2)^{-1/2}} = 0.$$

Atribuindo a função integranda, no ponto zero, o seu valor verdadeiro, isto é, defiuindo-a com continuidade o integral I_n *só é impróprio devido ao extremo superior* $x = a$.

Sabe-se que

$$\int_a^x \frac{dx}{(a-x)^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}\left[\frac{1}{(a-X)^{\alpha-1}} - \frac{1}{a^{\alpha-1}}\right]$$

portanto $\int_0^a \frac{dx}{(a-x)^\alpha}$ *é convergente com* $\alpha < 1$, *divergente com* $\alpha \geqslant 1$.

Daqui se deduzem as seguintes proposições.

Com $0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{M}{(a-x)^\alpha}$ *tem-se* $\int_0^a f(x)\,dx$ *convergente se* $\alpha < 1$.

Com $\lim_{x=a} f(x)\,(a-x)^\alpha = L$ (*finito*) *e* $\alpha < 1$, *então* $\int_0^a f(x)\,dx$ *é convergente.*

Aplicaremos esta última:

$\lim_{x=a} x^{n-\frac{1}{2}}\,(a-x)^{\alpha-\frac{1}{2}} = L$ (*finito*) *se* $\alpha = \frac{1}{2}$ (*qualquer que seja* n).

Então, o integral $I_n = \int_0^a x^{n-\frac{1}{2}}\,(a-x)^{-\frac{1}{2}}\,dx$ *é convergente.*

Para achar uma fórmula de recorrência, temos

$$I_n = \int_0^a \frac{x^{n-\frac{1}{2}}}{\sqrt{a-x}}\,dx = \int_0^a -2\,x^{n-\frac{1}{2}}\,\frac{-1}{2\sqrt{a-x}}\,dx =$$

$$= \left[-2\,x^{n-\frac{1}{2}}\sqrt{a-x}\right]_0^a + 2\left(n-\tfrac{1}{2}\right)\int_0^a x^{n-\frac{3}{2}}\sqrt{a-x}\,dx$$

$$+ 2\left(n - \frac{1}{2}\right)\int_0^a x^{n-\frac{3}{2}}\sqrt{a-x}\,dx.$$

Vem, então

$$I_n = 2\left(n - \frac{1}{2}\right)\int_0^a \frac{(a-x)\,x^{n-\frac{3}{2}}}{\sqrt{a-x}}\,dx =$$

$$= 2\left(n - \frac{1}{2}\right)\int_0^a \frac{a\,x^{n-1}}{\sqrt{a x - x^2}}\,dx -$$

$$- 2\left(n - \frac{1}{2}\right)\int_0^a \frac{x^n}{\sqrt{a x - x^2}}\,dx$$

ou

$$I_n = \frac{2n-1}{2n}\,a\,I_{n-1} \qquad (n \geqslant 1)$$

Tem-se

$$\beta(a, b) = \int_0^1 x^{a-1}\,(1-x)^{b-1}\,dx$$

pondo em I_n, $x = a t$ *vem:* $I_n = \int_0^a x^{n-\frac{1}{2}}\,(a-x)^{-\frac{1}{2}}\,dx =$

$$= \int_0^1 a^n\,t^{n-\frac{1}{2}}\,(1-t)^{-\frac{1}{2}}\,dt$$

donde

$$I_n = a^n \cdot \beta\left(n + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Calculemos $I_0 = \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{x(a-x)}}$ *fazendo a mudança de variáveis* $\sqrt{x(a-x)} = x t$ *ou* $x = \frac{a}{1+t^2}$ *cuja derivada é* $\frac{dx}{dt} = -\frac{2at}{(1+t^2)^2}$. *Daqui resulta que a função* $x = \frac{a}{1+t^2}$ *é decrescente de* 0 a $+\infty$ *e, tranforma este intervalo* $(0, +\infty)$ *no intervalo* $(a, 0)$. *Vem, portanto:*

$$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{x(a-x)}} = -\int_{+\infty}^0 \frac{2\,dt}{1+t^2} =$$

$$= 2\left[\mathit{artcg}\ t\right]_0^{+\infty} = 2\,\mathit{artcg}\,1 = \frac{\pi}{2}.$$

4324 — Calcule a área da parede cilindrica do sólido limitado por

$$x^2 + z^2 - 2x = 0 \quad \text{e por} \quad x^2 + z^2 - y^2 = 0.$$

R: $x^2 + z^2 - 2x = 0$ *representa um cilindro de geratrizes paralelas a* $\overrightarrow{OY}$; *podemos pôr* $(x-1)^2 + z^2 = 1$.

A equação $x^2 + z^2 - y^2 = 0$ *dá com* $y = c$ *circunferências, e representa pois uma superfície de revolução em torno de* $\overrightarrow{OY}$; *como a meridiana é o par de rectas reais* $x^2 - y^2 = 0$, *trata-se duma superfície cónica de revolução em torno de* $\overrightarrow{OY}$.

Os pontos comuns às duas superfícies estão no cilindro $y^2 - 2x = 0$ (*pontos das duas superfícies com a mesma cota* z) *obtido, eliminando* z. *Estes pontos projectam-se, sobre* OXY, *na parábola de equação* $y^2 = 2x$. *Os pontos da parede cilindrica do sólido projectam-se num domínio* Δ *do plano* OXY, *que é o sector determinado na parábola* $y^2 = 2x$ *pela recta* $x = 2$.

Calcule-se a área da parte superior da parede cilindrica. A normal ao cilindro tem parâmetros directores que se vão buscar à equação do plano tangente

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial F}{\partial y}(Y - y) + \frac{\partial F}{\partial z}(Z - z) = 0;$$

$$2(x-1)(X-x) + 2z(Z-z) = 0$$

e são:

$$2(x-1) \qquad 0 \qquad 2z$$

Orientando a normal de modo a ser, do primeiro quadrante, o seu ângulo com $\overrightarrow{OZ}$, *temos os cosenos directores (normal exterior)*

$$\frac{(x-1)}{+\sqrt{(x-1)^2+z^2}}, \quad 0 \quad , \frac{z}{+\sqrt{(x-1)^2+z^2}}.$$

Temos, com $0<\gamma<\frac{\pi}{2}$, $\cos\gamma = \dfrac{z}{+\sqrt{(x-1)^2+z^2}} \geqslant 0$.

Finalmente, tem-se

$$A = 2\iint_\Delta \frac{dx\,dy}{\cos\gamma} = 2\iint_\Delta \frac{\sqrt{(x-1)^2+z^2}}{z}\,dx\,dy$$

onde $z = +\sqrt{2x-x^2}$, *e* Δ *é o domínio plano atrás indicado.*

$$A = 2\iint_\Delta \frac{dx\,dy}{\sqrt{2x-x^2}} = 2\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}\int_{-\sqrt{2x}}^{+\sqrt{2x}} dy =$$

$$= 4\int_0^2 \sqrt{\frac{2x}{2x-x^2}}\,dx = 4\sqrt{2}\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2-x}}$$

$$A = -8\sqrt{2}\int_0^2 \frac{-dx}{2\sqrt{2-x}} = 16.$$

4325 — Mostre que, se a curva definida por $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$ for plana, o Wronskiano

$$W = \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}$$

é nulo.

Prove que, quaisquer que sejam os coeficientes $\alpha_2, \alpha_1, \alpha_0$, $\beta_2, \beta_1, \beta_0$, $\gamma_2, \gamma_1, \gamma_0$, a curva definida por

$$\begin{cases} x = \alpha_2 t^2 + 2\alpha_1 t + \alpha_0 \\ y = \beta_2 t^2 + 2\beta_1 t + \beta_0 \\ z = \gamma_2 t^2 + 2\gamma_1 t + \gamma_0 \end{cases}$$

é plana. Determine o plano da curva. Estude em particular o caso

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{\beta_2}{\beta_1} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1}.$$

R: *Se a curva é plana, as funções satisfazem* $Ax+By+Cz+D=0$ *onde* A, B, C *não simultâneamente nulos em nenhum* t *do intervalo considerado; Derivando em ordem a* t, *vem* $Ax'+By'+Cz'+D=0$ *qualquer que seja* t *no intervalo, com* A, B, C *não nulos, sempre os mesmos; as funções* x', y', z' *são linearmente dependentes, no intervalo considerado, e vem a condição bem conhecida* $W(x'\,y'\,z') \equiv 0$.

O plano osculador da curva, é, sempre o mesmo, qualquer que seja t

$$\begin{vmatrix} 2\alpha_2 t + 2\alpha_1 & 2\beta_2 t + 2\beta_1 & 2\gamma_2 t + 2\gamma_1 \\ 2\alpha_2 & 2\beta_2 & 2\gamma_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$(\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1)(x-x_0) + (\alpha_2\gamma_1 - \alpha_1\gamma_2)(y-y_0) + \\ + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)(z-z_0) = 0$$

sendo para isso necessário que um dos menores: $\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1$, $\alpha_2\gamma_1 - \alpha_1\gamma_2$, $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1$ *seja diferente de zero. Se são todos nulos, é:* $\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1} = \dfrac{\beta_2}{\beta_1} = \dfrac{\gamma_2}{\gamma_1}$ *e tem-se directamente das equações*

$$\begin{cases} x = \alpha_1(k\,t^2 + 2t) + \alpha_0 \\ y = \beta_1(k\,t^2 + 2t) + \beta_0 \\ z = \gamma_1(k\,t^2 + 2t) + \gamma_0 \end{cases}$$

ou

$$\frac{x-\alpha_0}{\alpha_1} = \frac{y-\beta_0}{\beta_1} = \frac{z-\gamma_0}{\gamma_1}.$$

4326 — Integre a equação diferencial

$$y' - 1 = (x-y+1)^2 x.$$

R: *É uma equação de* Riccati, *admite visìvelmente o integral particular:* $x - y + 1 = 0$.

Para a resolver faça-se $u = x - y + 1$ *e vem*

$$\frac{du}{dx} = 1 - \frac{dy}{dx}$$

logo

$$-\frac{du}{dx} = u^2 x$$

$$-\frac{du}{u^2} = x\,dx \quad ou \quad \frac{1}{u} = \frac{x^2}{2} + C$$

e portanto

$$x - y + 1 = \frac{1}{\dfrac{x^2}{2} + C}.$$

I. S. C. E. F. — Análise Matemática — **Exame final — 18-10-56.**

4327 — *a*) Calcular o máximo volume dos elipsoides de revolução em torno de $\overrightarrow{OZ}$, cujos eixos somem um comprimento constante.

Indique a dedução da equação dos elipsoides; indique o cálculo do volume de qualquer deles e, em particular, o do volume máximo.

b) Se Δ é um domínio limitado, fechado, cubável, compreendido entre os planos $z=a$, $z=b$, e é cortado por $z=c\ (a\leqslant c\leqslant b)$ em figuras planas quadráveis de área $S(c)$, sabe-se que, o volume de Δ é dado por $\int_a^b S(z)\,dz$.

Enuncie a proposição generalizada ao espaço R_4 e calcule o hipervolume de

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{a^2}+\frac{x_3^2}{a^2}+\frac{x_4^2}{b^2}=1\,.$$

R: *Considere-se a elipse* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$ *e dê-se a rotação em tôrno de* $\overrightarrow{OZ}$ *obtem-se*

$$x^2+y^2=a^2\left(1-\frac{z^2}{b^2}\right)\quad ou\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1\,.$$

O volume é dado por $V=\int_{-b}^{b}\pi a^2\left(1-\frac{z^2}{b^2}\right)dz=$ $=\frac{4}{3}\pi\,a\,a\,b$.

Pondo $2(2a+b)=2K$, *vem*: $b=K-2a$, *e então*: $V=\frac{4}{3}\pi a^2(K-2a)$ *e determina-se o máximo desta função. Tem-se*

$$V'=-8\pi a\left(a-\frac{K}{3}\right)\qquad V''=\frac{8}{3}\pi K-16\pi a\,.$$

Há mínimo para $a=0$ *e máximo para* $a=\frac{K}{3}$

O elipsoide correspondente é: $\frac{x^2}{\left(\frac{K}{3}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{K}{3}\right)^2}+\frac{z^2}{\left(\sqrt{\frac{K}{3}}\right)^2}=1$, *e o volume:* $V=\frac{4}{3}\pi\frac{K}{3}\frac{K}{3}\cdot\sqrt{\frac{K}{3}}$.

Se Δ é um domínio de R_4, *limitado, fechado, mensurável, compreendido entre os hiperplanos* $x_4=a$, $x_4=b$, *e é cortado por* $x_4=c\ (a\leqslant c\leqslant b)$ *em sólidos tridimensionais cubáveis de volume* $V(c)$, *o hipervolume de Δ é dado por* $\int_a^b V(x_4)\,dx_4$ (*função* $V(x)$ *integrável no intervalo* (a,b)).

A equação

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{a^2}+\frac{x_3^2}{a^2}+\frac{x_4^2}{b^2}=1$$

é um elipsoide de R_4, *de revolução em torno de* OX_4; *os hiperplanos* $x_4=c$ *cortam-no segundo esferas de equação*

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=a^2\left(1-\frac{c^2}{b^2}\right)$$

com volume

$$V(c)=\frac{4}{3}\pi\left[a^2\left(1-\frac{c^2}{b^2}\right)\right]^{3/2}.$$

Então, o volume do elipsoide de R_4, *é dado por:*

$$V=\int_{-b}^{b}\frac{4}{3}\pi\left[a^2\left(1-\frac{x_4^2}{b^2}\right)\right]^{3/2}dx_4=$$
$$=\frac{4}{3}\pi a^3\int_{-b}^{b}\left(1-\frac{x_4^2}{b^2}\right)^{3/2}dx_4$$

Faça-se a substituição $x_4=b\,sen\,\varphi$, *monótona crescente* $(b>0)$ *no intervalo* $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$; *vem*

$$V=\frac{4}{3}\pi a^3\int_{-b}^{b}\left(1-\frac{x_4^2}{b^2}\right)^{3/2}dx_4=$$
$$=\frac{4}{3}\pi a^3 b\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}cos^4\varphi\,d\varphi\,.$$

Com integração por partes, tem-se

$$\int cos^4\varphi\,d\varphi=\frac{1}{4}\left[sen\,\varphi\,cos^3\varphi+\frac{3}{2}\varphi+\frac{3}{4}sen\,2\varphi\right]$$

e finalmente

$$V=\frac{1}{2}\pi^2 a^3 b$$

A hiperesfera $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=r^2$ *tem um volume dado por*

$$V=\frac{1}{2}\pi^2 r^4$$

que se deduz, do anterior, com $a=b=r$.

4328 — *a*) Calcular $\iint_\Delta (x+y-y^2)\,dx\,dy$, sendo Δ limitado por $x=y^2$ e $x+y=1$.

b) Calcule o mesmo integral depois da mudança de variáveis $\begin{cases}u=y^2-x\\ v=y\end{cases}$.

c) em que se transforma o domínio Δ?

d) indique o valor do integral duplo por meio dum integral curvilíneo ao longo da fronteira dum dos domínios, de preferência, do transformado de Δ; indique o sentido do percurso.

e) calcule directamente o integral curvilíneo.

R: *O domínio* Δ *é o sector da parábola* $x = y^2$ *determinado pela recta* $x + y = 1$; *as ordenadas dos pontos de encontro* $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$ *que representaremos por* y_0 *e* y_1.

Temos

$$\iint_\Delta (x+y-y^2)\,dx\,dy = \int_{y_0}^{y_1} dy \int_{y^2}^{1-y} (x+y-y^2)\,dx$$

$$= \int_{y_0}^{y_1} \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}y^2 + \frac{y^4}{2}\right) dy =$$

$$= \left[\frac{1}{2}y - \frac{1}{4}y^3 + \frac{y^5}{10}\right]_{y_0}^{y_1}$$

Temos $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \dfrac{1}{\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}} = -1$; *a transformação do plano* (x,y) *no plano* (u,v) *é unívoca, recíproca mas inversa porque o iacobiano é negativo.*

A parábola $x = y^2$ *transforma-se na recta* $u = 0$; *a recta* $x+y=1$ *transforma-se na parábola* $v^2 + v - (u+1) = 0$, *que tem o eixo na recta* $u = -\frac{1}{2}$ *e os seus pontos de* $u = -\frac{5}{4}$ *até* $u = +\infty$.

O domínio Δ *transforma-se, portanto, no domínio* Δ', *que é o sector da parábola* $v^2 + v - (u+1) = 0$ *determinado pela recta* $u = 0$.

O integral duplo, transforma-se em:

$$\iint_\Delta (x+y-y^2)\,dx\,dy = \iint_{\Delta'} (v-u) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv$$

$$= \iint_{\Delta'} (v-u)\cdot du \cdot dv = \int_{y_0}^{y_1} dv \int_{v^2+v-1}^{0} du =$$

$$= \int_{y_0}^{y_1} \left[-v(v^2+v-1) + \frac{(v^2+v-1)^2}{2}\right] dv =$$

$$= \left[\frac{1}{2}v - \frac{1}{4}v^3 + \frac{v^5}{10}\right]_{y_0}^{y_1}.$$

Para indicar o valor com um integral curvilínio, recorre-se à fórmula de Riemann:

$$\iint_\Delta \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy = \int_\Gamma Q(x,y)\,dy.$$

Vem

$$\iint_{\Delta'} (v-u)\,du\,dv = \int_{\Gamma'} \left(vu - \frac{u^2}{2}\right) dv$$

(Γ' *no sentido directo*).

Calcula-se o integral curvilínio, separando em dois integrais, um ao longo do eixo $\overrightarrow{OV}$ *e faz-se* $u = 0$ *na função, outro ao longo da parábola e faz-se* $u = v^2 + v - 1$ *na função*

$$\int_{\Gamma'} \left(vu - \frac{u^2}{2}\right) dv = \int_{y_0}^{y_1} 0 \cdot dv +$$

$$+ \int_{y_1}^{y_0} \left[v(v^2+v-1) - \frac{(v^2+v-1)^2}{2}\right] dv =$$

$$= \left[\frac{1}{2}v - \frac{1}{4}v^3 + \frac{v^5}{10}\right]_{y_0}^{y_1}.$$

4329 — Resolva a equação diferencial: $yy' - xy'^2 - y'^3 = 0$.

R: $y'(y - xy' - y'^2) = 0$ *donde* $y' = 0$ *o que dá* $y = c$ *e também* $y - xy' - y'^2 = 0$. *Pondo* $y' = p$, *vem:*

$$y - xp - p^2 = 0$$

e derivando em ordem a x: $p - p - x\dfrac{dp}{dx} - 2p\dfrac{dp}{dx} = 0$

ou

$$(x - 2p)\frac{dp}{dx} = 0 \qquad p = c$$

que conduz ao integral geral $y - xc - c^2 = 0$ *e ao integral particular* $y - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x^2 = 0$.

O integral geral da equação proposta é:

$$(y - c)\cdot(y - xc - c^2) = 0$$

Enunciados e soluções dos números 4323 a 4329 de J. Ribeiro de Albuquerque.

ÁLGEBRA SUPERIOR

F. C. L. — Álgebra Superior — Exame final — (2.ª chamada) — 7-1955.

4330 — **Mostre que a característica duma matriz simétrica real é igual ao número de valores próprios significativos dessa matriz.**

4331 — **Seja $f(z)$ um polinómio de grau n e α um número real ou imaginário diferente de n. Mostre que se todos os zeros de $f(z)$ se encontram no interior duma circunferência C, toda e qualquer raiz z da equação:**

$$F(z) = \alpha f(z) - z f'(z) = 0$$

pode pôr-se na forma:

$$z = \frac{\alpha}{\alpha - n}\xi$$

onde ξ é um ponto interior a C.

4332 — Diz-se que o módulo $\mathfrak{M}$ é ligado a $\mathfrak{S}_n$ (grupo simétrico) se para:

a) $m \in \mathfrak{M}$ e $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ se tem $m^\sigma \in \mathfrak{M}$.

b) $(m\sigma)\tau = m \cdot \sigma\tau$ com $\tau \in \mathfrak{S}_n$ (associativa).

c) $(m + m')\sigma = m\sigma + m'\sigma$ (distributiva).

d) $m\varepsilon = m$, ε elemento unidade de $\mathfrak{S}_n$.

e) Se os elementos de $\mathfrak{S}_n$ são automorfismos de $\mathfrak{M}$.

f) $z \in \mathfrak{M}$ é simétrico se $z\sigma = z$.

g) $z \in \mathfrak{M}$ é anti-simétrico se $z\sigma = \pm z$ consoante σ é permutação par ou impar.

Provar:

a) z é simétrico se e só se $z\tau = z$ para qualquer transformação τ.

b) z é anti-simétrico se $z\tau = -z$ para qualquer τ.

c) o elemento $\Sigma \pm z\sigma$ com $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ é anti-simétrico.

4333 — Dividir a matriz $\begin{bmatrix} x^2+3 & x & 1 \\ x^3 & 2 & x^2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

pela matriz $\begin{bmatrix} x-2 & 0 & 0 \\ 0 & x-2 & 0 \\ 0 & 0 & x-2 \end{bmatrix}$.

4334 — Partindo do conhecimento da noção de elementos associados mostrar que:

a) se (a, b) e (a, c) são associados da unidade, $(b\,a, b)$ também o é.

b) (a, b) e (a, c) sendo associados também o é $(a, b\,c)$.

c) (a, b) e (c, d) são associados desde que o seja $(a\,c, b\,d)$.

GEOMETRIA SUPERIOR

F. C. P. — Geometria Superior — **Exame final — 7-957.**

4335 — Seja E um conjunto arbitrário, e designem X e Y partes de E^2. Representemos por $X \circ Y$ a totalidade dos elementos (a, b) de E^2 tais que existe em elemento $c \in E$ para o qual $(a, c) \in X$ e $(c, b) \in Y$. Mostrar que é *associativa* a lei de composição assim definida sobre $P(E^2)$.

4336 — Seja E um espaço vectorial de dimensão finita. Mostrar que, sendo f e g dois endomorfismos de E tais que $g \circ f = I$ (I, identidade), então g e f possuem inversas.

4337 — Mostrar que, se uma parte X de um espaço vectorial E é uma variedade linear afim, toda a recta que contem dois pontos distintos de X está contida em X.

4338 — Num espaço vectorial real E chama-se *cone* de vértice x_0 toda a parte X de E que é reunião de semi-rectas, abertas ou fechadas, de origem x_0. Mostrar que, para que um cone C de vértice 0 seja *convexo*, é necessário e suficiente que, quaisquer que sejam x e y em C, se tenha $x + y \in C$.

BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de Matemática de que os Autores ou Editores enviarem dois exemplares à Redacção.

119 — Franklin Guerra — **Análise Matricial das Redes e Máquinas Eléctricas,** — 50 págs. Edição do Autor, Braga, 1956.

O presente livro, dedicado a estudantes e engenheiros electrotécnicos, pretende chamar a atenção para a simbiose da electrotecnia e das matemáticas e foi escrito como contríbuto para atulhar, um pouco que seja, o fosso bem largo que em Portugal separa a teoria da prática — diz o Autor.

A seriedade com que se tenta realizar o objectivo exposto, obriga-nos, só por si, a considerar mais uma vez o problema do ensino das matemáticas (o mesmo se pode dizer a respeito da física) aos futuros técnicos e a reconhecer que a política seguida na resolução de tal problema tem contribuído, fundamentalmente, essencialmente, para o descrédito, junto da gente nova, das possibilidades e *necessidades* das aplicações das matemáticas (e igualmente da física) aos problemas de ordem técnica.

Passa-se isto em pleno 1957!

Estas são questões, porém, que apenas pela sua considerável importância nos afloram necessàriamente ao pensamento quando tratamos de simples crítica dum livro.

O Autor dá-nos as noções de matriz e operações algébricas sobre matrizes (4 págs.), aplicando-as imediatamente em seguida à resolução dos sistemas lineares sob a forma matricial. No capítulo II trata do estudo de Topologia das redes e sua análise matricial com várias aplicacões sob a forma de exemplos; no último capítulo (III) aplica as noções apresentadas anteriormente, fazendo a análise das máquinas rotativas.

Julgamos que no parágrafo 2. 8 o Autor exagerou, talvez influenciado par Kron, a aplicação do formalismo matemático, sem ter tido a preocupação de apresentar o significado preciso, se bem que elementar, dos seres que utiliza: os tensores.

De Kron apenas conhecemos *Tensor Analysis of Networks;* a este livro, porém, opomos vivamente a admirável obra de Zurmühl, citada na bibliografia, *Matrizen. Eine Darstellung für Ingenieure,* profundamente honesta sob o ponto de vista teórico e exemplo flagrante da preparação matemática exigida aos técnicos dos países que, como a Alemanha, caminham à frente no campo das realizações industriais.

Ao terminar, desejamos exprimir ao Autor o nosso desejo de que na sua vida de engenheiro prossiga corajosamente na via em que já obteve resultados bem positivos: a via duma boa compreensão e melhor colaboração entre os «matemáticos» e os «físicos» por um lado, e entre entre os «teóricos» e os «práticos», por outro.

J. G. T.

120 — René Garnier — **Cours de Cinématique** — Tome II 342 pág. — Gauthier-Villars, — Paris.

Não conhecemos o vol. I desta obra, composta de 3 tomos, e que contém o curso da Faculdade de Ciências de Paris regido, supomos, em 1956.

A avaliar por crítica lida, nesse Vol. I apresenta o Autor as noções fundamentais da cinemática, tratando-as por uma combinação entre a análise vectorial e o método do triedro móvel.

Mantendo no Vol. II a mesma orientação, o Autor utiliza ainda em certos casos a teoria das transformações de contacto, a teoria do movimento do plano ou do complexo tangentes-características. A teoria do movimento esférico é apresentada de forma própria e não a partir do movimento plano.

Uma grande parte, talvez a maior, dos resultados apresentados não são vulgares num livro com objectivos de ordem didáctica; são no entanto perfeitamente acessíveis a leitores com a preparação correspondente ao curso de Matemáticas Gerais.

Entre tais resultados, alguns dos quais são já clássicos, (como os trabalhos de Resal sobre rolamento), encontram-se outros, como as fórmulas de Gautero, que regra geral exigem longos cálculos para o seu estabelecimento, ou ainda os notáveis trabalhos de Koenigs sobre a curvatura das curvas associadas e superfícies regradas associadas. Apesar, porém, da diversidade dos assuntos tratados, o Autor consegue dar-lhe unidade de conjunto, apresentando, além do mais, resultados próprios como a extensão ao espaço da fórmula de Savary, extensão essa considerada impossível por Koenigs.

A presente edição difere da anterior pela inclusão de vários aditamentos (4 notas que se estendem por 27 págs.) e modificações que põem mais em destaque ainda os métodos geométricos característicos da exposição do Autor.

O conteudo e profusão dos assuntos tratados dão à Cinemática amplidão e relevo que não conhecemos em qualquer outra obra similar.

J. G. T.

121 — Maurice d'Ocagne — **Histoire des Sciences Mathématiques** — 406 págs. — Librairie Vuibert — Paris, 1955.

Trata-se da última obra do ilustre autor dos «Hommes et choses de Science»: os seus manuscritos foram cuidadosamente recolhidos pela família, organizados em livro por René Dugas e a obra quase inteiramente revista pelo Autor.

O primeiro capítulo (40 págs.) é inteiramente dedicado à matemática e aos matemáticos do período helénico; ao papel dos árabes e dos indianos destina o Autor o mesmo espaço que aos romanos (2 págs. a cada). O período final da Idade Média, importante para a compreensão da penetração da ciência grega na Europa Ocidental, é estudado com mais pormenor, entrando-se em seguida com relativo desenvolvimento nos predecessores de Descartes e iniciadores da Álgebra (cerca de 30 págs.). Daqui em diante a História da Matemática é dividida em séculos e subdividida em matemáticos e respectivas biografias!

Aqui e ali há uma excepção: pequeno parágrafo intitulado «Fundação da Academia das Ciências» (em que na realidade quase exclusivamente se faz a biografia do P. MERSENNE) ou «Adversários e partidários do Cálculo Infinitesimal», ou ainda «Progresso do Cálculo das Probabilidades», mas onde há sempre observações como esta: ABRAÃO DE MOIVRE nasceu em 1667... morreu em 1754... e era hugenote francês...! Assim se faz descrição convencional de cerca de 120 matemáticos e suas obras, (muitas vezes das vidas particulares), a maior parte dos quais franceses. Ao período contemporâneo dedica o Autor apenas 12,5 págs. (!) em que em algumas linhas fala da criação e desenvolvimento da teoria das funções analíticas (2 págs.) teoria das funções de variável real (1,5 pág.), álgebra e teoria dos números (11 linhas), equações diferenciais (1 pág.), equações às derivadas (12 linhas), etc.

Na realidade, não estamos de acordo com este «método» de encarar a história. Supomos de interesse reduzido o facto de a... MARQUISE DU CHÂTELET, née à Paris le 17 décembre 1706, morte à Lunéville le 10 septembre 1749, dont la célébrité a tenu surtout à sa liaison publiquement affichée avec VOLTAIRE... ter sido aluna de MAUPERTUIS e CLAIRAUT; principalmente quando se diz apenas que a topologia «est une étude des propriétés qualitatives des figures... JORDAN et POINCARÉ l'ont étudiée tout particulièrement...» e «A l'époque contemporaine il faut mentionner les travaux de LEBESGUE, ANTOINE, MARCHAUD, ZORETTI, HILBERT, BROUWER, ALEXANDER e ERRERA (ao todo 9,5 linhas).

De Álgebra: MONTEL reprend les propriétés de LUCAS--GAUSS et LANDAU et précise la grandeur des racines d'une équation d'après la densité des termes de celle--ci; il étudie les rapports entre les racines des équations et des derivées, et les fonctions rationnelles entrelacées. De ce point de vue sont issus des travaux de FAVARD, DIEUDONNÉ, BIERNACHI, TCHAKALOFF.

De facto, receamos que o leitor desprevenido adquira uma ideia totalmente deturpada do que são a matemática e a sua evolução, principalmente no período contemporâneo, época de realizações extraordinárias cujo alcance nem de longe podemos antever.

J. G. T.

122 — W. BLASCHKE — **Kreis und Kugel** — 166 págs. — Walter de Gruyter & C.º, — Berlim, 1956.

Esta segunda edição da obra do prof. BLASCHKE mantém as mesmas características fundamentais da primeira publicada há precisamente 40 anos, que marcou uma posição de destaque no estudo dos problemas de extremo em domínios convexos. Desde há 40 anos pois que esta obra vem agitando, na formação dos jovens geómetras, velhos problemas que remontam a ARQUIMEDES.

Como diz o Autor, no prefácio, vários matemáticos, STEINER, BRUNN, MINKOWSKI, SCHWARZ contribuiram poderosamente para o desenvolvimento do estudo de tais problemas, criando métodos específicos; por outro lado a nova edição beneficia ainda de resultados de HILBERT, ALEXANDROW, HADWIGER.

Trata-se portanto de obra, considerada prima, necessária aos iniciantes nos referidos problemas isoperimétricos e afins.

O livro divide-se em quatro partes: nas duas primeiras estudam-se as propriedades de mínimo do círculo e da esfera com base no método de STEINER (Viergelenkverfahren); a terceira expõe os resultados de SCHWARZ, BRUNN e MINKOWSKI sobre os corpos convexos; a quarta apresenta novos resultados da mesma teoria obtidos por intermédio da geometria diferencial «im grossen». Termina com um capítulo onde se dá uma visão de conjunto dos assuntos tratados e suas relações com a Geometria Projectiva e Topologia. A obra está recheada de utilíssimas notas históricas e bibliográficas.

J. G. T.

No próximo número da Gazeta serão criticadas as obras seguintes:

WILHELM SPECHT — *Elementare Beweise der Primzahlsätze* — 78 págs. — Deutsche Verlag der Wissenschaften — Berlin, 1956.

CARL B. BOYER — *History of Analitic Geometry* — 292 págs. — The Scripta Mathematica Studies — New York, 1956.

A. J. CHINSTSCHIN — *Mathematisch Grundlagen der Quantenstatistik* — 200 págs. — Akademie-Verlag — Berlin, 1956.

IWANENKO-SOKOLOW — *Klassische Feldtheorie* — 348 págs. — Akademie Verlag — Berlin, 1953.

Corrigenda ao artigo

Aspectos da Actualidade Matemática

1 — Trata-se da Aula Inaugural na Faculdade de Filosofia da Universidade do Recife e não da Aula Inaugural na Universidade do Recife, que foi outra sessão diferente!

2 — Na 1.ª pág, 1.ª coluna, 4.ª linha a contar do fim, deve ler-se: ... e transmiti-lo às...

3 — Na 2.ª pág., 1.ª coluna, 28.ª linha, deve ler-se: ..., como uma condição...

GAZETA DE MATEMÁTICA

Número avulso: 17 escudos e 50 centavos
Assinatura relativa a 1958 (4 números) 50 escudos
Assinatura para o estrangeiro, 80 escudos

PONTOS DE EXAME

Uma das secções permanentes da *Gazeta de Matemática* é constituída pelos pontos de Matemática do exame do 3.º ciclo do ensino liceal e de exames de aptidão às Universidades e pontos de exames de frequência e finais das cadeiras de matemática das escolas superiores.

2.ª EDIÇÃO DO VOL. II (N.ºs 5 a 8)

Continua aberta a inscrição para a nova edição do ano II da *Gazeta de Matemática* (n.ºs 5 a 8) ao preço de escudos 30. Esta nova edição oferece aos leitores da *Gazeta de Matemática* a possibilidade de completarem as suas colecções no formato e características actuais e com os textos cuidadosamente revistos. Logo que as inscrições atinjam o número de 300, proceder-se-á, à composição, impressão e distribuição da nova edição do ano II. Depois de publicada, a segunda edição do volume II será vendida ao preço de escudos 40.

CONDIÇÕES DE ASSINATURA

A administração da *Gazeta de Matemática* aceita, durante 1957, quando pedidas directamente, assinaturas de quatro números, ao preço de escudos 50, para o que basta indicar o nome, a morada e o local da cobrança. As assinaturas são renovadas automàticamente no seu termo, salvo aviso prévio em contrário. Todas as assinaturas têm início com o primeiro número publicado em cada ano.

ASSINATURAS GRATUITAS

Todo o assinante que indique à administração da *Gazeta de Matemática* dez novos assinantes beneficiará de uma assinatura gratuita durante o ano seguinte ao da sua assinatura.

NÚMEROS ATRASADOS

Estão completamente esgotados os números 5 a 11, 13 e 14 da *Gazeta de Matemática*. Os restantes números são vendidos aos preços seguintes:

N.ºs 1-4 (2.ª edição do ano I, no formato actual e com o texto cuidadosamente revisto)	40$00
N.ºs 12 e 15 a 49, cada número	12$50
N.º 50	60$00
N.ºs 51 a 69, cada número simples	17$50
N.ºs 51 a 69, » » duplo	35$00

A administração da *Gazeta de Matemática* executa qualquer encomenda à cobrança pelo correio.

ANGARIE ASSINANTES PARA A «GAZETA DE MATEMÁTICA».

Concorrerá, assim, para o melhoramento de uma revista sem objectivos comerciais

PREÇO ESC. 35$00

ADMINISTRAÇÃO DA «GAZETA DE MATEMÁTICA»
Avenida João Crisóstomo, 4, 7.º-D. — LISBOA-N. — Telefone 77 19 43