GAZETA DE MATEMÁTICA

JORNAL DOS CONCORRENTES AO EXAME DE APTIDÃO E DOS ESTUDANTES DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS SUPERIORES

ANO XXII — N.° 84-85 — JULHO-DEZ. 1961

SUMÁRIO

Existência de produto escalar em espaços vectoriais normados
por *Luiz Adauto da Justa Medeiros*

Sobre produtos infinitos de funções
por *Graciano Neves de Oliveira*

As funções recursivas e os fundamentos da matemática
por *Mário Tourasse Teixeira*

Espaços de Banach uniformemente convexos
por *Luiz Adauto da Justa Medeiros*

Movimento Matemático
Noticiário Brasileiro de Matemática
Reuniões científicas — Seminários — Notícias diversas

Matemáticas Superiores
Pontos de Exames de Frequência e Finais
Matemáticas Gerais — Álgebra Superior — Cálculo Infinitésimal
Geometria Descritiva — Cálculo das Probabilidades
Astronomia

Pontos de exame da Universidade do Recife
Complementos de Geometria — Análise Matemática
Geometria Superior

Boletim Bibliográfico

DEPOSITÁRIO: LIVRARIA SÁ DA COSTA / RUA GARRETT, 100-102 / LISBOA

que pode ser escrita também como segue:

$$\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = \\ = 2[\varphi(x,y) + \overline{\varphi(x,y)}] = 4R\varphi(x,y)$$

ou seja

$$R\varphi(x,y) = \frac{1}{4}[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2]$$

sendo

$$I\varphi(x,y) = -Ri\varphi(x,y) = -R\varphi(ix,y)$$

podemos escrever

$$\varphi(x,y) = R\varphi(x,y) - iR\varphi(ix,y)$$

sendo

$$R\varphi(x,y) = \frac{1}{4}[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2].$$

De posse deste resultado, vamos no parágrafo seguinte demonstrar a existência do produto escalar.

6. Existência de produto escalar. Seja E um espaço vectorial normado, complexo, cuja norma satisfaz a condição (NJ). Vamos provar que a aplicação $\varphi : E \times E \to C$, definida por

$$(1) \quad \varphi(x,y) = R\varphi(x,y) - iR\varphi(ix,y)$$

sendo

$$(2) \quad R\varphi(x,y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$$

é um produto escalar em E e que a norma de E é por ele induzida. Tal facto, ficará demonstrado, após os seguintes lemas.

LEMA 1. *Se* $R\varphi(x,y)$ *for definida por* (2) *tem-se*

$$R\varphi(x'+x'',y) + R\varphi(x'-x'',y) = 2R\varphi(x',y).$$

DEMONSTRAÇÃO. De facto, sendo a igualdade (NJ) válida em E, se nela substituirmos x e y por $x'+y$ e x'' respectivamente, obtem-se

$$(3) \quad \|x'+x''+y\|^2 + \|x'-x''+y\|^2 = \\ = 2(\|x'+y\|^2 + \|x''\|^2).$$

Anàlogamente, substituindo em (NJ) x e y por $x'-y$ e x'' respectivamente resulta

$$(4) \quad \|x'+x''-y\|^2 + \|x'-x''-y\|^2 = \\ = 2(\|x'-y\|^2 + \|x''\|^2):$$

Subtraindo (4) da (3) obtem-se:

$$(\|x'+x''+y\|^2 - \|x'+x''-y\|^2) + \\ + (\|x'-x''+y\|^2 - \|x'-x''-y\|^2) = \\ = 2(\|x'+y\|^2 - \|x'-y\|^2)$$

que pela (2), pode ser escrita do seguinte modo:

$$(5) \quad R\varphi(x'+x'',y) + R\varphi(x'-x'',y) = \\ = 2R\varphi(x',y)$$

o que prova o Lema 1.

Sendo $R\varphi(0,y) = 0$, pois $\|-y\| = \|y\|$, fazeddo em (5) $x' = x''$, obtem-se $R\varphi(2x',y) = 2R\varphi(x',y)$. Daí resulta que podemos escrever a (5) do seguinte modo:

$$(6) \quad R\varphi(x'+x'',y) + R\varphi(x'-x'',y) = \\ = R\varphi(2x',y).$$

LEMA 2. *Se* $R\varphi(x,y)$ *for definida por* (2), *então*

$$R\varphi(x'+x'',y) = R\varphi(x',y) + R\varphi(x'',y).$$

DEMONSTRAÇÃO. É suficiente em (6) substituir x' por $(x'+x'')/2$ e x'' por $(x'-x'')/2$.

Dos lemas 1 e 2 resulta que

$$\varphi(x,y) = R\varphi(x,y) - iR\varphi(ix,y)$$

sendo $R\varphi$ definida por (2) uma forma aditiva relativamente a primeira coordenada x.

LEMA 3. *A forma* φ *definida por* (1) *e* (2) *é homogénea relativamente a* x.

DEMONSTRAÇÃO. De facto, pondo

$$S = \{\lambda \in C;\ \varphi(\lambda x,y) = \lambda\varphi(x,y)\},$$

e

$$R\varphi(ix,x)=\frac{1}{4}[\,\|ix+x\|^2-\|ix-x\|^2=$$

$$=\frac{1}{4}[\,\|(i+1)x\|^2-\|(i-1)x\|^2]=$$

$$=\frac{1}{4}[\,(|i+1|^2-|i-1|^2)\|x\|^2]=0$$

o que prova o lema 5.

Resulta do lema 5, com os dados anteriores, que a aplicação $\varphi: E \times E \to C$ definida por (1) e (2) é uma forma sesquilinear hermitianae positiva, isto é, um produto escalar em E, tal que a norma de E é por êle induzida.

Tudo o que demonstramos, será resumido no seguinte:

TEOREMA 1. *Seja* E *um espaço vectorial normado, complexo. A condição necessária e suficiente para que* E *seja dotado de um produto escalar que induza a norma de* E, *é que para cada par de vectores* $x, y \in E$ *se tenha*

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2).$$

COROLÁRIO. *A condição necessária e suficiente para que um espaço vectorial normado complexo* E, *seja dotado de produto escalar, é que cada subespaço de dimensão dois o seja.*

DEMONSTRAÇÃO. De facto, se E for dotado de produto escalar, evidentemente cada subespaço de dimensão dois também será.

Recìprocamente, suponhamos que todo subespaço E' de dimensão dois do espaço vectorial normado complexo E, seja dotado de produto escalar. Daí resulta que para cada par de vectores do subespaço E' vale a condição (NJ). Como vale para cada E', valerá para cada par de vectores de E e pelo teorema 1 segue-se que E é dotado de produto escalar.

7. Espaços vectoriais reais. Vamos considerar neste parágrafo, apenas espaços vectoriais cujos escalares sejam números reais. Em um tal espaço vectorial E, denomina-se produto escalar a uma aplicação $\varphi: E \times E \to R$ que seja uma forma bilinear simétrica, estritamente positiva, isto é, satisfazendo as condições:

a) φ é linear relativamente a primeira coordenada

b) φ é simétrica, isto é

$$\varphi(x,y)=\varphi(y,x)$$

c) φ é estritamente positiva.

Resulta que φ é, também, linear relativamente a segunda coordenada.

O Teorema 1, demonstrado anteriormente, vale para espaços vectoriais reais. A necessidade da condição (NJ), no caso real, deduz-se de maneira semelhante aquela usada para o caso complexo. Quanto à suficiência, observe a motivação que foi feita e concluirá, sem dificuldade, que a parte real $R\varphi(x,y)$ seria o produto escalar no caso real. A demonstração seria análoga a que foi feita. Convém acrescentar, ainda, que vale também o corolário, evidentemente.

Sôbre a existência de produto escalar em espaços vectoriais, vale a pena, ainda, dar como notícia o seguinte trabalho: F. A. FICKEN, «Note on the existence of scalar products in normed linear spaces», Ann. of Math. (2) vol. 45 (1944) pp. 362-366, que consiste em impor uma outra condição sobre a norma de um espaço vectorial normado de modo a permitir a existência de um produto escalar. Faremos a seguir o resumo do trabalho citado, sem demonstrações. Pelo corolário do Teorema 1 é bastante nos limitarmos aos subespaços vectoriais de dimensão dois. Sejam então x, y dois vectores independentes de um espaço vectorial real E e seja V o subespaço gerado por estes dois vectores. Consideremos a aplicação σ de V em

absoluta e uniformemente, $P(x)$ *pode derivar-se pela regra deduzida.*

Bastará, pelo teorema anterior, provar que $\sum_0^\infty \frac{\omega_n'}{\omega_n}$ é uniformemente convergente em a.

Ora temos em $I(a,\varepsilon)$ e para $m > m_1$

$$\left|\sum_m^{m+p} \frac{\omega_n'}{\omega_n}\right| \leqslant \sum_m^{m+p} \frac{|\omega_n'|}{\omega_n} < \frac{1}{k} \sum_m^{m+p} |\omega_n'| .$$

Por hipótese pode sempre tomar-se m tão grande que numa vizinhança $I(a,\varepsilon')$ se tenha

$$\sum_m^{m+p} |\omega_n'| < \vartheta k .$$

Logo para m suficientemente grande e x pertencente à menor das vizinhanças $I(a,\varepsilon)$ e $I(a,\varepsilon')$ temos

$$\left|\sum_m^{m+p} \frac{\omega_n'}{\omega_n}\right| < \vartheta$$

donde

$$\left|\sum_m^{\infty} \frac{\omega_n'}{\omega_n}\right| \leqslant \vartheta$$

e fica o teorema demonstrado.

Teorema 3. *Todo o produto da forma* $\prod_0^\infty (1 + u_n \varphi(x))$ *se pode derivar no ponto* a, *pela regra deduzida, se* $\sum u_n$ *é absolutamente convergente, se em* a *a derivada de* $\varphi(x)$ *é limitada e se em* $I(a,\varepsilon)$ *se tem* $1 + u_n \varphi(x) > k > 0$ *a partir de certa ordem.*

Neste caso tem-se

$$\sum |\omega_n'| = |\varphi'(x)| \sum |u_n|$$

pelo que $\sum |\omega_n'|$ converge uniformemente. Pelo teorema 2 fica este provado.

Teorema 4. *Produto infinito da forma* $\prod_0^\infty (1 + u_n x^n)$ *é derivável, pela regra deduzida, em qualquer ponto* a *do interior do intervalo* $-\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}$ *em que é*

$$\lambda = \overline{lim}\sqrt[n]{|u_n|}$$

desde que em $I(a,\varepsilon)$ *seja* $1 + u_n x^n > k > 0$.

Com efeito a série

$$\sum |\omega_n'| = \sum |n u_n x^{n-1}|$$

converge uniformemente em qualquer ponto interior a $-\frac{1}{\gamma}, \frac{1}{\gamma}$ com $\gamma = \overline{\lim}\sqrt[n]{n}\sqrt[n]{|u_n|} = \overline{\lim}\sqrt[n]{|u_n|} = \lambda$.

§ 6 — Supozemos nas demonstrações dos quatro teoremas anteriores que existia uma vizinhança de a onde o produto infinito não se anulava e era sempre convergente. Supozemos ainda que nessa vizinhança era $\omega_n > 0$ para todo o n.

Se o produto não satisfaz a estas condições, mas é possível determinar uma ordem n tal que o resto Q_n as satisfaz os teoremas continuam válidos como é fácil verificar (1).

Efectivamente, teremos

$$P = P_n Q_n$$

Se Q_n satisfaz à hipótese de algum dos quatro teoremas anteriores e todos os ω_i, para $i = 0, 1, \cdots, n-1$, são deriváveis podemos escrever

$$P' = P_n' Q_n + P_n Q_n' = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\omega_i'}{\omega_i} P_n Q_n + + P_n \sum_{i=n}^{\infty} \frac{\omega_i'}{\omega_i} Q_n = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\omega_i'}{\omega_i} P .$$

Se algum dos ω_i $(i = 0, 1, \cdots, n-1)$ é nulo toma se, é claro

$$\frac{P_n}{\omega_i} = \omega_0 \cdots \omega_{i-1}\, \omega_{i+1} \cdots \omega_{n-1} .$$

A regra mantém-se pois neste caso.

---

(1) Portanto agora só exigimos $\omega_i > 0$ para além da ordem $n-1$.