GAZETA
DE
MATEMÁTICA

JORNAL DOS CONCORRENTES AO EXAME DE APTIDÃO E DOS
ESTUDANTES DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS SUPERIORES

ANO XXV N.° 94-95 JAN.-JUNHO 1964

SUMÁRIO

DEPOSITÁRIO: LIVRARIA SÁ DA COSTA / RUA GARRETT, 100-102 / LISBOA

GAZETA DE MATEMÁTICA

EDITOR — *Gazeta de Matemática, Lda.* ADMINISTRADOR — *A. Sá da Costa*

Sede e Administração — Rua Diário de Notícias, 134-1.º-Esq.º — Tel. 369449 — Lisboa-2.

Toda a colaboração enviada para publicação nesta revista deve ser dactilografada. A G. M. fornece separatas dos artigos publicados, mediante acordo *prévio* entre o Autor e a Redacção.

Composição e impressão — Tipografia Matemática, L.da — Rua Diário de Notícias, 134-1.º-Esq.º — Telefone 369449 — LISBOA-2.

ANO XXV — N.º 94-95 GAZETA DE MATEMÁTICA JAN./JUNHO — 1964

EDITOR: *Gazeta de Matemática, Lda.* ADMINISTRADOR: *A. Sá da Costa*

REDACTORES: *J. Gaspar Teixeira, J. Morgado e J. da Silva Paulo*

Composto na Tipografia Matemática, Lda. — Rua Diário de Notícias, 134 - 1.º - Esq. — Telef. 36 94 49 — LISBOA 2

On the maximum value of sums of products*

by J. M. S. Simões Pereira

To Mr. Mário Sousa Santos, in appreciation and affection

1. In this paper we consider finite sets (n_i) of equalsigned real numbers denoted by $n_1, n_2, \cdots$ for which $m \gtrless u$ implies $|n_m| \gtreqless |n_u|$.

We shall prove the following

THEOREM 1. *Of all sums of* N *products of* j *factors, formed with the* Nj *elements of a given set* (n_i) *of real positive numbers taken without repetition, the following one, denoted by* S_+ *will take a maximum value*

$$S_+ = \sum_{p=1}^{p=N} n_{pj-j+1} \cdot n_{pj-j+2} \cdots n_{pj}.$$

In fact, it is always possible to obtain S_+ starting from an arbitrary sum S_1 by interchanging successively the positions of the numbers n_i, these changes being chosen in such a way that the sums intermediately obtained will take nondecreasing values. The aim of such changes will be to assemble the j lowest elements of (n_i) — obtainment of the product $n_1 \cdot n_2 \cdots n_j$ as a term of the sum — then to assemble the j lowest remaining elements of (n_i) in another term — $n_{j+1} \cdot n_{j+2} \cdots n_{2j}$ — and so on.

Fundamentally, one needs to show that one of the sums obtained from

$$S_k = n_1 n_2 \cdots n_k n_u \cdot A + n_{k+1} \cdot B + R$$

— where A and B are products of n_i and R stands for the sum of the remaining terms — by interchanging either n_{k+1} and n_u or $n_1 \cdots n_k$ and k factors of B, will be at least equal to S_k.

Suppose then that we interchange the numbers n_{k+1} and n_u in S_k. We get $S'_{k+1} = n_1 \cdots n_k n_{k+1} A + n_u \cdot B + R$ and it may be $S'_{k+1} \gtreqless S_k$. Our aim is to get a sum $S_{k+1} \geqslant S_k$, therefore, if $S'_{k+1} < S_k$ we interchange $n_1 \cdots n_k$ and k factors of B, this way we obtain, as we shall see, a sum $S_{k+1} \geqslant S_k$.

In fact, being

$$S'_{k+1} - S_k = (n_{k+1} - n_u)(n_1 \cdots n_k \cdot A - B) < 0,$$

as $n_{k+1} < n_u$, we have $n_1 \cdots n_k \cdot A > B$. Under these conditions and setting $B = N \cdot Q$

* A previous version of this paper has been awarded the «Prémio F. Gomes Teixeira — 1962».

with N standing for a product of k factors, we have

$$S_{k+1}-S_k=(n_1\cdots n_k-N)(n_{k+1}\cdot Q-n_u\cdot A)\geqslant 0.$$

This becomes clear if we remark that $n_1\cdots n_k\leqslant N$ and thus, from $n_1\cdots n_k\cdot A>B=$ $=N\cdot Q$ we get $Q<A$ (positive numbers!); and, on the other hand, multiplying the inequalities $n_{k+1}<n_u$ and $Q<A$ we have $n_{k+1}\cdot Q<n_u\cdot A$.

Plainly, at most $j-1$ operations of this type will suffice to obtain a sum where the term $n_1 n_2\cdots n_j$ already exists; and then the others $N-1$ terms of S_+ will be successively obtained in a similar way.

S_+ takes the maximum value for we start from an arbitrary sum S_1 and, never decreasing, we get S_+.

The conclusion of this theorem still holds if n_1 is the only n_i negative; in this case when constructing the product $n_1\cdots n_j$ we may always obtain $S_{k+1}\geqslant S_k$ by interchanging n_{k+1} and n_u in S_k.

As a consequence of theorem 1 we can prove:

THEOREM 1 a. *If the elements of* (n_i) *are negative (except perhaps* n_1*), the sum denoted by* S_+ *in the theorem 1 will take a maximum value if the products have an even number of factors and a minimum value if they have an odd one.*

In fact, multiplying all the numbers considered in the THEOREM 1 by -1 we get a set (n_i) in the present conditions; moreover if the number of factors of the products is even all sums will take the same value, if it is odd all will take a simetric one.

Finally, if we are concerned with products of two factors we can prove THEOREM 1 for sets (n_i) of unequalsigned real numbers denoted now in such a way that $m\gtrless u$ implies $n_m\gtreqless n_u$.

The proof is quite imediate; we have found later a similar theorem in [1] but there, it is the case where two sets (n_i) are given that is dealt with.

2. Suppose now that we take a set (n_i) of positive numbers greater than 1 and consider the sums of products of any number of factors that can be formed with these numbers.

Let two sums where the same number of terms will be products of the same number of factors be called of the same type.

We shall prove the following

THEOREM 2. *The maximum sum* S_+ *of all sums of the same type will be obtained by taking the elements* n_i *in non-decreasing order and forming with them the products in non-decreasing order of the number of factors.*

For example, if there are no products with less than k factors but there are m products with k factors, we must take the $m\cdot k$ lowest n_i and, in accordance with Theorem 1, we shall construct with them the maximum sum of these m products. Then, we consider those of the remaining terms that will have less factors — say, p products of $j\,(>k)$ factors. We take from the remaining n_i the $p\cdot j$ lowest ones and, still in agreement with Theorem 1 we construct the maximum sum of these p products. And so on.

The proof of this theorem is similar to that of Theorem 1. We shall consider two operations that will permit us to obtain S_+ starting from an arbitrary sum S_1 of the same type and we shall show that it is always possible to perform these operations in such a way that the sums intermediately obtained in the process will take nondecreasing values.

Let us investigate these operations.

The aim of one of them is to obtain from a sum

$$S=A\cdot n_z\, n_{z+1}\cdots n_{z+k}\, n_a+B\cdot n_{z+k+1}+R$$

— where we suppose all n_i with $i < z$ already distributed as in S_+ — another sum $S' \geqslant S$ where the product $n_z n_{z+1} \cdots n_{z+k} n_{z+k+1}$ will appear; this being achieved by permutating in S either n_{z+k+1} and n_a or $n_z \cdots n_{z+k}$ and $k+1$ factors of B.

We remark here that with this operation we intend to assemble in the same term, the elements $n_z, n_{z+1}, \cdots n_{z+k}, n_{z+k+1}$; so the terms with less than $k+2$ factors will be already formed like in S_+ and n_{z+k+1} will not appear in anyone of these terms.

For this reason B will be, in fact, a product of at least $k+1$ factors.

Let us interchange then n_{z+k+1} with n_a. We get

$$S_1 = A \cdot n_z \cdots n_{z+k} n_{z+k+1} + B \cdot n_a + R$$

and

$$S_1 - S = (n_{z+k+1} - n_a)(A \cdot n_z \cdots n_{z+k} - B) .$$

As our aim is to obtain a sum $S' \geqslant S$, if $S_1 - S < 0$ we interchange $n_z \cdots n_{z+k}$ with $k+1$ factors of B. In this case we obtain $S_2 = A \cdot N \cdot n_a + B' n_z \cdots n_{z+k} \cdot n_{z+k+1} + R$ where $B = N \cdot B'$ and N is a product of $k+1$ factors, and we can show that $S_2 - S = (n_z \cdots n_{z+k} - N)(B' n_{z+k+1} - A n_a) \geqslant 0$. In fact we have $n_z \cdots n_{z+k} \leqslant N$ and on account of the inequality $A n_z \cdots n_{z+k+1} > B = NB'$ (implied by $S_1 - S < 0$), we get $B' < A$. Multiplying this one by $n_{z+k+1} < n_a$ we obtain $B' n_{z+k+1} < A n_a$ which proves the assertion.

The other operation is concerned with the fact that each term of j factors (for example $n_z n_{z+1} \cdots n_{z+j-1}$) can be constructed within another one which may be a product of more than j factors. As all n_i are greater than 1, if we interchange the product $n_z \cdots n_{z+j-1}$ with another product of j factors as well, say $n_a n_b \cdots n_h$, which is already a term of the initial sum, we get a new sum equal or greater than the former.

In symbols, from

$$S = n_a n_b \cdots n_h + A n_z n_{z+1} \cdots n_{z+j-1} + R$$

where all n_i with $i < z$ are already distributed as in S_+, we get $S' = n_z \cdots n_{z+j-1} + A \cdot n_a \cdots n_h + R$ and $S' - S = (n_z \cdots n_{z+j-1} - n_a \cdots n_h)(1 - A) > 0$ for $n_z \cdots n_{z+j-1} < n_a \cdots n_h$ and $A > 1$.

By means of this two operations we can get the sum S_+ from an arbitrary one, say S_1, through intermediate sums which will take sucessively nondecreasing values and thus Theorem 2 is proved.

REFERENCE

[1] HARDY, LITTLEWOOD, PÓLYA. «*Inequalities*».

On the stochastic convergence of random vectors in real Hilbert space

por João Tiago Mexia

1. Introduction

The main objectives of this paper are:

i — to obtain lower bounds of the probability of events that are the intersection of a denumerable or finite family of events, related each one with a random variable.

ii — to study the stochastic convergence of sequences of random vectors as arising from conditions imposed on the sequences of the components with the same index. The case we are mainly interested in is when the vectors have denumerable sets of components although we also consider the case when there is only a finite number of components.

To accomplish (i) we will jointly utilize the technique of passing to the complemental and probability inequalities of the TCHEBYCHEFF type namely the BIENAYMÉ-TCHEBYCHEFF and PEARSON inequalities. To accomplish (ii) we take the results pertaining to (i) as a point of departure and utilize a technique introduced by TIAGO DE OLIVEIRA [5]. We shall begin with the study of the denumerable analogue of the multinomial case, then we will generalize our results to larger classes of random variables and, using the same technique, obtain new results. Afterwards and through the same methods we will reach specific results concerning the finite case. We end presenting consistent estimators of the quantities introduced.

2. A first case

The results presented in this section are contained in the laws of large numbers obtained for randon elements in Banach spaces by EDITH MOURIER [3] but are derived through a much more elementary technique.

Let us start by obtaining some fundamental inequalities; from

$$\Pr\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leqq \sum_{i=1}^{\infty} \Pr(A_i)$$

and

$$(1) \qquad (A \to B) \to (\Pr(A) \leqq \Pr(B))$$

we have

$$(2) \quad \Pr\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = 1 - \Pr\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c\right) \geqq \geqq 1 - \sum_{i=1}^{\infty} \Pr(A_i^c)$$

it is easy to give to (2) the following form with a more general turn:

$$(3) \qquad [\forall i \to (\Pr(A_i) \geqq 1 - q_i)] \to \to \left(\Pr\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) \geqq 1 - \sum_{i=1}^{\infty} q_i\right); (i=1,\cdots,N\cdots).$$

In the finite case:

$$(4) \qquad [\forall i \to (\Pr(A_i) \geqq 1 - q_i)] \to \to \left(\Pr\left(\bigcap_{i=1}^{N} A_i\right) \geqq 1 - \sum_{i=1}^{N} q_i\right); (i=1,\cdots,N).$$

Let us consider a probability space with a denumerable set of possible outcomes w_i with probabilities «p_i», and let «n_i» be the number of times that in «n» experiences we obtain «w_i». We have

$$\Pr\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}\left(\left|\frac{n_i}{n} - p_i\right| < \varepsilon\right)\right) \geqq 1 - \sum_{i=1}^{\infty} \Pr\left(\left|\frac{n_i}{n} - p_i\right| \geqq \varepsilon\right) \geqq 1 - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{p_i(1-p_i)}{n\,\varepsilon^2} \geqq 1 - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{p_i}{n\,\varepsilon^2} = 1 - \frac{1}{n\,\varepsilon^2}$$

as follows from inequalities (2) and from the BIENAYMÉ-TCHEBYCHEFF inequality: so that we obtain:

$$(5) \quad \Pr\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}\left(\left|\frac{n_i}{n} - p_i\right| < \varepsilon\right)\right) \geqq 1 - \frac{1}{n\,\varepsilon^2}.$$

Let us study the stochastic limit of:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left|\frac{n_i}{n} - p_i\right|,$$

and prove:

PROPOSITION 1.

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left|\frac{n_i}{n} - p_i\right| \xrightarrow{p} 0.$$

P: Let us write:

$$N(\varepsilon) = \operatorname*{Min}_{N} \left\{ \sum_{i=1}^{N} p_i \geqq 1 - \varepsilon/4 \right\};$$

and

$$Y_n = \sum_{i=N(\varepsilon)+1}^{+\infty} \frac{n_i}{n}.$$

It's easy to see that $N(\varepsilon)$ is finite and depends only on «ε» and Y_n has mean value: $\sum_{=N(\varepsilon)+1}^{+\infty} p_i$. We also have

$$\Pr\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}\left(\left|\frac{n_i}{n} - p_i\right| < \frac{\varepsilon}{4\,N(\varepsilon)}\right)\right) \geqq$$
$$\geqq 1 - \frac{16\,(N(\varepsilon))^2}{n\,\varepsilon^2};$$

and:

$$\Pr\left(\left| Y_n - \sum_{i=N(\varepsilon)+1}^{+\infty} p_i \right| < \frac{\varepsilon}{4}\right) \geqq 1 - \frac{4}{n\,\varepsilon^2} \text{ (1)}$$

which are consequences respectively from (5) and from the BERNOULLI theorem. Let us observe that $\sum_{i=1}^{\infty} \left|\frac{n_i}{n} - p_i\right|$ is the sum of the absolute values of positive deviations $\left(\frac{n_i}{n} > p_i\right)$ and of negative deviations: $\left(\frac{n_i}{n} < p_i\right)$. $\sum_{i=N(\varepsilon)+1}^{+\infty} p_i \leqq \frac{\varepsilon}{4}$, implies that the sum of the negative deviations must be $\leqq \frac{\varepsilon}{4}$; this fact jointly with

$$\left| Y_n - \sum_{i=N(\varepsilon)+1}^{+\infty} p_i \right| < \frac{\varepsilon}{4},$$

implies that the sum of the positive deviations must be $< \varepsilon/2$. As we have

$$\left[\bigcap_{i=1}^{\infty}\left(\left|\frac{n_i}{n} - p_i\right| < \frac{\varepsilon}{4\,N(\varepsilon)}\right)\right] \to$$
$$\to \left(\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} \left|\frac{n_i}{n} - p_i\right| < \frac{\varepsilon}{4}\right)$$

we see that

$$\Pr\left\{\left(\left| Y_n - \sum_{i=N(\varepsilon)+1}^{+\infty} p_i \right| < \frac{\varepsilon}{4}\right) \cap \right.$$
$$\left. \cap \left[\bigcap_{i=1}^{\infty}\left(\left|\frac{n_i}{n} - p_i\right| < \frac{\varepsilon}{4\,N(\varepsilon)}\right)\right]\right\} \geqq$$
$$\geqq 1 - \frac{4}{n\,\varepsilon^2}\left(4\,(N(\varepsilon))^2 + 1\right).$$

From (4) and the definition of $N(\varepsilon)$ follows

$$\Pr\left\{\left(\left| Y_n - \sum_{i=N(\varepsilon)+1}^{+\infty} p_i \right| < \frac{\varepsilon}{4}\right) \cap \right.$$
$$\left. \cap \left[\bigcap_{i=1}^{\infty}\left(\left|\frac{n_i}{n} - p_i\right| < \frac{\varepsilon}{4\,N(\varepsilon)}\right)\right]\right\} \geqq$$
$$\geqq 1 - \frac{4}{n\,\varepsilon^2}\left(4\,(N(\varepsilon))^2 + 1\right)$$

and then, from (1), we get:

$$\text{(6)} \qquad \Pr\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left|\frac{n_i}{n} - p_i\right| < \varepsilon\right) \geqq$$
$$\geqq 1 - \frac{4}{n\,\varepsilon^2}\left(4\,(N(\varepsilon))^2 + 1\right)$$

which proves the desired result.

---

(1) Let us suppose that the indexes «i» where classified, through classifications C_j, $j = 1, \cdots, V$, in disjoint subsets $C^*_{j,i}$, and write:

$n^*_{j,i} = \sum_{i \in C_j} n_i$; and $p^*_{j,i} = \sum_{i \in C^*_{j,i}} p_i$. Using first (5) and then (4) we obtain

$$\text{(1)} \quad \Pr\left(\bigcap_{j=1}^{V}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}\left(\left|\frac{n^*_{j,i}}{n} - p^*_{j,i}\right| < \varepsilon_j\right)\right)\right) \geqslant$$
$$\geqslant 1 - \sum_{j=1}^{V} \frac{1}{n\,\varepsilon_j^2}.$$

Let us define now the stochastic convergence of random vectors in an HILBERT space by

$$(7) \qquad (\vec{a}_n \overset{p}{\to} \vec{a}) \text{ if and only if: } \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(a_{n,i}-a_i)^2} \overset{p}{\to} 0\right)$$

where $\vec{a}_n = (a_{n,i})$, $\vec{a} = (a_i)$. We have

$$(8) \qquad \sum_{i=1}^{\infty} |a_i - b_i| \geqq \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(a_i - b_i)^2} \geqq 0$$

whose truth is verified easily by squaring both sides of the inequality. From (7) and (8) follows

$$(9) \qquad \left(\sum_{i=1}^{\infty} |a_{n,i} - a_i| \overset{p}{\to} 0\right) \to (\vec{a}_n \overset{p}{\to} \vec{a})$$

so we have

$$(10) \qquad \frac{1}{n}\vec{n} \overset{p}{\to} \vec{p}$$

where $\vec{n} = (n_i)$ and $\vec{p} = (p_i)$. We also have, due to (1), (6) and (5), the following stronger result:

$$(11) \qquad \Pr\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{n_i}{n} - p_i\right)^2} < \varepsilon\right) \geqq \geqq 1 - \frac{4}{n\,\varepsilon^2}(4(N(\varepsilon))^2 + 1).$$

Observing (6) and (11) we conclude the smaller $N(\varepsilon)$ is the better. As $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$ is a series of non-negative terms we can reorder it. Let $\sum_{j=1}^{\infty} \overline{p}_j = 1$, be the series after the terms having been reordered in decreasing order and write

$$\overline{N}(\varepsilon) = \operatorname*{Min}_N \left\{\sum_{j=1}^{N} \overline{p}_j \geqq 1 - \varepsilon/4\right\};$$

it is easy to see that

$$(12) \qquad 1 \leqq \overline{N}(\varepsilon) \leqq N(\varepsilon).$$

As we see that $\forall\, q < 1$ we may have $p_1 > q$ and whatever N we may have $\overline{p}_1 < \frac{1}{N}$ we see that it is impossible to obtain distribution — free bounds for $N(\varepsilon)$ and $\overline{N}(\varepsilon)$.

3. Generalization of the results

We will now consider larger classes of a random variables. The PEARSON inequality:

$$(13) \qquad \Pr(|x - \mu| < \varepsilon) \geqq 1 - \frac{\beta_r}{\varepsilon^r}$$

where «β_r» is the r — th order absolute moment of the deviations of «x» from its mean value may be found in SAVAGE [4]. From (3) and (13) we get:

$$(14) \qquad \Pr\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}(|x_i - \mu_i| < \varepsilon_i)\right) \geqq 1 - \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\beta_{r_i,i}}{\varepsilon^{r_i}}$$

where «$\beta_{r_i,i}$» is the r_i — th order absolute moment of the deviations of «x_i» from it's mean «μ_i». Let's now generalize *proposition 1.* We have:

PROPOSITION 2. Let $\{\vec{x}_n\}$, with $\vec{x}_n = (x_{n,i})$, be a sequence of random vectors in a real HILBERT space with non-negative (non-positive) components, whose mean values «μ_i» are independent of «n». If, whatever may be «n», we have $\sum_{i=1}^{\infty} x_{n,i} = H < +\infty$, and: $\sum_{i=1}^{+\infty} \beta_{r,n,i} \to 0$, where «$\beta_{r,n,i}$» is the r-th order absolute moment of the deviations of «$x_{n,i}$» from «μ_i» we have

$$\vec{x}_n \overset{p}{\to} \vec{\mu} \quad \text{where} \quad \vec{\mu} = (\mu_i)$$

P: In KOLMOGOROV [1] it is proven that if the series $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|$ is convergent, the mean value of $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ is $\sum_{i=1}^{\infty} \mu_i^*$, where μ_i^* is the mean of x_i, so that $H = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i$. We can now write

$$N^*(\varepsilon) = \underset{N}{\mathrm{Min}} \left\{ \sum_{i=1}^{N} \mu_i \geqq H - \varepsilon/4 \right\};$$

$$\text{and } y_n = \sum_{i=N^*(\varepsilon)+1}^{+\infty} x_{n,i} = H - \sum_{i=1}^{N^*(\varepsilon)} x_{n,i}.$$

Using

$$\beta_r^r \geqq \Pr\{|x_{n,i} - \mu_i| \geqq a\}\, a^r,$$

and

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} \beta_{r,n,i} \to 0\right) \to [\forall\, i \to (x_{n,i} \overset{p}{\to} \mu_i)]$$

we see that $[\forall\, i \to (x_{n,i} \overset{p}{\to} \mu_i)]$. So as $N^*(\varepsilon)$ depends only on «ε»; and as if $g(z_1 \cdots z_N) = u$, where «g» is continuous, and $[\forall\, i \to (z_i^n \overset{p}{\to} z_i)]$, then $u^n = g(z_1^n, \cdots, z_N^n) \overset{p}{\to} u$, MEXIA [2]; we have

$$y_n \overset{p}{\to} H - \sum_{i=1}^{N^*(\varepsilon)} \mu_i = \sum_{i=N^*(\varepsilon)+1}^{+\infty} \mu_i$$

so that

$$p_n = \Pr\left\{ \left| y_n - \sum_{i=N^*(\varepsilon)+1}^{+\infty} \mu_i \right| \geqq \frac{\varepsilon}{4} \right\} \to 0.$$

Using (14) we obtain

$$\Pr\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} \left(|x_{n,i} - \mu_i| < \frac{\varepsilon}{4\, N^*(\varepsilon)} \right) \right) \geqq$$

$$\geqq 1 - \frac{y^r (N^*(\varepsilon))^r}{\varepsilon^r} \sum_{i=1}^{\infty} \beta_{r,n,i}.$$

Then through the same technique that we used in proving *proposition 1* we obtain:

$$\text{(15)} \qquad \Pr\left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_{n,i} - \mu_i| < \varepsilon \right) \geqq$$

$$\geqq 1 - \left(\frac{y^r (N^*(\varepsilon))^r}{\varepsilon^r} \sum_{i=1}^{\infty} \beta_{r,n,i} + p_n \right) \underset{n \to +\infty}{\to} 1$$

from (1) and (8) we have:

$$\text{(16)} \qquad \Pr\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (x_{n,i} - \mu_i)^2} < \varepsilon \right) \geqq$$

$$\geqq 1 - \left(\frac{y^r (N^*(\varepsilon))^r}{\varepsilon^r} \sum_{i=1}^{\infty} \beta_{r,n,i} + p_n \right) \underset{n \to +\infty}{\to} 1$$

Our thesis is now proved.

Observing (15) and (16) we see that the smaller $N^*(\varepsilon)$ is the better, as before we can introduce:

$$\overline{N}^*(\varepsilon) = \underset{N}{\mathrm{Min}} \left\{ \sum_{j=1}^{N} \overline{\mu}_j \geqq H - \varepsilon/4 \right\}$$

where the «$\overline{\mu}_j$» are the «μ_i» reordered in

(1) Mantaining the definitions of C_j^*, i, supposing only that they are finite, and of $p_{j,i}^*$ and writing $y_{j,i}^* = \sum_{i \in C_{j,i}^*} x_i$ we obtain by using first (14) and then (4)

$$\text{(2)} \qquad \Pr\left(\bigcap_{j=1}^{V} \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} (|y_{j,i}^* - p_{j,i}^*| < \varepsilon_{j,i}) \right) \right) \geqslant$$

$$\geqslant 1 - \sum_{j=1}^{V} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\beta_{r_{j,i,j,i}}}{\varepsilon^{r_{j,i}}}$$

where the definition of «$\beta_{r_{j,i,j,i}}$» is analogues to that of $\beta_{r_i,i}$.

decreasing order. We see that:

(17) $$1 \leq \overline{N}^*(\varepsilon) \leq N^*(\varepsilon)$$

We will now obtain a result related to *proposition* 2 but free from the restrictions we imposed on the sign and mean value of the components:

PROPOSITION 3 (1). Let $\{\vec{x}_n\}$, with $\vec{x}_n = (x_{n,i})$, be a sequence of random vectors in an real HILBERT space with means «$\mu_{n,i}$». If there exist positive numbers «$h_{n,i}$» such that for $H_n = \sum_{i=1}^{\infty} h_{n,i}$, and $K_n = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_{r,n,i}/h^r_{n,i}$ we have:

$$H_n^r K_n \underset{n \to +\infty}{\to} 0$$

then

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_{n,i} - \mu_{n,i}| \overset{P}{\to} 0$$

and if there are numbers «a_i» such that $\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (\mu_{n,i} - a_i)^2} \to 0$, then $\vec{x}_n \overset{P}{\to} \vec{a}$, where $\vec{a} = (a_i)$.

P: From (14) we have

$$\Pr\left[\bigcap_{i=1}^{\infty} (|x_{n,i} - \mu_i| < \eta_n h_{n,i})\right] \geq$$
$$\geq 1 - \frac{1}{\eta_n^r} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\beta_{r,n,i}}{h^r_{n,i}} = 1 - \frac{K_n}{\eta_n^r}$$

as

$$\left[\bigcap_{i=1}^{\infty} (|x_{n,i} - \mu_i| < \eta_n h_{n,i})\right] \to$$
$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_{n,i} - \mu_{n,i}| < \eta_n H_n\right)$$

using (1) we get

$$\Pr\left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_{n,i} - \mu_{n,i}| < \eta_n H_n\right) \geq 1 - \frac{K^n}{\eta_n^r}$$

putting $\eta_n = \varepsilon / H_n$ we obtain

(18) $$\Pr\left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_{n,i} - \mu_{n,i}| < \varepsilon\right) \geq$$
$$\geq 1 - \frac{K_n H_n^r}{\varepsilon^r} \underset{n \to +\infty}{\to} 1$$

due to (1) and (8) we then

(19) $$\Pr\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (x_{n,i} - \mu_{n,i})^2} < \varepsilon\right) \geq$$
$$\geq 1 - \frac{H_n^r K_n}{\varepsilon^r} \underset{n \to +\infty}{\to} 1$$

due to (1) and the triangular property of metric we get:

(20) $$\Pr\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (x_{n,i} - a_i)^2} < \varepsilon + \right.$$
$$\left. + \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (a_i - \mu_{n,i})^2}\right) \geq$$
$$\geq 1 - \frac{H_n^r K_n}{\varepsilon} \underset{n \to +\infty}{\to} 1$$

so that we see that out thesis is now proven.

Propositions 2 and 3 can easily be generalized if instead of considering only moments of the r-th order we would consider moments of orders $r_{n,i} \leq r$.

We now will prove:

PROPOSITION 4 (1). Let A be an real HILBERT space; «g» a continuous function defi-

---

(1) If we admit that «g» is i. e. then it can be shown in the same way that:

(3) $$(\vec{x}_n \overset{P}{\to} \vec{x}) \to (g(\vec{x}_n) \overset{P}{\to} g(\vec{x})).$$

ned in A, and $\{\vec{x}_n\}$, where $\vec{x}_n = (x_{n,i})$, a sequence of random vectors of A and such that

a) There exists $\vec{a} \varepsilon A$ such that

$$d(\vec{\mu}_n^*, \vec{a}) \to 0,$$

where

$$\vec{\mu}_n^* = (\mu_{n,i}^*),$$

has as components the mean values of the components of $\vec{x}_n$.

b) There exist positive numbers «$h_{n,i}$» for which $H_n^r K_n \underset{n \to +\infty}{\to} 0$. Then $g(\vec{x}_n) \overset{p}{\to} g(a)$

D: Due to the fact that «A» is a real Hilbert space and to (*a*) and (*b*) we have: $x_n \overset{p}{\to} a$, «g» being continuous, for each $\varepsilon > 0$, there exists $\eta(\varepsilon) > 0$ such that:

$$(d(\vec{b}, \vec{a}) < \eta(\varepsilon)) \to (|g(\vec{b}) - g(\vec{a})| < \varepsilon)$$

so, due to (1) we have

$$Pr(d(\vec{b}, \vec{a}) < \mu(\varepsilon)) \leq Pr(|g(\vec{b}) - g(\vec{a})| < \varepsilon)$$

so, as $x_n \overset{p}{\to} a$, we see that our result is now proved.

We are now going to show by an example that there are sequences for which the conditions of *proposition 3* are satisfied. Let us take

$$F_{n,i}(x) = \frac{1}{2} H\left(x + \sqrt{\frac{s_i}{u}} - a_i\right) + \frac{1}{2} H\left(x - \sqrt{\frac{s_i}{u}} - a_i\right)$$

with $S = \sum_{i=1}^{+\infty} \sqrt[2r^2]{s_i} < +\infty$ and $H(x)$ such that

$$x < 0 \to H(x) = 0; \; x > 0 \to H(x) = 1$$

we get: $\beta_{r,n,i} = \sqrt[r]{\frac{s_i}{n}}$; and if we write $h_{n,i} = \sqrt[2r^2]{\frac{s_i}{n}}$ we get

$$k_n = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\beta_{r,n,i}}{h_{n,i}^r} = \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt[2r]{\frac{s_i}{n}} \leq \leq \sqrt[2r]{\frac{1}{n}} \, S^r \underset{n \to +\infty}{\to} 0$$

and

$$H_n = \sum_{i=1}^{\infty} h_{n,i}^r = \sqrt[2r^2]{\frac{1}{n}} \, S \underset{n \to +\infty}{\to} 0$$

so we have

$$H_n^r K_n \underset{n \to +\infty}{\to} 0.$$

It's clear that the other condition is satisfied.

4. The finite case

We are now going to consider results for the finite case. Let «$x_1, \cdots, x_N$» be «N» random variables with mean values «μ_i». From (4) and (13) we get

$$Pr\left(\bigcap_{i=1}^{N} (x_i - \mu_i | < \varepsilon_i)\right) \geq 1 - \sum_{i=1}^{N} \frac{Pr_{i,i}}{\varepsilon^{r_i}}$$

and as

$$\left[\bigcap_{i=1}^{N} (|x_i - \mu_i| < \varepsilon_i)\right] \to \to \left(\sum_{i=1}^{N} |x_i - \mu_i| < \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i\right),$$

due to (1), we get

$$(21)\qquad Pr\left(\sum_{i=1}^{N}|x_i-\mu_i|<\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_i\right)\geqq$$
$$\geqq 1-\sum_{i=1}^{N}\frac{\beta_{r_{i},i}}{\varepsilon^{r_i}}.$$

Let's introduce in R^N the euclidean metric

$$d(\vec{a},\vec{b})=\sqrt{\sum_{i=1}^{N}(a_i-b_i)^2}\ .$$

We have

$$\left[\bigcap_{i=1}^{N}\left(|x_{n,i}-a_i|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{N}}\right)\right]\rightarrow$$
$$\rightarrow\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{N}(x_{n,i}-a_i)^2}<\varepsilon\right)$$

it's easy to see, using (4), that

$$(22)\qquad \left[\bigcap_{i=1}^{N}(x_{n,i}\overset{p}{\rightarrow}a_i)\right]\rightarrow(\vec{x}_n\overset{p}{\rightarrow}\vec{a})$$

where $\vec{x}_n=(x_{n,i})$ and $\vec{a}=(a_i)$.

5. Estimation of $N(\varepsilon)$, $\bar{N}(\varepsilon)$, $N^*(\varepsilon)$ and $\bar{N}^*(\varepsilon)$

Let us begin by the estimation of $N(\varepsilon)$. We reorder the fractions $\frac{n_i}{n}$ in decreasing order: $z_{n,i},\cdots,z_{n,j},\cdots$, and write

$$N^n(\varepsilon)=\operatorname*{Min}_{N}\left[\sum_{j=1}^{N}z_{n,j}\geqq 1-\varepsilon/4-\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right]$$

and

$$\lambda=\frac{1}{2}\left(1-\varepsilon/4-\sum_{j=1}^{N(\varepsilon)-1}\bar{p}_j\right).$$

There exists $\bar{\bar{N}}$ such that

$$n>\bar{\bar{N}}\rightarrow\frac{1}{\sqrt[3]{n}}<L.$$

For $n>\bar{\bar{N}}$ we have

$$\left\{\begin{array}{l}\left[\bigcap_{i=1}^{\infty}\left(\left|\frac{n_i}{n}-p_i\right|<\frac{1}{\sqrt[3]{n}\,\bar{N}(\varepsilon)}\right)\right]\rightarrow\\ \rightarrow\left(\sum_{j=1}^{\bar{N}(\varepsilon)-1}z_{n,j}<1-\frac{\varepsilon}{4}-\frac{1}{\sqrt[3]{n}}<\sum_{j=1}^{\bar{N}(\varepsilon)}z_{n,j}\right)\\ \left(\sum_{j=1}^{\bar{N}(\varepsilon)-1}z_{n,j}<1-\varepsilon/4-\frac{1}{\sqrt[3]{n}}<\sum_{j=1}^{\bar{N}(\ )}z_{n,j}\right)\rightarrow\\ \rightarrow(\bar{N}(\varepsilon)=\hat{\bar{N}}^n(\varepsilon))\end{array}\right.$$

so on account of (1), (5) and the transitive property of implication we get

$$(23)\qquad P_r(\hat{\bar{N}}^n(\varepsilon)=\bar{N}(\varepsilon))\geqq 1-\frac{(\bar{N}(\varepsilon))^2}{\sqrt[3]{n}}\underset{n\rightarrow+\infty}{\rightarrow}1$$

If «$s(n)$» is a finite function we have:

$$(24)\qquad \underset{n\rightarrow+\infty}{p\lim}(\hat{\bar{N}}^n(\varepsilon)-N(\varepsilon))\,s(n)=0$$

so we see that the asymptotic distribution is a Heaveside distribution.

Using the same technique we obtain:

$$\hat{N}^n(\varepsilon)=\operatorname*{Min}_{N}\left\{\sum_{i=1}^{N}\frac{n_i}{n}\geqq 1-\varepsilon/4-\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right\}$$

$$\hat{N}^{*n}(\varepsilon)=\operatorname*{Min}_{N}\left\{\sum_{i=1}^{N}x_{n,i}\geqq H-\varepsilon/4-\sqrt[r']{K_n}\right\}$$

$$\hat{\bar{N}}^{*n}(\varepsilon)=\operatorname*{Min}_{N}\left\{\sum_{j=1}^{N}Y_{n,j}\geqq H-\varepsilon/4-\sqrt[r']{K_n}\right\}$$

where $r'>2r$ and the «$Y_{n,j}$» are the «$x_{n,i}$» reordered in decreasing order. If $s(n)$ is a finite function we obtain:

$$(25)\qquad 0=p\lim(\hat{N}^n(\varepsilon)-N(\varepsilon))\,s(n)=$$
$$=p\lim(\hat{N}^{*n}(\varepsilon)-N^*(\varepsilon))\,s(n)=$$
$$=p\lim(\hat{\bar{N}}^{*n}(\varepsilon)-\bar{N}^*(\varepsilon))\,s(n)$$

so that the asymptotic distributions are also the Heavside ones.

6. References

[1] Kolmogorov, A. N., *Foundations of probability*, Chelsea Publishing Company, New York, 1958.

[2] Mexia, J. T. P. N., *Subsídios para uma teoria estatística do problema da classificação*, Anais do Instituto Superior de Agronomia, Vol. 24, Lisboa, 1963.

[3] Maurier, Edith, *Elements aléatoires dans un espace de Banach*, Annales de l'Institut Henri Poincaré, Vol. XIII, Paris, 1953.

[4] Savage Richard, *Probability inequalities of the Tchebycheff type*, Journal of Research, series B, N.º 3, 1961, Washington, 1961,

[5] Tiago de Oliveira, J., *Estimação assintótica de parâmetros quase lineares*, Instituto Superior de Ciências Económicas e Financeiras, Lisboa, 1960.

Sobre as várias maneiras de escrever as equações gerais da mecânica dos sistemas com um determinado número finito de graus de liberdade

por P. de Varennes e Mendonça

1. Objectivo — Ao publicar este artigo só num aspecto o nosso intuito terá acaso excedido objectivos meramente didácticos — o de chamar a atenção para a superioridade formal das equações de Mira Fernandes (*) e de assim procurar fazê-las sair do esquecimento em que injustamente as mantém ainda a maioria dos programas universitários.

2. Preliminar — Consideremos o sistema material C sujeito apenas a ligações bilaterais.

Suponhamos ser possível encontrar um número u finito de parâmetros (coordenadas gerais) $q_s (s = 1, 2, \cdots, u)$ tais que todo o ponto $P \in C$ é função sòmente dos q_s e do tempo t, unívoca e bidiferenciável:

$$(1) \qquad P = P(q_1, q_2, \cdots, q_u, t).$$

Então, o deslocamento virtual δP de P no instante t tem a expressão

$$(2) \qquad \delta P = \sum_s \frac{\partial P}{\partial q_s} \delta q_s \qquad (s = 1, 2, \cdots, u)$$

(*) Fernandes, A. de Mira (1940) — *Equazioni della Dinamica*. «Portae Math.» 2: 1-6, 1941.

e o seu deslocamento real dP no intervalo de tempo elementar dt sucessivo ao instante t vale

$$(3) \qquad dP = \sum_s \frac{\partial P}{\partial q_s} d q_s + \frac{\partial P}{\partial t} d t .$$

Sejam as seguintes as $h < u$ equações de ligação (compatíveis e independentes) não consideradas quando da escolha dos u parâmetros q_s (diferenciadas quando holónomas):

$$(4) \qquad \sum_s \varphi_{rs} d q_s + \eta_r d t = 0 \quad (r = 1, 2, \cdots, h),$$

onde tanto os φ_{rs} como os η_r são funções de t e dos q_s. Às equações (4) correspondem num deslocamento virtual (compatível) de C

$$(5) \qquad \sum_s \varphi_{rs} \delta q_s = 0 .$$

O sistema C tem, por conseguinte, $k = u - h$ graus de liberdade.

Tirem-se de (4) os valores de h dos $d q_s$ — por exemplo, os de $d q_{k+1}, d q_{k+2}, \cdots, d q_u$ — e substituam-se em (3). Então, estas equações convertem-se em

(6) $$dP = \sum_j \vec{\psi}_j \, dq_j + \vec{\xi} \, dt \quad (j=1,2,\cdots,k),$$

onde $\vec{\psi}_j$ e $\vec{\xi}$ são ainda funções de $q_1, q_2, \cdots, q_u, t$. Correlativamente é

(7) $$\partial P = \sum_j \vec{\psi}_j \, \partial q_j .$$

O nosso ponto de partida nas deduções subsequentes será a equação simbólica da dinâmica ou forma lagrangeana do princípio de d'ALEMBERT:

(8) $$S[(\vec{F}_a - m P'') \,|\, \partial P] = 0 .$$

onde S representa a soma estendida a todo o sistema, $|$ é o sinal de produto interno, m a massa de P, e $P'' = d^2 P/d t^2$ a sua aceleração e $\vec{F}_a$ a resultante das forças que lhe estão directamente aplicadas no instante t. Como se sabe, esta equação é válida na ausência de atrito ou desde que se considerem as forças de atrito incluídas nas forças directamente aplicadas.

3. Método dos multiplicadores de Lagrange. Equações de Lagrange e equações de Appell — Substituindo (2) em (8), vem

$$S\left[(\vec{F}_a - m P'') \,|\, \sum_s \frac{\partial P}{\partial q_s} \partial q_s\right] = 0 ,$$

donde

(9) $$\sum_s S\left[(\vec{F}_a - m P'') \,|\, \frac{\partial P}{\partial q_s}\right] \partial q_s = 0 .$$

As (5) formam um sistema de h equações, que são lineares e homogéneas nos ∂q_s. A equação (9) é também linear e homogénea nos ∂q_s. Logo, para que (9) seja satisfeita por todas as soluções do sistema (5), hão-de os seus coeficientes ser combinações lineares dos coeficientes das equações (5). Quer dizer, tem-se

(10) $$S\left[(\vec{F}_a - m P'') \,|\, \frac{\partial P}{\partial q_s}\right] + \sum_r \lambda_r \varphi_{rs} = 0 .$$

É no raciocínio anterior que consiste o chamado método dos multiplicadores de LAGRANGE. São os λ_r que se designam por multiplicadores de LAGRANGE.

As u equações (10), juntamente com as h equações (5), formam um sistema de $u+h$ equações que, para dadas condições iniciais, determina as u coordenadas gerais q_s e os h multiplicadores λ_r em função do tempo. Os $q_s(t)$, por (1), fornecem P em função de t, isto é, definem o movimento de C; pode verificar-se fàcilmente que os λ_r, embora em geral não sejam suficientes para as calcular, estão relacionados com as forças devidas às ligações traduzidas pelas equações (4).

Por (2), o trabalho virtual das forças directamente aplicadas vale

$$\partial W_a = S(\vec{F}_a \,|\, \partial P) = \sum_s S\left(\vec{F}_a \,|\, \frac{\partial P}{\partial q_s}\right) \partial q_s ,$$

equação que mostra ser

(11) $$Q_s = S\left(\vec{F}_a \,|\, \frac{\partial P}{\partial q_s}\right)$$

a componente segundo a coordenada q_s de um vector do espaço de configuração u-dimensional, o vector força generalizada actuante sobre o ponto representativo de C.

Substituindo (11) em (10), esta equação converte-se em

(12) $$S\left(m P'' \,|\, \frac{\partial P}{\partial q_s}\right) = Q_s + \sum_r \lambda_r \varphi_{rs} .$$

As equações de LAGRANGE obtêm-se dando nova forma ao primeiro membro de (12) mediante a introdução da energia cinética de C:

(13) $$T = \frac{S(m P'^2)}{2} ,$$

onde $P' = dP/dt$ é a velocidade de P.

Vejamos como.

Derivando $S\left(m\,P' \mid \frac{\partial P}{\partial q_s}\right)$ em ordem ao tempo, vem

$$\left[S\left(m\,P' \mid \frac{\partial P}{\partial q_s}\right)\right]' = S\left(m\,P'' \mid \frac{\partial P}{\partial q_s}\right) + \\ + S\left[m\,P' \mid \left(\frac{\partial P}{\partial q_s}\right)'\right],$$

donde

$$(14) \qquad S\left(m\,P'' \mid \frac{\partial P}{\partial q_s}\right) = \\ = \left[S\left(m\,P' \mid \frac{\partial P}{\partial q_s}\right)\right]' - S\left[m\,P' \mid \left(\frac{\partial P}{\partial q_s}\right)'\right].$$

Por outro lado, *supondo os* q_s (*bem como os* $q_s' = \mathrm{d}\,q_s/\mathrm{d}\,t$) *independentes, a despeito das relações* (4), tem-se, por derivação de (13),

$$(15) \qquad \frac{\partial T}{\partial q_s} = S\left(m\,P' \mid \frac{\partial P'}{\partial q_s}\right)$$

e

$$(16) \qquad \frac{\partial T}{\partial q_s'} = S\left(m\,P' \mid \frac{\partial P'}{\partial q_s'}\right);$$

e de (1) ou (3) tira-se

$$(17) \qquad P' = \sum_s \frac{\partial P}{\partial q_s} q_s' + \frac{\partial P}{\partial t},$$

donde

$$\frac{\partial P'}{\partial q_s} = \sum_p \frac{\partial^2 P}{\partial q_p\,\partial q_s} q_p' + \frac{\partial^2 P}{\partial t\,\partial q_s}$$

$(p = 1, 2, \cdots, u)$ e

$$(18) \qquad \frac{\partial P'}{\partial q_s'} = \frac{\partial P}{\partial q_s};$$

logo, é

$$(19) \qquad \left(\frac{\partial P}{\partial q_s}\right)' = \sum_p \frac{\partial^2 P}{\partial q_s\,\partial q_p} q_p' + \frac{\partial^2 P}{\partial q_s\,\partial t} \\ = \frac{\partial P'}{\partial q_s},$$

pois a bidiferenciabilidade implica a igualdade das derivadas cruzadas.

Substituindo (19) e (18) respectivamente em (15) e (16), resulta

$$\frac{\partial T}{\partial q_s} = S\left[m\,P' \mid \left(\frac{\partial P}{\partial q_s}\right)'\right]$$

e

$$\frac{\partial T}{\partial q_s'} = S\left(m\,P' \mid \frac{\partial P}{\partial q_s}\right),$$

expressões que convertem (14) em

$$(20) \qquad S\left(m\,P'' \mid \frac{\partial P}{\partial q_s}\right) = \left(\frac{\partial T}{\partial q_s'}\right)' - \frac{\partial T}{\partial q_s}.$$

A substituição de (20) em (12) fornece finalmente as *equações de Lagrange, com multiplicadores,*

$$(21) \qquad \left(\frac{\partial T}{\partial q_s'}\right)' - \frac{\partial T}{\partial q_s} = Q_s + \sum_r \lambda_r\,\varphi_{rs}.$$

Derivando a energia de aceleração de C,

$$(22) \qquad A = \frac{S\,(m\,P''^2)}{2},$$

em ordem a q_s'' e atendendo a que de (1), (3) ou (17) se tira

$$P'' = \sum_s \frac{\partial P}{\partial q_s} q_s'' + \cdots,$$

donde

$$(23) \qquad \frac{\partial P''}{\partial q_s''} = \frac{\partial P}{\partial q_s},$$

vem

$$(24) \qquad \frac{\partial A}{\partial q_s''} = S\left(m\,P'' \mid \frac{\partial P''}{\partial q_s''}\right) \\ = S\left(m\,P'' \mid \frac{\partial P}{\partial q_s}\right).$$

A substituição de (24) em (12) conduz às *equações de Appell, com multiplicadores:*

(25) $$\frac{\partial A}{\partial q''_s} = Q_s + \sum_r \lambda_r \varphi_{rs}.$$

4. Supressão dos multiplicadores. Equações de Appell pròpriamente ditas — Vejamos o que sucede quando se substituem em (8) as (7), em lugar das (2). Fica

$$\sum_j \mathrm{S}[(\vec{F}_a - m\mathrm{P}'')\,|\,\vec{\psi}_j]\,\delta q_j = 0\,.$$

Ora, os δq_j são arbitrários e independentes. Logo, tem-se

$$\mathrm{S}[(\vec{F}_a - m\mathrm{P}'')\,|\,\vec{\psi}_j] = 0$$

ou

(26) $$\mathrm{S}(m\mathrm{P}''\,|\,\vec{\psi}_j) = \mathrm{S}(\vec{F}_a\,|\,\vec{\psi}_j)\,.$$

Por (7), o trabalho virtual das forças directamente aplicadas vale

$$\delta W_a = \mathrm{S}(\vec{F}_a\,|\,\delta\mathrm{P}) = \sum_j \mathrm{S}(\vec{F}_a\,|\,\vec{\psi}_j)\,\delta q_j\,,$$

que mostra serem agora

(27) $$Q_j = \mathrm{S}(\vec{F}_a\,|\,\vec{\psi}_j)$$

as componentes da força generalizada.

Derivando $\mathrm{S}(m\mathrm{P}'\,|\,\vec{\psi}_j)$ em ordem ao tempo, vem

$$[\mathrm{S}(m\mathrm{P}'\,|\,\vec{\psi}_j)]' = \mathrm{S}(m\mathrm{P}''\,|\,\vec{\psi}_j) + \mathrm{S}(m\mathrm{P}'\,|\,\vec{\psi}'_j)$$

ou, fazendo

(28) $$B_j = \mathrm{S}(m\mathrm{P}'\,|\,\vec{\psi}'_j)\,,$$

(29) $$\mathrm{S}(m\mathrm{P}''\,|\,\vec{\psi}_j) = [\mathrm{S}(m\mathrm{P}'\,|\,\vec{\psi}_j)]' - B_j\,.$$

De (6) tira-se

(30) $$\mathrm{P}' = \sum_j \vec{\psi}_j\,q'_j + \vec{\xi}\,,$$

donde

$$\frac{\partial \mathrm{P}'}{\partial q'_j} = \vec{\psi}_j$$

e, por (13),

(31) $$\mathrm{S}(m\mathrm{P}'\,|\,\vec{\psi}_j) = \mathrm{S}\left(m\mathrm{P}'\,|\,\frac{\partial \mathrm{P}'}{\partial q'_j}\right) = \frac{\partial T}{\partial q'_j}\,.$$

Mediante (27), (29) e (31), a equação (26) escreve-se

(32) $$\left(\frac{\partial T}{\partial q'_j}\right)' - B_j = Q_j\,.$$

Contudo, em geral, por ser

$$\vec{\psi}_j \neq \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial q_j}\,,$$

é também

$$B_j \neq \frac{\partial T}{\partial q_j} = \mathrm{S}\left(m\mathrm{P}'\,|\,\frac{\partial \mathrm{P}'}{\partial q_j}\right),$$

de modo que não é possível dar a (32) a forma (21) com supressão dos multiplicadores.

No caso de o sistema C ser holónomo é que, por redução do número de parâmetros ao mínimo k (coordenadas livres), há identificação de (6) com (3), obtendo-se as equações de Lagrange, sem multiplicadores ou pròpriamente ditas:

(33) $$\left(\frac{\partial T}{\partial q'_j}\right)' - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j\,.$$

Semelhante impossibilidade para os sistemas anolónomos não ocorre com as equações de Appell. De facto, por (30), tem-se

$$\mathrm{P}'' = \sum_j \vec{\psi}'_j\,q'_j + \sum_j \vec{\psi}_j\,q''_j + \vec{\xi}'\,,$$

donde

(34) $$\frac{\partial \mathrm{P}''}{\partial q''_j} = \vec{\psi}_j$$

e, por conseguinte, derivando em ordem a q''_j a energia de aceleração [(22)], vem

$$(35)\qquad \frac{\partial A}{\partial q_j''} = \mathrm{S}\left(m\mathrm{P}''\,|\,\frac{\partial \mathrm{P}''}{\partial q_j''}\right) = \mathrm{S}\,(m\,\mathrm{P}''\,|\,\vec{\psi}_j)\,,$$

e assim a substituição em (26) de (27) e (35) fornece

$$(36)\qquad \frac{\partial A}{\partial q_j''} = Q_j \qquad (j=1,2,\cdots,k),$$

a *primeira forma das equações de Appell, sem multiplicadores* ou *pròpriamente ditas.*

Considere-se a função (constrangimento de C)

$$(37)\qquad \gamma = \frac{1}{2}\,\mathrm{S}\left[\frac{1}{m}(\vec{F}_a - m\,\mathrm{P}'')^2\right] + b$$
$$= \frac{1}{2}\,\mathrm{S}\left(\frac{F_a^2}{m}\right) + A - \mathrm{S}(\vec{F}_a\,|\,\mathrm{P}'') + b\,,$$

onde b representa uma qualquer grandeza independente das acelerações.

Derivando-a em ordem a q_j'', resulta, atendendo a (27) e (34),

$$(38)\qquad \frac{\partial \gamma}{\partial q_j''} = \frac{\partial A}{\partial q_j''} - \mathrm{S}\left(\vec{F}_a\,|\,\frac{\partial \mathrm{P}''}{\partial q_j''}\right)$$
$$= \frac{\partial A}{\partial q_j''} - Q_j,$$

de maneira que (36) equivale a

$$(39)\qquad \frac{\partial \gamma}{\partial q_j''} = 0\,,$$

a *segunda forma das equações de Appell, sem multiplicadores* ou *pròpriamente ditas.*

5. Método das características cinéticas. Equações de Maggi, equações de Levi--Civita-Amaldi e equações de Mira Fernandes — Dividindo por $d\,t$ as equações (4), tem-se

$$(40)\qquad \sum_s \varphi_{rs}\,q_s' + \eta_r = 0\,.$$

Para maior clareza, escrevamos por extenso este sistema de equações:

$$\begin{cases} \varphi_{11}\,q_1' + \varphi_{12}\,q_2' + \cdots + \varphi_{1k}\,q_k' + \varphi_{1,k+1}\,q_{k+1}' + \\ \qquad + \cdots + \varphi_{1u}\,q_u' + \eta_1 = 0 \\ \varphi_{21}\,q_1' + \varphi_{22}\,q_2' + \cdots + \varphi_{2k}\,q_k' + \varphi_{2,k+1}\,q_{k+1}' + \\ \qquad + \cdots + \varphi_{2u}\,q_u' + \eta_2 = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi_{h1}\,q_1' + \varphi_{h2}\,q_2' + \cdots + \varphi_{hk}\,q_k' + \varphi_{h,k+1}\,q_{k+1}' + \\ \qquad + \cdots + \varphi_{hu}\,q_u' + \eta_h = 0\,. \end{cases}$$

Trata-se de um sistema de h equações lineares a u incógnitas e, recorde-se, é $u - h = k > 0$. Para o resolver, pelo teorema de ROUCHÉ-MÉRAY, dão-se valores arbitrários a k das incógnitas (escolhidas para não principais) e resolve-se o sistema obtido por meio das fórmulas de CRAMER.

Para fixar ideias, suponhamos tomar para incógnitas não principais os k primeiros q_s'. A sua arbitrariedade permite fazer

$$\begin{cases} q_1' = \alpha_{11}\,e_1 + \alpha_{21}\,e_2 + \cdots + \alpha_{k1}\,e_k + \beta_1 \\ q_2' = \alpha_{12}\,e_1 + \alpha_{22}\,e_2 + \cdots + \alpha_{k2}\,e_k + \beta_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ q_k' = \alpha_{1k}\,e_1 + \alpha_{2k}\,e_2 + \cdots + \alpha_{kk}\,e_k + \beta_k\,, \end{cases}$$

ou seja, abreviadamente,

$$(41)\qquad q_{s'}' = \sum_j \alpha_{js'}\,e_j + \beta_{s'} \quad (j\,,s'=1,2,\cdots,k),$$

onde os e_j são também arbitrários.

Deste modo, continuando a resolução da maneira acima recordada, vêm para valores das incógnitas principais

$$(42)\qquad q_{s''}' = \sum_j \alpha_{js''}\,e_j + \beta_{s''}$$
$$(s'' = k+1\,, k+2\,,\cdots,u)\,.$$

Os sistemas (41) e (42) englobam-se escrevendo

$$(43)\qquad q_s' = \sum_j \alpha_{js}\,e_j + \beta_s \quad \begin{pmatrix} j=1,2,\cdots,k\,; \\ s=1,2,\cdots,u\,. \end{pmatrix}.$$

Os parâmetros arbitrários e_j dizem-se *características cinéticas*. Querendo, podem aliás fazer-se coincidir com k determinados dos q'_s, para o que basta escolher convenientemente os coeficientes das equações (41); mas tal não é necessário.

O sistema (5) fornece correspondentemente

$$\delta q_s = \sum_j \alpha_{js} \delta \varepsilon_j , \tag{44}$$

onde arbitrários são também os parâmetros infinitésimos $\delta \varepsilon_j$.

Substituindo (44) em (2), resulta

$$\delta \mathrm{P} = \sum_j \sum_s \alpha_{js} \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial q_s} \delta \varepsilon_j , \tag{45}$$

equações que, introduzidas em (8), fornecem

$$\mathrm{S}\left[(\vec{F}_a - m\mathrm{P}'') \,|\, \sum_j \sum_s \alpha_{js} \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial q_s} \delta \varepsilon_j\right] = 0$$

ou

$$\sum_j \mathrm{S}\left[(\vec{F}_a - m\mathrm{P}'') \,|\, \sum_s \alpha_{js} \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial q_s}\right] \delta \varepsilon_j = 0 ,$$

donde se deduz, por motivo da arbitrariedade dos $\delta \varepsilon_j$,

$$\mathrm{S}\left[(\vec{F}_a - m\mathrm{P}'') \,|\, \sum_s \alpha_{js} \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial q_s}\right] = 0 \tag{46}$$

ou

$$\sum_s \alpha_{js} \mathrm{S}\left(\vec{F}_a \,|\, \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial q_s}\right) = \sum_s \alpha_{js} \mathrm{S}\left(m\mathrm{P}'' \,|\, \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial q_s}\right) . \tag{47}$$

Façamos

$$\Psi_j = \sum_s \alpha_{js} Q_s , \tag{48}$$

isto é, atendendo a (11),

$$\Psi_j = \sum_s \alpha_{js} \mathrm{S}\left(\vec{F}_a \,|\, \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial q_s}\right) . \tag{49}$$

Por sua vez, (20) fornece

$$\sum_s \alpha_{js} \mathrm{S}\left(m\mathrm{P}'' \,|\, \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial q_s}\right) = \sum_s \alpha_{js} \left[\left(\frac{\partial T}{\partial q'_s}\right)' - \frac{\partial T}{\partial q_s}\right] . \tag{50}$$

A introdução de (49) e (50) em (47) conduz às *equações de Maggi:*

$$\sum_s \alpha_{js} \left[\left(\frac{\partial T}{\partial q'_s}\right)' - \frac{\partial T}{\partial q_s}\right] = \Psi_j . \tag{51}$$

Derivando (43) em ordem ao tempo, vem

$$q''_s = \sum_j \alpha_{js} e'_j + \cdots ,$$

donde se tira

$$\frac{\partial q''_s}{\partial e'_j} = \alpha_{js} . \tag{52}$$

Derivando agora a energia de aceleração A [(22)] em relação a e'_j, resulta, atendendo a (52),

$$\frac{\partial A}{\partial e'_j} = \sum_s \frac{\partial A}{\partial q''_s} \frac{\partial q''_s}{\partial e'_j} = \sum_s \alpha_{js} \frac{\partial A}{\partial q''_s} . \tag{53}$$

Ora, comparando (21) com (25), vê-se que é

$$\frac{\partial A}{\partial q''_s} = \left(\frac{\partial T}{\partial q'_s}\right)' - \frac{\partial T}{\partial q_s} , \tag{54}$$

de modo que (53) ainda se pode escrever

$$\frac{\partial A}{\partial e'_j} = \sum_s \alpha_{js} \left[\left(\frac{\partial T}{\partial q'_s}\right)' - \frac{\partial T}{\partial q_s}\right]$$

ou, por (51),

$$\frac{\partial A}{\partial e'_j} = \Psi_j , \tag{55}$$

que são de designar por *equações de Levi-Civita-Amaldi,* apesar de terem sido denominadas pelos seus autores «equações de APPELL» (*).

Mas, por outro lado, em vista de (23) e (52), é

$$\frac{\partial P''}{\partial e'_j} = \sum_s \frac{\partial P''}{\partial q''_s} \frac{\partial q''_s}{\partial e'_j} = \sum_s \alpha_{js} \frac{\partial P}{\partial q_s},$$

de maneira que, derivando em ordem a e'_j a função γ [(37)], resulta imediatamente

$$\frac{\partial \gamma}{\partial e'_j} = -\mathrm{S}\left[(\vec{F}_a - m\,P'') \mid \frac{\partial P''}{\partial e'_j}\right]$$
$$= -\mathrm{S}\left[(\vec{F}_a - m\,P'') \mid \sum_s \alpha_{js} \frac{\partial P}{\partial q_s}\right],$$

ou seja, por (46),

$$(56) \qquad \frac{\partial \gamma}{\partial e'_j} = 0,$$

que são as *equações de Mira Fernandes*.

6. Confronto das equações de Mira Fernandes com a segunda forma das equações de Appell pròpriamente ditas — As equações (56), $\partial\gamma/\partial e'_j = 0$, e a segunda forma das equações de APPELL [(39)], $\partial\gamma/\partial q''_j = 0$, constituem as duas maneiras de reduzir à forma mais condensada as equações gerais da mecânica dos sistemas com um determinado número finito de graus de liberdade.

A sua identidade é apenas aparente, pois um exame atento logo mostra que as equações de MIRA FERNANDES têm maior generalidade, visto não obrigarem a escolher as características cinéticas entre os q'_s.

Isto implica que as equações (39) possuem, em comum com as (36), uma particularidade que fàcilmente passa despercebida.

(*) LEVI-CIVITA, Tullio & Ugo AMALDI — *Lezioni di Meccanica Razionale,* Vol. II, Parte I. Bologna, Nicola Zanichelli, 1926. (Nuova edizione, 1951, p. 395-397.)

Referindo-se às (36) em termos válidos *mutatis mutandis* para as (39), eis como o próprio APPELL no-lo indica no trecho que a seguir se traduz (*), substituindo as notações pelas empregadas no presente artigo:

«...

$$(10) \qquad \frac{\partial A}{\partial q''_1} = Q_1, \quad \frac{\partial A}{\partial q''_2} = Q_2, \cdots, \frac{\partial A}{\partial q''_k} = Q_k.$$

Vê-se que, para as escrever, basta calcular a função A e exprimi-la de maneira que não contenha nenhumas outras segundas derivadas além das dos parâmetros $q_1, q_2, \cdots, q_k$, cujas variações são encaradas como arbitrárias. Pode suceder que esta função A, calculada em função de $q_1, q_2, \cdots, q_{k+h}$ $(k+h=u)$ contenha as suas primeiras derivadas $q'_1, q'_2, \cdots, q'_{k+h}$ e as suas segundas derivadas $q''_1, q''_2, \cdots, q''_{k+h}$; as relações

$$\left[\left\{\begin{array}{l} q'_{k+1} = \alpha_{1,k+1}\, q'_1 + \alpha_{2,k+1}\, q'_2 + \cdots + \\ \qquad + \alpha_{k,k+1}\, q'_k + \beta_{k+1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ q'_{k+h} = \alpha_{1,k+h}\, q'_1 + \alpha_{2,k+h}\, q'_2 + \cdots + \\ \qquad + \alpha_{k,k+h}\, q'_k + \beta_{k+h} \end{array}\right.\right]$$

dão $q'_{k+1}, \cdots, q'_{k+h}$ em função linear de $q'_1, q'_2, \cdots, q'_k$, e, derivando em ordem ao tempo, obtêm-se também $q''_{k+1}, \cdots, q''_{k+h}$ em função linear de $q''_1, q''_2, \cdots, q''_k$; pode, portanto, fazer-se sempre de modo que a função A não contenha outras segundas derivadas além de $q''_1, q''_2, \cdots, q''_k$ [$\cdots$]. Uma vez a função A assim preparada, podem escrever-se as equações (10).»

Parece fora de dúvida que estas operações «ocultas», que as equações (36) e (39) só por si não deixam transparecer, as tornam menos perfeitas que as equações de LEVI-CIVITA-AMALDI e de MIRA FERNANDES.

(*) APPELL, Paul — *Traité de Mécanique Rationnelle,* Tome II. Paris, Gauthier-Villars. (4e éd., nouv. tirage, 1931, p. 384-385; 6e éd., 1953 p. 391.)

Um Teorema sobre quasigrupos subtractivos

por Eliane Cordeiro da Silva [1]

Em [1] dão-se vários sistemas de axiomas para quasigrupos subtractivos. Cada sistema é constituído por dois axiomas independentes. Assim, por exemplo, mostra-se que um quasigrupo subtractivo é um grupoide $<G, \cdot>$ que verifica as seguintes condições:

(1): $b \cdot b\, a = a$, *quaisquer que sejam* $a, b \in G$;

(2) $c\, b \cdot c\, a = a\, b$, *quaisquer que sejam* $a, b, c \in G$.

No mesmo artigo (Teorema 3), mostra-se que um grupoide $<G, .>$ que satisfaz as condições

(a) *a equação* $a\, x = b$ *tem pelo menos uma solução quaisquer que sejam* $a, b \in G$;

(b) $a\, c \cdot b\, c = a\, b$, *quaisquer que sejam* $a, b, c \in G$;

é um quasigrupo com identidade direita.

É fácil verificar que um grupoide $<G, \cdot>$ que satisfaça às condições (a) e (b) não é necessàriamente um quasigrupo subtractivo.

Com efeito, consideremos um grupo não abeliano $<G, \odot>$ e definamos em G a seguinte operação.:

$a \cdot b = a \odot b^{-1}$, *quaisquer que sejam* $a, b \in G$.

$<G, \cdot>$ satisfaz às condições (a) e (b) e, no entanto, não é um quasigrupo subtractivo, porque, por exemplo,

$$b \cdot b\, a = b \odot (b\, a)^{-1} = b \odot (b \odot a^{-1})^{-1} =$$
$$= b \odot (a \odot b^{-1}) \neq a$$

em virtude de $<G, \odot>$ ser um grupo não abeliano.

O objectivo desta nota é estabelecer o seguinte

TEOREMA: *Um grupoide* $<G, \cdot>$ *é um quasigrnpo subtractivo, se e só se tem lugar algum dos seguintes sistemas de axiomas:*

Sistema S:

S 1: *a equação* $y\, a = b$ *tem pelo menos uma solução quaisquer que sejam* $a, b \in G$;

S 2: $c\, b \cdot c\, a = a\, b$, *quaisquer que sejam* $a, b, c \in G$.

Sistema S':

S' 1: *a equação* $a\, x = b$ *tem pelo menos uma solução quaisquer que sejam* $a, b \in G$;

S' 2: $c\, b \cdot c\, a = a\, b$, *quaisquer que sejam* $a, b, c \in G$.

DEM. Basta provar que os sistemas de axiomas S, S' e $\{(1), (2)\}$ são equivalentes.

1) $S \Rightarrow S'$.

Como $S' 2 = S 2$, é suficiente mostrar que $S \Rightarrow S' 1$.

---

[1] Bolsista do Instituto de Física e Matemática, Universidade do Recife, Brasil.

Seja y uma solução qualquer da equação $ya = b$. Da condição $S2$, tem-se

$$bb = ya \cdot ya = aa,$$

quer dizer, o elemento $aa = i$ é independente de a.

Além disso, i é uma identidade direita, pois

$$bi = ya \cdot yy = ya = b,$$

qualquer que seja $b \in G$.

Tem-se ainda,

$$i \cdot ab = aa \cdot ab = ba,$$

e, portanto,

$$a \cdot ib = ai \cdot (i \cdot ya) = ai \cdot ay = yi = y,$$

isto é, a equação $ya = b$ tem uma única solução, $y = a \cdot ib$.

Consideremos agora a equação $ax = b$. Se esta equação tem solução, então

$$x = xi = ai \cdot ax = ab.$$

Como

$$ax = ai \cdot ab = bi = b,$$

concluimos que a equação $ax = b$ tem efetivamente solução, $x = ab$, quaisquer que sejam $a, b \in G$, o que prova $S'1$.

2) $S' \Rightarrow \{(1), (2)\}$.

Basta mostrar que $S' \Rightarrow (1)$, visto ser $(2) = S'2$. Ora, em virtude das condições $S'1$ e $S'2$ tem-se, designando por x um elemento tal que $ax = b$,

$$bb = ax \cdot ax = (xx \cdot xa)(xx \cdot xa) =$$
$$= xa \cdot xa = aa,$$

donde se conclui que o elemento $aa = i$ é independente de a.

E, como, para todo $b \in G$,

$$bi = ax \cdot aa = ax = b,$$

o elemento i é uma identidade direita de $<G, \cdot>$.

Finalmente, tem-se

$$b \cdot ba = bi \cdot ba = ai = a$$

como pretendíamos mostrar.

3) $\{(1), (2)\} \Rightarrow S$.

Como $S2 = (2)$, basta provar que $\{(1), (2)\} \Rightarrow S1$. Ora, esta implicação é imediata, visto que num quasigrupo as equações $ax = b$ e $ya = b$ têm uma (única) solução.

Isto completa a demonstração do teorema.

Observação: Notemos que um grupoide que satisfaça aos axiomas $S1$ e (b) não é necessàriamente um quasigrupo subtractivo. Com efeito, estes axiomas são verificados pelo grupoide $<G, \cdot>$ dado no início desta nota e, como já vimos, este grupoide não é um quasigrupo subtractivo.

É interessante observar ainda que um grupoide pode verificar os axiomas (b) e $S2$ sem, no entanto, ser um quasigrupo subtractivo. Assim, por exemplo, o grupoide $<H, \cdot>$ ([1], § 2), em que a operação $\cdot$ é definida pela seguinte tabela

H	a	b
a	b	b
b	b	b

satisfaz os axiomas (b) e $S2$ e nem sequer é um quasigrupo, visto que a equação $bx = a$ não tem solução.

BIBLIOGRAFIA

[1] José Morgado, *Nota sobre quasigrupos subtractivos*, «Gazeta de Matemática», n.º 92-93, 1964.

La Inducción Matemática

por Eduardo H. del Busto (1)

A los profesores de matemática secundaria que han sido mis alumnos.

INTRODUCCION

De acuerdo con recomendaciones didácticas recientes, el método de la inducción matemática *pronto ha de ser tema de explicación en la segunda enseñanza.*

Los textos corrientes entre los profesores no son ricos en motivaciones adecuadas a la exposición y a la comprensión del razonamiento por recurrencia. Por fortuna, el excelente y ampliamente difundido How to solve it, *de George Polya, llena un notorio vacío en cuanto a la enseñanza del* mecanismo inductivo, *pues aporta inteligentes detalles cuyo conocimiento todo professor agradece.*

A nuestro juicio, falta, sin embargo, un enfoque histórico *de la cuestión, destinado a rastrearla desde los remotos y oscuros orígenes hasta los días presentes, cuando se manifiesta plena de sugerencias y posibilidades de* integración cultural. *El especialista en Historia de la Matemática cuenta, sin duda, con la información bibliográfica y, acaso, con los testimonios necesarios para reconstruir las etapas sucesivas de la argumentación inductiva; pero, en realidad, no tratamos aquí la historia de este interesante tema de la matemática sino en la medida parcial requerida por nuestro intento — repetimos — de ofrecer un enfoque histórico que satisfaga algunas exigencias didácticas. Queremos, pues, suministrar una serie de motivaciones más para el logro de una mayor comprensión de un modo de razonamiento cuya naturaleza misma aparece con nuevos relieves si se la trata según su línea evolutiva a través de los tiempos.*

La relación de las principales conexiones históricas del problema de la inducción matemática, que tantas implicaciones tiene, ha de servir — así lo esperamos — para provocar el interés de los alumnos secundarios, cuya fuerte apetencia cultural *no siempre es aprovechada al máximo en los cursos científicos de segunda enseñanza.*

A pesar de lo dicho, el presente trabajo está dedicado a los professores y no a los discípulos; por lo menos, en principio. Mas estamos seguros que los enseñantes harán llegar a los jóvenes, en oportunas dosis bien acondicionadas, algunos elementos de los muchos y variados que en esta reseña ofrecemos. La experiencia personal les ha de dar la pauta que mejor convenga a los alumnos.

La finalidad didáctica *de nuestra exposición y el* círculo de lectores *en quienes se ha pensado al redactarla, determinan el nivel y la extensión de los comentarios que siguen. No se requieren conocimientos especiales para abordar el contenido de este folleto; pero cierta madurez intelectual y alguna somera información acerca de los fundamentos de la matemática, se necessitan para interpretar cabalmente el alcance de las palabras de los últimos capítulos, donde la dificultad de los pro-*

---

(1) Doctor en Matemática. Profesor de la Universidad Nacional del Sur – Bahía Blanca.

blemas tan sólo enunciados brevemente en la mayoría de los casos, nos ha obligado a cortar y poner punto, so pena de salirnos de los límites que nos habíamos fijado antes.

Procurando ser sencillos y parcos, cuando los temas se tornan complejos o demasiado polémicos hemos preferido remitirnos a alguna obra especializada y de fácil acceso, donde podría satisfacerse la legítima avidez del presunto lector.

Bahía Blanca, Noviembre de 1963.

El Autor

DEMOSTRACIONES POR INDUCCION MATEMATICA

1. 1. Empezamos por hacer una advertencia respecto de la denominación «inducción matemática».

La palabra «inducción» es capaz de producir equivocaciones y, para no caer en ellas, se emplea el aditamento calificativo de «matemática». Algunos autores la llaman, en cambio, «inducción completa» y otros aún, prefieren evitar lisamente la voz «inducción», causante de interpretaciones erróneas, y aconsejan decir «recurrencia» por todo nombre.

La última denominación nos parece la más oportuna y práctica, porque no favorece como aquellas a mantener una confusión bastante común entre los principiantes. En efecto, el método de la demostración por recurrencia difiere completamente de esa inferencia inductiva, de la cual nos valemos en la vida diaria y en la ciencia de la naturaleza, para aprender a partir de la experiencia reiterada.

La *inferencia inductiva* nos hace extraer consecuencias generales mediante la observación de un número finito y tal vez pequeño de casos particulares, en los cuales se reitera una característica común a todos. Pero la conclusión obtenida es cierta sólo cuando hemos podido verificar uno a uno, sin excepción, los casos que constituyen el objeto de observación; es decir, cuando han sido observados todos, sin dejar ninguno. De otro modo, *la conclusión obtenida por inferencia inductiva es* cierta *cuando hemos procedido por enumeración completa.*

Si no hubiésemos tenido a nuestro alcance la enumeración completa (sea porque no la hayamos efectuado voluntariamente, sea porque resulte infinita o sencillamente impracticable), la inferencia inductiva todavía nos brindará una conclusión (no cierta sino) *probable* en relación a alguna característica de los casos observados, *siempre que no hayan aparecido ejemplos contraproducentes.* Este tipo de conclusiones se obtienen por *enumeración incompleta* y son los más corrientes en las ciencias.

Vamos a ilustrar la inferencia inductiva por enumeración completa y por enumeración incompleta.

Si revisamos uno a uno los libros de una biblioteca y observamos, sin excepción, que tratan temas literarios, llegamos a la conclusión *cierta* de que la biblioteca es de literatura (Enumeración completa).

Si nos limitamos a revisar un conjunto de libros de esa biblioteca, pero no la totalidad de ella, estaremos constreñidos a extraer la conclusión *probable* de que la biblioteca es literaria, siempre que no hubiésemos hallado ningún volumen no literario (Enumeración incompleta). La conclución es tanto más probable cuanto mayor sea el número de las reiteradas observaciones.

Las conclusiones surgidas de la inferencia inductiva (completa o incompleta) no son proposiciones *demostradas,* en el sentido lógico del término. Podemos decir de ellas que han sido *verificadas* (en forma total o parcial, respectivamente).

En cambio, la *recurrencia (inducción matemática* o *inducción completa)* es, en primer lugar, un método de demostración al cual la matemática echa mano a fin de *deducir* proposiciones estrictamente válidas en una infinidad numerable de casos, sin requerir, no obstante, una infinidad de pruebas.

Conviene insistir en este punto: la recurrencia es un método de demostración, no de verificación. Es, por ende, esencialmente diversa de la inferencia inductiva.

Es verdad, empero, que muchas innovaciones en matemática se conjeturan antes de demostrarse; y es verdad también que, en el proceso de conjeturar, la mente humana procede muchas veces inductivamente, como lo atestiguan trabajos de psicología de la invención. Pero la incorporación de una proposición al dominio matemático exige, en absoluto, el cumplimiento de los requisitos de la ciencia demostrativa. La recurrencia sirve los propósitos de ésta; no debe ser confundida, pues, con la inducción de las ciencias naturales.

Para comprender mejor lo que acabamos de expressar, veremos algunos ejemplos matemáticos, donde hacemos uso correcto o incorrecto del método de recurrencia.

1. 2. Leamos con atención los enunciados y demostraciones que siguen:

a) *Demostrar que* $1+2+3\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$, *para cualquier* n *natural.*

Muchos alumnos están tentados de razonar como si se tratase de una proposición que se somete a prueba experimental. Dirían, poco más o menos: «La fórmula es cierta porque se cumple si $n=1, 2, 3, 4, 5,$ *etc.* Inferimos, pues, que es verdadera».

En matemática un razonamiento tal es inadmisible, aunque sea del tipo que emplean la física, la química, la biología, para verificar una hipótesis probable.

El método de recurrencia, como veremos luego, trasciende la conjetura y afirma la proposición deductivamente.

b) *Demostrar que todo número naturat de la forma* n^2+n+41 *es primo.* (?)

Esta famosa expresión propuesta por Leonhard Euler (1707 a 1783) «parece» cierta porque se verifica para $n=0,1,2,3,\cdots,39$; es decir, se verifica en los primeros cuarenta (!) casos... Sin embargo, para $n=40$, resulta un número compuesto: 40^2+40+ $+41=1681=41^2$.

¿Para qué nos sirve este hermoso ejemplo? Para precavernos de las conjeturas inferenciales no demostradas y para distinguir, de una vez por todas, una demostración matemática de una inducción natural.

c) n *planos dividen al espacio en* 2^n *partes.* (?)

Otra vez la misma historia. Si $n=1$, la proposición se verifica; si $n=2$, también; si $n=3$, también. Sin embargo, cuatro planos dividen al espacio en catorce partes, y cinco planos lo dividen en veintidós.

O sea, la proposición anterior no se verifica para $n=4$ ni para $n=5$; el teorema no es cierto *en general*, a pesar de que una conjetura apresurada permitía suponerlo.

(En general, lo cierto es que n planos dividen al espacio en $n(n-1)+2$ partes).

En matemática (y en ciencia natural) basta que un solo caso contradiga a una fórmula conjeturada como válida en general, para que tal fórmula quede negada en general (En matemática, definitivamente; en ciencia natural, transitoriamente).

La proposición general b) quedó invalidada al verificar que $n=40$ no la satisface, o sea que $40^2+40+41$ no es primo; la proposición c) quedó invalidada al verificar que $n=4$ (ó $n=5$) no la satisfacen.

¿Será necesario recurrir a una *infinidad* de verificaciones para asegurar la *validez general* de una fórmula como la a), por ejemplo? Si así fuese, nunca estaríamos en condiciones de afirmar que una proposición como la a) es cierta en general, porque existe imposibilidad de realizar infinitas verificaciones. Afortunadamente, el método de demostración por recurrencia nos proporciona la clave para razonar correctamente en estos casos del quehacer matemático.

El esquema es notable por su sencillez. Ante una proposición general en donde intervienen los números naturales $1, 2, \cdots, n, \cdots$ (o, acaso, $0, 1, 2, \cdots, n, \cdots$) y cuya verdad debemos demostrar, procedemos en tres etapas:

1.º *Demostramos* que la proposición es cierta para un primer elemento (para $n = 1$ ó para $n = 0$, por ejemplo). Como éste constituye un solo caso, basta una verificación de la fórmula; verificación que es válida por enumeración completa.

2.º *Demostramos* que la proposición es cierta para $n = k + 1$ *si* la hemos supuesto cierta para $n = k$, siendo k un número natural *cualquiera.*

3.º «Cumplidas las etapas 1.º y 2.º, *afirmamos* que la proposición es cierta en general». La afirmación es trascendental, en el sentido de que traspasa los límites de cualquier posible experiencia. Reparemos bien: se apoya en que, para un primer elemento se verifica (o se demuestra) la proposición, y que *supuesta* válida para un elemento *cualquiera,* se *demuestra* válida para el *siguiente* elemento.

La tercera etapa constituye el principio de recurrencia (o de inducción completa) cuya esencia e implicaciones culturales intentaremos dilucidar históricamente, a partir del Cap. II. Por ahora contentémonos con parangonarlo con la sucesión de una herencia dejada por un primer magnate con orden de transmitirla inalterada indefinidamente, sin que ninguna vicisitud la modifique nunca. Condiciones muy fuertes; condiciones ideales, sólo exigibles en el dominio de la razón.

Para conceder vigencia al principio de recurrencia es condición esencial que las etapas 1.º y 2.º sean demostradas. De otra manera, decimos que el principio de recurrencia se apoya en la demostración de dos teoremas previos: uno se refiere al primer elemento y otro concluye la validez de la proposición para un elemento cualquiera si se la *supone* para el elemento anterior. La segunda condición significa que la fórmula sometida a prueba constituye una *propiedad hereditaria* e inalterable, transmitida del caso k-ésimo al siguiente, cualquiera sea k.

El principio se halla condicionado, pues, a dos teoremas. A dos teoremas y no a uno de los dos. El profesor debe insistir sobre este particular...

Pasemos ahora a ejemplos concretos para mostrar la aplicación correcta del principio de recurrencia y para mostrar, también, los efectos que produce una aplicación incorrecta.

d) Demostramos por recurrencia la conjetura planteada en *a*)

TEOREMA. $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, *para cualquier* n *natural.*

Primera etapa (Teorema d · 1): *La fórmula es cierta para* n = 1.

En efecto, tomando $n = 1$, la fórmula se verifica, pues resulta

$$1 = \frac{1 \cdot (2)}{2}.$$

Esta verificación directa basta; lógicamente.

Segunda etapa (Teorema d · 2): *Si la fórmula se supone válida para* n = k (siendo k, cualquiera), *es también válida para* n = k + 1.

Partimos de la hipótesis de d · 2, que consiste en suponer cierto que

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Sumando $k+1$ a ambos miembros de la igualdad y operando de acuerdo con las reglas de la aritmética, se obtiene:

$$1+2+3+\cdots+k+(k+1)=$$
$$=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=$$
$$=\frac{(k+1)(k+2)}{2},$$

que es lo que procurábamos demostrar, porque la última expresión es la misma que resultaría de la fórmula *d*) si se reemplazase en ella n por $k+1$.

Como acaba de verse, ya se han cumplido las etapas primera y segunda, y, por tanto, es aplicable la tercera etapa, la cual equivale a afirmar que la fórmula *d*) es válida en general por haberse demostrado d · 1) y d · 2).

Ha quedado demostrado por recurrencia o inducción completa el teorema

Es $1+2+3+\cdots+\mathrm{n}=\dfrac{\mathrm{n}(\mathrm{n}+1)}{2}$, *cualquiera sea* n *natural.*

Si el lector se sirve cotejar el razonamiento que hemos efectuado a lo largo del párrafo correspondiente al ejemplo *d*), con el que habíamos presentado en *a*), recibirá una patente aclaración de la diferencia que existe entre una demostración y una simple conjetura inductiva.

¿Es imprescindible cumplir las tres etapas para la correcta aplicación del método demostrativo por recurrencia? La respuesta es afirmativa, como los ejemplos que vienen a continuación lo evidencian.

e) Es imprescindible demostrar la etapa primera. De lo contrario llegaríamos a conclusiones erróneas como la omisión de esta etapa permite extraer. Así, el falso teorema: *Todo número natural iguala al siguiente*, se fundamenta en haber «demostrado» que $n=n+1$, para todo natural (!). En efecto, pensaríamos luego de haber omitido la verificación que impone la etapa primera, *si suponemos que* $k=k+1$ (etapa segunda, sola), *se deduce que* $k+1=k+2$, pues esta última igualdad (!) se obtiene de la anterior sumando 1 a ambos miembros.

Si, en virtud de cumplirse la etapa segunda (y no cuidando que debe cumplirse, además, la primera) aplicamos (mal) ahora la etapa tercera, concluiríamos afirmando que $n=n+1$, para todo n natural. Esto implicaría afirmar también que todos los números naturales son iguales entre sí; lo cual no es cierto.

A tan grave error hemos sido conducidos por no haber respetado la etapa primera; aquella que nos habría exigido verificar que $n=n+1$ se cumple si $n=1$, y, como esto no es verdad, pues 1 no es igual a 2, no tenemos derecho a aplicar la etapa tercera; es decir, el principio de recurrencia no cabe en este caso.

f) Es imprescindible demostrar también la etapa segunda. Sobre este particular nos basta con recalcar algunas observaciones que ya tenemos hechas.

Las conclusiones erróneas *b*) y c) verifican, no obstante ser falsas, la etapa primera: ambas se cumplen para un primer elemento natural.

Sin embargo *no son ciertas* en la segunda etapa, pues no valen para el siguiente de cualquier k, como lo hemos notado a través de casos particulares en los ejemplos *b*) y c).

Del mismo modo como reclama la verificación para el primer elemento, el principio de recurrencia exige el cabal cumplimiento de la segunda etapa, donde se pone de relieve el carácter hereditario, inalterable, de una propiedad que se trasmite desde ese primer elemento indefinidamente.

En *Induction and Analogy in Mathematics* (volumen I de *Mathematics and Plausible Reasoning*) de Georg Polya, se plantea un problema paradojal muy ilustrativo de lo que importa la elección de un elemento *cualquier* en la segunda etapa de la demostración por recurrencia. Helo a continuación:

Considerando que las paralelas son rectas del plano que se cortan en el infinito, demostraremos(!) que «n rectas cualesquiera del plano tienen un punto en común».

La proposición es obvia para $n=1$ y para $n=2$ (aún tratándose de paralelas, como hemos dicho). Supongamos ahora que la proposición es cierta para $n=k$. Entonces, para «probar» que es cierta para $n=k+1$ razonamos así:

De las $k+1$ rectas elegimos k. Estas pasan por un punto, según hemos supuesto. Una de ellas y la $(k+1)$-ésima recta pasan, entonces, por un punto, pues así lo hemos verificado para $n=2$. Luego, las $k+1$ rectas pasan por un punto del plano (!).

La conclusión es falsa, sin embargo, porque tres rectas distintas *no pasan necesariamente* por el mismo punto del plano. Por consiguiente, al tomar en consideración k rectas del plano, bastará suponer que por lo menos *dos* son distintas para no poder inferir necesariamente que dichas k rectas y la $(k+1)$-ésima se cortan en un solo punto.

Esta paradoja nos enseña que para aplicar correctamente el principio de recurrencia, es esencial que las condiciones de la herencia estén precisamente enunciadas y valgan para cualquier n. No basta que valgan para algunos n (como aquí, para $n=1$, ó $n=2$, nada más).

1. 3. Para familiarizar al alumno con las tres etapas del método de recurrencia, el profesor debe encomendar varios ejercicios de demostración. Una colección muy útil es la de los capítulos I y II de I. S. Sominskii, *The method of mathematical induction,* Blaisdell, N. York y Londres, 1961.

La práctica del método facilita la correcta interpretación y torna comprensible al alumno el enunciado del principio de recurrencia, que los textos corrientes presentan ya como axioma ya como teorema.

Algunos de esos enunciados se transcriben a continuación:

(1.3.1) «Supongamos haber demostrado: *a*) que el número 1 (o el cero) tiene la propiedad P; *b*) que, en la hipótesis de que el número natural k tiene la propiedad P, se demuestra que el número natural $k+1$ también la tiene. Entonces todo número natural tiene necesariamente la propiedad P».

(1.3.2) «Para demostrar que una propiedad P de los números naturales es general para todos los números mayores o iguales que uno de ellos llamado m, basta verificar: *a*) que P se verifica para m; *b*) que supuesto que P se verifica para $n \geq m$, se prueba que P se verifica para $n+1$».

En este enunciado, m oficia de primer elemento.

(1.3.3) «Sea N el conjunto de los números naturales y se trata de verificar cierta propiedad. Entonces

$$\left\{\begin{array}{l}(1)\ \text{La propiedad es verdadera para } a=1\,; \\ (2)\ [\forall p \in \mathrm{N}:\ \text{verdadera para } a=p] \\ \quad \Rightarrow [\text{verdadera para } a=p+1]\end{array}\right\}$$
$$\Rightarrow [\text{verdadera } \forall a \in \mathrm{N}]\text{».}$$

La precedente enunciación reviste una forma aceptable para un enfoque moderno de la matemática elemental. Es particularmente interesante porque pone de manifiesto la vinculación de las implicaciones. Se deberá cuidar que los alumnos sepan traducir al lenguaje corriente lo expresado por los símbolos.

(1.3.4) «Si a un conjunto pertenece un primer número natural, y con cada elemento su sucesor, entonces a ese conjunto pertenecen todos los números naturales».

Como hemos tomado aquí el amplio concepto de «conjunto» como equivalente al de «clase de fórmulas que verifican cierta propiedad», la manera de expresar el principio de recurrencia que acabamos de dar, ofrece la particularidad de usar las breves nociones que sobre la teoría de los conjuntos se enseñan en los colegios secundarios.

1. 4 Aunque no las utilizaremos a menudo, merecen párrafo aparte las llamadas *definiciones por recurrencia* (o *definiciones por inducción*) que el alumno encarará en estudios posteriores. Las caracterizaremos por medio de un ejemplo.

Imaginemos haber construído la tabla de multiplicar correspondiente al número natural a, basándonos en la noción previa de suma de naturales. La tabla sería de la forma:

$$a \times 1 = a$$
$$a \times 2 = 2a$$
$$a \times 3 = 3a \text{; etc.;}$$

otorgando a a diversos valores se consiguen diversas tablas de multiplicación. ¿Cómo ascender, de esas tablas *particulares*, a una definición de la multiplicación de los números naturales?

La *definición por recurrencia* nos suministra la respuesta satisfactoria. Para el caso del producto de números naturales, hela aquí:

(1.4.1) «Sean a, n, números naturales cualesquiera, y sea $n+1$ el sucesor de n; entonces la multiplicación de números naturales queda expresada por:

$$\begin{cases} a \times 1 = a \\ a \times (n+1) = a \times n + a \text{ .»} \end{cases}$$

Nótense los dos pasos seguidos: la definición del producto de a por el primer natural, y la definición del producto de a por el siguiente de n. Evidentemente, este paso unido al primero significa reconocer la presencia de un ingrediente hereditario, inalterable, a lo largo de todos los números naturales. Sobre la base de ambos pasos está cimentada, pues, la definición por recurrencia (o por inducción).

(1.4.2) Es posible comprobar que *cualquier justificación de una definición por recurrencia* implica *una justificación de la* demostración *por recurrencia*, y *recíprocamente*. Excede al nivel impuesto a este folleto, considerar el detalle de tan interesante cuestión; pero es indispensable tener en cuenta el resultado anotado, pues en virtud de él nos eximiremos de mayores comentarios acerca de las definiciones por recurrencia.

Por otra parte, quien desee ahondar el tema podrá recurrir al capítulo 6 de Evert W. Beth, *The foundations of mathematics*, 1959.

(1.4.3) Para finalizar, vamos a señalar las notas típicas del método de recurrencia. Primero, la existencia de un *ingrediente hereditario*, inalterable; segundo, la presencia de una sucesión que tiene un primer elemento, y que no termina.

El método se aplica, entonces, si existe una propiedad que transita a lo largo de todos los elementos de un conjunto numerable, sin excepción alguna y sin manifestar modificación alguna.

Con esta noción general y un tanto imprecisa por el momento, vamos a rastrear los oscuros orígenes históricos del método de la inducción completa. Con el ánimo de iluminar mejor su significación y alcances hemos de indagar antes las diversas modalidades de algunas antiquísimas argumentaciones donde se evidenciaba algún tipo de ingrediente hereditario, inalterable a lo largo de muchas (aunque no necesariamente infinitas) etapas de un proceso. Después hemos de estudiar más específicamente las primeras demostraciones donde el método se aplica con el suficiente rigor como para no confundirlo con otro ninguno.

EL «INGREDIENTE HEREDITARIO» EN ARGUMENTACIONES ANTIGUAS

2. 1. Aunque impreciso y todavía oscuro, uno de los primeros testimonios donde atisbamos el empleo de una especie de «ingrediente hereditario» en argumentaciones demostrativas, se remonta a varios siglos antes de Cristo. Por lo menos en Europa, pues del Oriente nada sabemos en estos aspectos.

Acaso el sofista Brisón de Heraclea (siglo V a. C.) y, seguramente Políxenes, a quien le ha sido atribuída la paternidad del argumento, emplearon en actitud polémica, un tipo de razonamiento que fue llamado *argumento del Tercer hombre* y que reviste la forma de un proceso deductivo donde es patente la intervención de características hereditarias inalterables.

De Políxenes se sabe que vivió en Siracusa entre los años 367 y 344 a. C. Por este pequeño lapso de su vida, colegimos que fue contemporáneo de Platón, quien circunstancialmente estuvo también en Sicilia en diversas oportunidades.

Platón alude a Políxenes en el *Parménides*, con ocasión de criticar aquella argumentación del Tercer hombre, atribuíble como hemos dicho a Políxenes, y cuya finalidad era invalidar la teoría platónica de las Ideas, poniendo de manifiesto dificultades de orden lógico o filosófico que los miembros de la Academia discutían mucho. Por eso Aristóteles (*Metafísica*, A. 9) alude al argumento del Tercer hombre cuando revista las críticas suscitadas por la concepción platónica, y, en *El-Soph.* lo cita como sofisma. Ubiquémoslo históricamente.

Platón no presta atención a lo peculiar de las cosas visibles y tangibles, sino a lo que ellas tienen de común, o sea, a lo general, que es de naturaleza puramente inteligible. No lo particular de cada cosa por separado es lo esencial y permanente, sino aquello que tienen en común con otras cosas de la misma clase. A esta cualidad común, que desde Aristóteles denominamos «concepto», Platón la llama «Idea».

En la *República* (X, 596 A) dice Platón: «Suponemos que una Idea existe cuando damos el mismo nombre a muchas cosas separadas.»

Las Ideas forman el mundo existente por sí mismo, eterno, invariable y sólo accesible por el pensamiento. Los seres sensibles, en cambio, no son sino las sombras o imágenes del superior mundo ideal, como lo enseña el muy conocido símil de la caverna (*Rep.*, libro 17).

Las Ideas platónicas son además los modelos *perfectos e inmutables* de los cuales las efímeras cosas sensibles toman la razón de su aparente existencia.

Hay Ideas de cuanto sea posible; no únicamente de las cosas naturales, sino también de los productos artísticos, de las relaciones, de las actividades, de las cosas valiosas y de las indignas, etc. En una palabra, una verdadera *duplicación* del mundo: el sensible y el inteligible. Y tal duplicación es la consecuencia necesaria de postularse en el *Parménides* (130, B-D) que todo cuanto existe como sensible tiene su razón de ser en una Idea.

Pues bien, el argumento del Tercer hombre asume formas diversas para rebatir al platonismo. Una reviste carácter de sofisma (Si decimos, «el hombre pasea», no estamos hablando de la Idea de hombre — que es inmóvil — ni de un hombre particular; debemos concluir que nos hallamos refiriéndonos a una tercera especie de hombre); pero nos interesa destacar aquellas enunciaciones donde aparece un ingrediente hereditario que se reitera, inalterado, muchas veces.

Así, se atribuye precisamente a Políxenes este razonamiento: «Si el hombre existe por participar de la Idea de hombre, existe asimismo la razón entre hombre particular e Idea de hombre, y tal razón no es ya ni

Idea de hombre ni hombre particular; es una tercera especie. Y así siguiendo, indefinidamente.»

No cabe duda alguna que la argumentación puede explayarse para objetar la existencia de los dos mundos platónicos. Políxenes podía argüir como se dice a continuación.

Dos cosas particulares semejantes deben su *semejanza* a la Idea general de tales cosas, pues la Idea otorga la razón de ser de la semejanza entre las dos cosas particulares. Pero ¿a quién ha de atribuirse la razón de ser de la semejanza que existe, a su vez, entre la antedicha Idea y cada una de las dos cosas particulares? Por ejemplo, si la Idea de hombre está constituída por las notas comunes de los hombres particulares, la semejanza, ahora entre un hombre particular y la Idea misma de hombre, ¿qué razón de ser posee?

La semejanza entre la Idea general de hombre y el hombre particular, no puede fundamentarse ni en la Idea ni en el hombre; porque en aquella está la razón de la semejanza de seres particulares y no la razón de la semejanza entre un ser particular y una Idea. Por consiguiente, la razón de ser de la semejanza entre la Idea y el hombre particular ha de residir aparte de uno y otra, es decir, en un Tercer Hombre, en una nueva entidad.

Mas, análogamente, la razón de ser de la semejanza entre el Tercer hombre y la Idea de hombre es imposible hallarla en una u otro de éstos; entonces, se infiere que ha de residir en una nueva entidad aún, que llamaremos el Cuarto Hombre. Y, así, proseguiremos hasta el infinito. He aquí un *regressus in infinitum*, que para los griegos significaba una gravísima dificultad y que, lógicamente hablando, contradice el postulado de la duplicación del mundo, admitido por Platón en el *Parménides*.

No nos compete discutir los alcances filosóficos del argumento del Tercer hombre. Pero los esquemas del razonamiento de Políxenes nos resultan de sumo interés, porque en ellos vemos cómo cierto ingrediente pasa de etapa a etapa discursiva con el mismo grado de vigor, repitiendo los mismos efectos sucesivamente, y, cual una herencia perfecta e inalterable a través de las infinitas instancias que recorre, los elementos de la sucesión admiten igual aporte lógico; con lo que se asegura una consecuencia final válida para la totalidad de los elementos que reciben la herencia.

El argumento del Tercer hombre termina siendo un razonamiento basado en el ingrediente hereditario inalterable, tan característico del método de la inducción matemática. No es que sea en estricta verdad una demostración por recurrencia en el sentido que corresponde otorgar hoy al método demostrativo que nos ocupa, pero en el argumento del Tercer hombre se observa el tránsito de la propiedad hereditaria de una etapa a la siguiente, todo a lo largo de una sucesión que comienza en las efímeras cosas sensibles de Platón y se remonta hacia el infinito, provocando desazón en la mente lógica de los griegos.

Este primer testimonio, vago, nebuloso, informe, del razonamiento por recurrencia, nos ubica dentro de una problemática general que sale del ámbito filosófico puro e invade nuevos dominios del pensamiento discursivo.

2. 2. En el dominio matemático los griegos también han empleado razonamientos donde se utilizan ingredientes hereditarios. También un siciliano (¡sugestiva coincidencia!), el genial Arquímedes de Siracusa (287 a 212 a. C.) nos ha legado varios testimonios geométricos del método recurrente, al cual otorga una forma muy precisa, casi inobjetable.

En verdad, Arquímedes proporciona testimonios directos e indirectos. Estos vinculan su nombre a los de Eudoxo de Cnido, Euclides y, otra vez, Platón, como hemos de mostrar a continuación. De los testimonios directos hablaremos con amplitud en el Capítulo III.

El primer *testimonio indirecto* es el postulado, hoy llamado de Eudoxo, que Arquímedes enuncia en tres de sus obras. Así, el postulado V del primer libro de *Sobre la esfera y el cilindro* dice textualmente:

«5. Además, de líneas desiguales, de superficies desiguales, de cuerpos desiguales, lo mayor excede a lo menor en una magnitud tal que si se la suma a sí misma (reiteradamente), llegará a exceder a cualquier magnitud dada de entre las que son comparables consigo y con otra».

En la introducción de *La cuadratura de la parábola*, también Arquímedes declara admitir como lema:

«... el exceso por el cual la mayor de dos áreas desiguales excede a la menor, al ser sumado a sí mismo (reiteradamente), puede hacerse exceder a cualquier área finita dada».

Y dice que dicho lema era conocido por geómetras *anteriores a él.*

En la introducción al tratado *Sobre las espirales* y con el fin de demostrar diversas proposiciones que allí trata, explica Arquímedes que,

«... previas a ellas y como es usual en otras obras geométricas, se hallan las proposiciones que permiten probar aquellas. Y aquí también, como en los libros previamente publicados, admito el siguiente lema:
que si hubiera dos líneas desiguales, o dos áreas desiguales, el exceso por el cual la mayor excede a la menor, al ser continuamente agregado a sí mismo, llega a exceder a cualquier magnitud dada entre aquellas que son comparables con ella o con otra».

Todos estos enunciados de Arquímedes involucran procesos reiterativos con intervención de un elemento hereditario muy simple, en verdad. Arquímedes recoge, en esta materia, el pensamiento de hombres como Eudoxo de Cnido (Cnido era una ciudad de Caria, en Asia Menor, sobre el Mar Egeo). El nombre de Eudoxo (406 a 355 ? a. C.) se enlaza corrientemente con el de Euclides, pues la materia del libro V de los *Elementos* es adjudicable al propio Eudoxo, quien pasa como el primer sistematizador de la teoría de las proporciones.

Si fuera así, como parece, la definición cuarta del libro V de los *Elementos* euclídeos se debe, acaso, a Eudoxo de Cnido (o a algún geómetra anterior a él, que nadie cita). La definición cuarta expresa:

«Se dice que las magnitudes están entre sí en razón, cuando al ser multiplicadas son capaces de excederse una a otra».

De otra manera: La magnitudes se dicen tener una razón entre ellas cuando al ser multiplicadas pueden sobrepasarse unas a otras.

La definición es indispensable en la teoría de las proporciones y, atendiendo a la presunta paternidad de su enunciado, ha pasado a llamarse *postulado de Eudoxo,* o bien, debido al reconocimiento que de él ha efectuado Arquímedes en los textos antes citados, donde se lo proclama presupuesto necesario de importantes proposiciones geométricas. se lo cita hoy con el nombre de *postulado de Eudoxo-Arquímedes* y se lo expresa con estas palabras:

Dadas dos cantidades homogéneas diferentes, existe siempre un múltiplo de la menor que supera a la mayor.

El postulado no presupone que las magnitudes sean conmensurables o no lo sean, y, justamente en esto radica su notable mérito histórico, pues al valerse de él para fundamentar la teoría de las proporciones quedaba bien soslayado el problema de la inconmensurabilidad, que tanto escándalo había provocado entre los mismos pitagóricos, que la descubrieron a su pesar.

Ello aparte, como el postulado de Eudoxo-

-Arquímedes no veda la posibilidad de aplicarlo a cantidades tan grandes o tan pequeñas como se quiera, y al establecer la razón entre las magnitudes, si el denominador es muy chico respecto del numerador, está como predisponiéndose a la aceptación de un proceso infinito; aunque, bien es cierto, los griegos, en particular después de Zenón de Elea, evitaban tratos con el infinito cuya índole no habían logrado conocer.

2. 3. Sin embargo, no nos parece demasiado arriesgado aventurar la conjetura de que Eudoxo tuvo cierta propensión al uso de argumentaciones en las cuales se rastrean procesos hereditarios que continúan indefinidamente. Dentro de este tipo de argumentaciones creemos ver el segundo *testimonio indirecto*, entre los antiguos; testimonio vinculado asimismo a Arquímedes y a Eudoxo. Se refiere al después llamado *principio de exhaución*.

Si bien el nombre dado a este principio data del siglo XII, parece que el primero en proponer un problema de exhaución fue Platón (428 a 347 a. C.), al preguntar si sería posible agotar el espacio entre la esfera y el dodecaedro inscripto mediante la sucesiva intercalación de otros cuerpos. Eudoxo, que se hallaba muy vinculado a Platón, consideró atentamente el problema y lo transfirió a volúmenes, áreas y longitudes en general, sentando el siguiente principio:

Dadas dos cantidades desiguales, si se quita de la más grande una parte mayor que su mitad y se continúa haciendo lo mismo, se llegará a encontrar una cantidad seguramente menor que la más pequeña de las dos cantidades dadas.

El principio se ha empleado y se emplea en muchas cuestiones geométricas. Consiste en el agotamiento de diferencias ocasionado por la repetición de una operación hereditaria. Así, todo polígono regular circunscripto posee área mayor que la del círculo correspondiente, y todo polígono regular inscripto posee área menor que dicho círculo. Aumentando el número de lados, el polígono circunscripto resultante disminuye su área y el polígono inscripto la acrecienta. El proceso se torna exhaustivo en el sentido de que ambas áreas se aproximam todo lo que se desee.

Ahora bien, demostrando que si se supone el área del círculo mayor que la de los polígonos circunscriptos se llega a un absurdo, que también se llega a un absurdo suponiendo que el área del círculo es menor que la de los polígonos inscriptos; y suponiendo la vigencia del principio de exhaución, se arriba a la conclusión de que el área del círculo iguala al área del polígono regular circunscripto y a la del polígono regular inscripto, *si el número de lados ha crecido suficientemente.*

Este procedimiento demostrativo, denominado «de exhaución» desde el siglo XII y que la Historia atribuye a Eudoxo de Cnido por inspiración de Platón, es el mismo que Arquímedes de Siracusa utiliza con éxito en problemas de cuadraturas. (Ver, por ejemplo, *Cuadratura de la parábola*).

2. 4. Para cerrar el capítulo sobre atisbos del ingrediente hereditario en argumentaciones antiguas, vamos a invocar un testimonio especial recogido por Enclides (siglo III a. C.).

La proposición 20 del libro IX de los *Elementos* expressa el famoso teorema de que *los números primos son más que cualquier cantidad fija de números primos.*

Vamos a detallar la demostración euclídea, simplificando tan sólo la notación, con el propósito de aclarar aún más el proceso argumental.

Empiezo por un *caso particular*, viene a decirnos Euclides. Sean dados tres números primos a, b, c. Digo que, aparte de estos tres, hay otro número primo.

En efecto, si tomo $a \cdot b \cdot c + 1$, este número ha de ser primo o no serlo, pues una tercera alternativa es imposible. Si $a \cdot b \cdot c+1$ fuese primo, la tesis de mi caso particular habría quedado probada; si $a \cdot b \cdot c+1$ no fuese primo, debería admitirse (de acuerdo con la proposición 31 del libro VII de los *Elementos*) que es divisible por algún número primo d. Pues bien, d difiere de a, de b y de c; diré por qué.

Si d fuese igual a a, o igual a b, o igual a c, entonces $a \cdot b \cdot c$ sería múltiplo de d; y como también $a \cdot b \cdot c+1$ es múltiplo de d de acuerdo con lo que acabo de admitir, habría que concluir que

$$a \cdot b \cdot c+1-a \cdot b \cdot c$$

es también múltiplo de d; o sea, que 1 es múltiplo de d, lo cual es *absurdo*.

Pór tanto, d difiere de a, de b y de c; y, como por hipótesis d es primo, acabo de hallar, pues, un número primo, más que los tres dados previamente en mi caso particular.

Hasta aquí la demostración euclídea. Reflexionemos un poco sobre ella. Euclides no ignora que la prueba ofrecida se atiene al caso particular de que haya *tres* primos. Sabe, además, cuál es el proceso que impulsa la demostración; proceso que, aunque ilustra un caso particular, se lo presenta como integrado por evidentes etapas sucesivas, que son: 1) hallar el producto de los números primos dados, 2) sumar la unidad al producto anterior, 3) discutir si dicho producto sumado a la unidad es primo o no lo es. Ante el esquema de este proceso, el caso particular considerado oficia, ciertamente, de un *caso cualquiera*, y, por lo que evidencia, sábese que el teorema es verificable en el caso siguiente, en donde se empezaría por los cuatro primos a, b, c y d. Por otra parte, la proposición sería obvia en oportunidad de considerar sólo el primer primo a.

En la demostración de la proposición 20 debe sobreentenderse que se admite la posibilidad de prolongar el proceso hereditariamente, con lo cual quedará entonces probado que *el número de los números primos es infinito*.

Por cierto, una reflexión ad-hoc como la precedente no aparece en forma explícita en el texto euclídeo; pero con todo derecho ha de presumirse que quienes lo leyeran a la luz de una crítica aguda tendrían que finalizar dándose cabal cuenta del mecanismo demostrativo subyacente; mecanismo que se apoya en un tipo de inferencia en muchos puntos *similar* a la que conforma el método de recurrencia.

No es la proposición 20 del libro IX de Euclides la única que se sustenta en ese tipo de inferencia. Numerosas definiciones y varios teoremas de los *Elementos* abonan la conjetura de que el procedimiento de *recurrir al siguiente* era manejado con entera naturalidad y parecía innecesario ponerlo de manifiesto como si no se le otorgase una categoría excepcional, ya que, según vemos, existía un *tácito reconocimiento* del ingrediente hereditario que se consume en el método de inducción.

La proposición 20 antes citada es la más reveladora del ingrediente hereditario que decimos; pero no es la única de los textos euclídeos que nos inclinan a pensar de modo análogo. El mismo principio aflora en Def. V, 17; Teor. V, 22; Teor. VII, 14; Teor. VII, 27; Teor. IX, 12; Teor. IX, 13, donde se lo nota adoptado sin ser proclamado, como si fuese parte natural de una argumentación por antigua nunca cuestionada.

2. 5. La conclusión que debemos extraer de los testimonios invocados en los párrafos 2 · 1 a 2 · 4 es que algunas notas que hoy vemos patentes en el principio de inducción completa provienen de argumentaciones muy antiguas, algunas de las cuales es imposible rastrear hasta los orígenes sin duda remotísimos. Como rasgo común de todas esas argumentaciones exhibimos el ingrediente hereditario que siempre aparece como proceso que agota una totalidad. Así, en el argumento

del tercer hombre, nos conduce a una infinitud de jerarquías; en el postulado de Eudoxo-Arquímedes, nos confirma en un conocimiento de base empírica cuyos primeros enunciados no tienen porqué incluir una infinidad de etapas, pero involucran una herencia inalterable; en el principio de exhaución también se observa una reiteración sin pausa y, en este caso por cierto, indefinidamente; en la proposición 20 de Euclides y en los teoremas similares precitados, es clara la presencia del elemento que se trasmite constantemente igual a través de todas las infinitas etapas del proceso.

No pretendemos afirmar que todos estos ejemplos sean evidencias del principio de inducción completa. En ellos, reiteramos, hallamos atisbos de una actitud del razonamiento; la misma que, pasados los siglos, iría a concretarse en enunciados precisos e inconfundibles. Pero, justamente, por haber existido en diversos tipos de argumentaciones el rasgo que hemos llamado «ingrediente hereditario», el método de la inducción completa ha parecido algo natural y sencillo. Pero apenas se lo problematizó, devino una cuestión ardua y oscura.

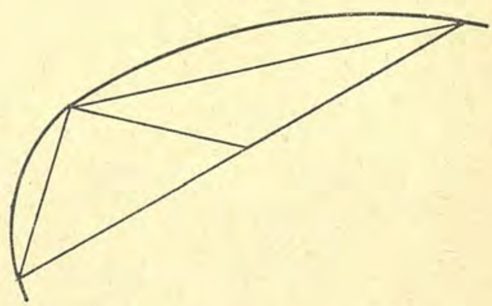
El profesor no debiera problematizarlo, pues, hasta tanto él mismo no lo capte en profundidad. Téngase en cuenta que quienes intentaron fundamentarlo lógicamente fueron mentalidades propensas a reflexionar intensamente sobre los métodos de demostración y de descubrimiento.

DESCUBRIMIENTO DEL PRINCIPIO DE RECURRENCIA ARQUIMEDES Y MAUROLICO

3. 1. En el capítulo II hemos hablado de los testimonios indirectos ofrecidos por Arquímedes de Siracusa (287 a 212 a. C.) respecto del ingrediente hereditario, una de las notas características de la recurrencia. La hemos visto en el postulado de Eudoxo-Arquímedes (2 · 2) y en el principio de exhaución (2 · 3).

Ahora nos toca referir *testimonios directos*.

Arquímedes aplicó muchas veces argumentos donde se manifiesta *indudablemente* el proceso matemático inductivo. El segundo libro de *Sobre el equilibrio de planos* contiene varias instancias de ese proceso con motivo de unas figuras allí calificadas o llamadas «figuras inscriptas en la manera consabida». Detengámonos en este punto por un instante.



Sea un *segmento de parábola*, es decir, la porción de plano limitada por una parábola y una cuerda. Por el punto medio de la cuerda trácese la paralela al eje de la parábola. Desde la intersección de esta paralela con la curva (vértice del segmento), trácense las dos rectas que pasan por los extremos de la cuerda. Quedan así formados: un triángulo inscripto en la parábola y dos nuevos segmentos de parábola. El triángulo, dice Arquímedes, es una figura inscripta en la «manera consabida».

En cada uno de los nuevos segmentos de parábola repítase la operación anterior, y en los segmentos sucesivos procédase de igual modo...

La figura resultante al unir los vértices obtenidos en cada etapa, se denomina figura inscripta en la «manera consabida».

Esto aclarado, la proposición 5 del libro segundo de *Sobre el equilibrio de planos*, expresa:

Si en un segmento parabólico se inscribe una figura en la manera consabida, el centro de gravedad del segmento queda más próximo al vértice del segmento, que el centro de gravedad de la figura inscripta en la manera consabida.

No es necesario transcribir la demostración de Arquímedes sino tan sólo destacar el esquema del razonamiento empleado por él.

En primer lugar, Arquímedes toma un segmento de parábola y *un triángulo* inscripto en la manera consabida. Demuestra aquí que el centro de gravedad del segmento de parábola se halla más cerca del «vértice» que el centro de gravedad del triángulo.

En segundo lugar, Arquímedes considera la figura inscripta *siguiente*, es decir, *un pentágono* inscripto en la manera consabida y, para él, demuestra que el centro de gravedad del segmento de parábola se halla más próximo al «vértice» que el centro de gravedad del pentágono inscripto de la manera consabida.

En tercer lugar, Arquímedes afirma lo siguiente: «Usando este último resultado, y procediendo de la misma forma, podemos demostrar la proposición para *cualquier* figura inscripta de la manera consabida». Con esta afirmación, da por concluida la prueba.

Repasemos nosotros las etapas de la argumentación arquimediana: 1) propone, por definición, una ley de formación de los sucesivos casos de figuras inscriptas de la manera consabida; 2) ofrece una demostración del teorema para un primer caso de dichas figuras; 3) presenta una demostración para la figura siguiente; 4) enuncia una conclusión general acerca de una propiedad que resulta ser hereditaria.

He ahí el esquema de recurrencia, casi a la perfección. Arquímedes lo utiliza con entera naturalidad, sin problematizar etapa alguna, ni aún la última que es esencial. ¿Qué podemos inferir de esto? Que la inducción completa no constituye misterio alguno para el gran siracusano y él no vacila un instante en emplearla como si se tratase de cualquier argumentación *incuestionablemente clara.*

Los professores de matemática secundaria debieran tomar ejemplo de la actitud de Arquímedes, absteniéndose de cuestionar el principio de recurrencia (sea exponiéndolo aparte como postulado, sea deduciéndolo de axiomas de apariencia menos comprometedora) antes de contar con una información histórica adecuada. El alumno de segunda enseñanza carece de perspectiva crítica como para seguir razonamientos sutiles, y, para evitar que se confunda en vericuetos demasiado complicados para su edad y preparación, es aconsejable, en estos particulares, no proponerle prematuramente problemas de fundamentación que no está habilitado para encarar con éxito.

Sin embargo, los profesores deben estar conscientes de las serias implicaciones que la inducción completa ha suscitado, como el *enfoque histórico* de la cuestión permite relevar sin grandes dificultades para el adulto.

Por lo que sabemos hasta el presente, ningún matemático anterior a Arquímedes ha ofrecido ejemplo más cabal del principio de inducción completa, que la demostración de la proposición 5 del segundo libro de *Sobre el equilibrio de planos*. Este testimonio directo nos conduce a la época de oro del período helenístico. Los testimonios indirectos en matemática y en filosofía abonan la conjetura plausible de que las raíces de aquel principio provienen de tiempos mucho más antiguos aún.

¿Que le toca, pues, a Maurolico?

(Conclui no próximo número)

CONCURSO

A «Gazeta de Matemática» com o apoio da Fundação Calouste Gulbenkian, promove no País, concurso para apresentação de trabalhos de matemática

No intuito de contribuir para o desenvolvimento do estudo da matemática, em Portugal, a «Gazeta de Matemática», com o apoio da Fundação Calouste Gulbenkian, promove um concurso de trabalhos de matemática a que podem concorrer quaisquer indivíduos residentes no País. O concurso é subordinado ao seguinte

REGULAMENTO

1. O concurso constará de duas secções:

Secção A — A esta secção poderão concorrer quaisquer indivíduos com residência permanente no País *não licenciados em matemática ou física.*

Secção B — A esta secção poderão concorrer quaisquer indivíduos com residência permanente no País *não doutorados em matemática ou física.*

2.1 Os trabalhos apresentados farão a exposição de assunto de matemática de actual interesse, que se enquadre em qualquer das alíneas seguintes:

Pedagogia e História da Matemática
Matemática Pura
Matemática Aplicada
Métodos Matemáticos da Física
Técnicas de Tratamento da Informação.

2.2 Cada concorrente poderá apresentar mais de um trabalho; todos os trabalhos serão apreciados e classificados. Cada concorrente, porém, não poderá ter direito a mais que um prémio.

2. 3 Poderão ser considerados extra-concurso trabalhos originais de investigação.

3. Os concorrentes deverão apresentar um sumário de cada trabalho até o dia 31 de Outubro de 1965 e os trabalhos completos até o dia 31 de Dezembro de 1965.
A apreciação será feita em seguida e a decisão do Júri será publicada na *Gazeta de Matemática.*

4. Os trabalhos apresentados não deverão, em princípio, exceder 100 páginas dactilografadas a dois espaços, formato A4.

5. 1 Para cada uma das secções são criados dois prémios de 7.000$00 e 3.000$00 respectivamente.

5. 2 Para os trabalhos apresentados em extra-concurso poderão ser estabelecidos prémios, a considerar em cada caso.

6. Os trabalhos premiados serão publicados na *Gazeta de Matemática* a quem os autores cederão os seus direitos. Os trabalhos não premiados mas considerados com mérito e interesse poderão ser também publicados na *Gazeta de Matemática* mediante acordo com o autor, mas sem direito a qualquer prémio.

7. Os trabalhos serão apreciados por um Júri constituído por matemáticos representantes de *Gazeta de Matemática* e das diversas actividades nacionais ligadas á matemática. Se for necessário, a revista recorrerá a outros especialistas qualificados, portugueses ou estrangeiros.

Para esclarecimentos complementares convidam-se os interessados a entrar em contacto com o

Júri do Concurso

dirigindo a correspondência para a *Gazeta de Matemática,* Rua Diário de Notícias, 134-1.º E. — Lisboa

RELATÓRIO REVISTO SOBRE A LINGUAGEM ALGORITMICA ALGOL 60

Dedicado à memória de WILLIAM TURANSKI

Por J. W. BACKUS, F. L. BAUER, J. GREEN, C. KATZ, J. MCCARTHY, P. NAUR, A. J. PERLIS, H. RUTISHAUSER, K. SAMELSON, B. VAUQUOIS, J. H. WEGSTEIN, A. VAN WIJNGAARDEN, M. WOODGER
Editado por PETER NAUR — Aprovado pelo Conselho da **International Federation for Information Processing**

Com o objectivo de habilitar os Matemáticos portugueses ao acesso às actuais Técnicas de Tratamento da Informação, a Gazeta de Matemática *e o CENTI colocam à disposição do público português o Revised Report on the Algorithmic Language ALGOL 60.*

A PETER NAUR *e ao grupo de Amigos comuns dinamarqueses, a expressão do nossso maior reconhecimento.*

17 Dezembro 1963 J. G. T.

Sumário

Este Relatório faz uma descrição completa da linguagem algorítmica internacional, ALGOL 60. É uma linguagem susceptível de exprimir os processos numéricos de uma classe muito vasta, numa forma suficientemente concisa para a tradução automática directa na linguagem dos calculadores de programa.

A introdução relata os trabalhos preparatórios que conduziram à conferência final no decorrer da qual a linguagem foi definida. Além disso são expostas as noções de linguagem de referência, de linguagem de publicação e de representação máquina.

No primeiro capítulo apresenta-se uma visão de conjunto dos constituintes de base e das características da linguagem e expõe-se a notação formal pela qual se define a estrutura da sintaxe.

O segundo capítulo dá a lista de todos os símbolos de base e define as unidades sintáticas denominadas identificadores, números e cadeias. São igualmente definidas algumas noções importantes como as de quantidades e valores.

O terceiro capítulo explica as regras de formação das expressões e dá o significado dessas expressões. Existem três èspécies de expressões: aritméticas, booleanas (lógicas) e de designação.

O quarto capítulo descreve as unidades operacionais da linguagem chamadas instruções. As instruções de base são: instruções de afectação (avaliação de uma fórmula), instruções IR A (rotura explícita da sequência de execução das instruções), instruções vasias e instruções de procedimento (chamada para a execução de um processo fechado, definido por uma declaração de procedimento). Explica-se a formação de estruturas mais complexas com caracter de instrução. Estas compreendem: instruções condicionais, instruções PARA, instruções compostas e blocos.

No quinto capítulo são definidas as unidades denominadas declarações, que servem para a descrição de propriedades permanentes das unidades que intervem em processo descrito pela linguagem.

O Relatório termina com dois exemplos pormenorizados de utilização da linguagem e um índice alfabético das definições.

Introdução

História

Depois da publicação de um relatório preliminar (1), (2) sobre a linguagem algorítmica ALGOL, tal como foi concebida durante a conferência de Zurich em 1958, surgiu grande interesse por esta linguagem.

A um congresso de informação realizado em Mogúncia em Novembro em 1958, seguiu-se uma conferência em Copenhage em Fevereiro de 1959 com uma quarentena de pessoas de vários países da Europa. Desta conferência saíu um grupo de trabalho. A conferência deu ainda origem à publicação pelo **Regnecentralen** de Copenhage de um boletim ALGOL editado por PETER NAUR. Este boletim serviu de base a todas as discussões ulteriores. Na ICIP realizada em Paris em 1959 sob o patrocínio da UNESCO houve várias reuniões do grupo ALGOL, tanto formativas como informativas, onde foram revelados certos malentendidos referentes às intenções de grupo que desde início era responsável pela definição da linguagem; ao mesmo tempo no decorrer dessas reuniões foi devidamente apreciado o enorme esforço empreendido.

Decidiu-se então uma reunião em Janeiro 1960 para melhorar a linguagem ALGOL e preparar um relatório final. Realizou-se em Paris em Novembro 1959 uma reunião preparatória europeia com uma cinquentena de pessoas provenientes de vários países. Foram escolhidas sete individualidades europeias para participarem na conferência final de Janeiro de 1960 na representação das organizações seguintes: **Association Française de Calcul, British Computer Society, Gesselschaft fur Angwandte Mathematik und Mechanik e Nederlands Rekenmachine Gonootschap.** Estes sete representantes europeus encontraram-se uma última vez em Mogúncia em Dezembro 1959.

Entretanto, nos Estados Unidos, qualquer pessoa que desejasse introduzir modificações ou correcções na linguagem ALGOL poderia enviar os seus comentários á revista «Communications of the ACM» que se encarregaria da respectiva publicação. Estas notas e comentários acabaram por conceder uma base sólida a algumas alterações introduzidos na linguagem ALGOL. As duas organizações SHARE e USE organizaram grupos de trabalho ALGOL, estando ambas representados no ACM **Committee on Programming Languages.** Este Committee reuniu-se em Washington em 1959 e examinou os comentários sobre o ALGOL publicados nas comunicações da ACM. Do mesmo modo que na Europa, sete delegados americanos foram escolhidos para participar na reunião de Janeiro de 1960 e tiveram a sua reunião preparatória em Boston em Dezembro de 1959.

Conferência de Janeiro de 1960

Os 13 (3) delegados da Alemanha, Dinamarca, Estados Unidos, França, Grã-Bretanha, Holanda, Suiça reuniram-se em Paris de 11 a 16 de Janeiro de 1960. Antes desta reunião, em Paris, PETER NAUR tinha proposto um novo relatório provisório, levando em conta o relatório preliminar e as recomendações apresentadas nas reuniões precedentes. A conferência de Paris adoptou esta nova forma como base do seu relatório final e procedeu ao exame de cada um dos parágrafos do relatório. O presente relatório exprime a união das ideias do comité e a intersecção dos seus acordos.

Conferência de Abril de 1963, editada por M. WOODGER.

Nos dias 2 e 3 de Abril de 1963, em Roma (Itália), devido às facilidades concedidas pelo **Centro Internacional de Cálculo**, reuniram-se alguns dos autores do ALGOL 60. Estiveram presentes as pessoas seguintes:

Autores	*Peritos*
F. L. BAUER	M. PAUL
J. GREEN	R. FRANCIOTTI
C. KATZ	P. Z. INGERMAN
R. KONGON (representando J. W. BACKUS)	
P. NAUR	
K. SAMELSON	G. SEEGMULLER
J. H. WEGSTEIN	R. E. UTMAN
A. v. WIJNGAARDEN	
M. WOODGER	P. LANDIN

Observadores

W. L. v. d. POEL
(CHAIRMAN, IFIP TC 2.1,
Grupo de Trabalho ALGOL)

O objectivo da reunião era o de corrijir os erros detectados, eliminar as ambiguidades aparentes e clarificar o relatório ALGOL 60.

No decorrer desta reunião não foram consideradas extensões da linguagem. Foram utilizados como guia diversos projectos de correcções e clarificações que tinham sido transmitidos pelas partes interessadas em resposta ao questionário do Boletim ALGOL n.º 14.

Este relatório constitui um suplemento ao relatório ALGOL 60 e deveria resolver certo número de dificuldades que nele se encontram.

Nem todas as questões levantadas relativas ao relatório de base puderam ser resolvidas. Em vez de correr o risco de concluir apressadamente sobre certos pontos delicados, podendo fazer surgir novas ambiguidades, o comité decidiu rever apenas os pontos que considerava poder formular de maneira clara e não ambígua por unamimidade dos seus membros. As questões relativas aos domínios seguintes foram reservadas para exame ulterior pelo Grupo de Trabalho 2.1 da IFIP, na experança de que os trabalhos em curso sobre as linguagens de programação avançadas conduzirão a uma melhor solução:

1. Efeitos laterais das funções.
2. Conceito de chamada por nome.
3. *Own*: estático ou dinâmico.
4. Instrução PARA: estática ou dinâmica.
5. Conflitos entre especificação e declaração.

Os autores do relatório ALGOL 60 presentes à Conferência de Roma, tendo constatado a formação pela IFIP de um Grupo de Trabalho sobre o ALGOL, aceitaram que toda a responsabilidade colectiva que poderiam ter sobre o desenvolvimento, a especificação e o melhoramento da linguagem ALGOL deveria ser transferida para aquele Grupo.

Este relatório foi revisto por «IFIP. TC 2. Linguagens de Programação» em Outubro de 1962 e foi aprovado pelo **Conselho da International Federation for Information Processing**.

Como no relatório preliminar ALGOL, na linguagem distinguem-se três níveis diferentes, a saber: a *linguagem de referência*, a *linguagem de publicação* e diferentes *representações máquina*.

Linguagem de Referência

1. É a linguagem sobre a qual o comité trabalha.
2. É a linguagem de definição.
3. As suas características são determinadas pela comodidade da compreensão mútua e não pelos limites dos calculadores nem pelas notações do código ou da matemática.
4. É a referência de base e o guia para os construtores de compiladores.
5. É o guia para todas as representações máquina.
6. É o guia para a transcrição em não importa que representação máquina da linguagem da publicação.
7. As principais publicações da própria linguagem ALGOL utilizarão o nível de referência.

Linguagem de Publicação

1. A linguagem de publicação apresenta-se como variantes da linguagem de referência de acordo com o hábito de impressão e a escrita matemática (por exemplo, os índices, os expoentes, os espaços, as letras gregas).
2. É utilizada para a expressão e a comunicação dos processos de cálculo.
3. Os caracteres utilizados podem diferir de país para país, mas deve assegurar-se uma correspondência biunívoca com o nível de referência.

Representações máquina

1. Cada uma destas representações é uma imagem da linguagem de referência, imposta pelo número limitado do equipamento de entrada e de saída.
2. Cada uma utiliza o conjunto de caracteres particulares a um calculador e é a linguagem aceite pelo compilador feito para este calculador.
3. Cada uma deve ser acompanhada de um conjunto especial de regras para a transcrição a partir do nível de publicação ou do nível de referência.

No que respeita a transcrição do nível de referência para uma linguagem conveniente para a publicação, recomendam-se entre outras as regras seguintes:

Linguagem de referência	Linguagem de Publicação
Parentesis de índice [ ]	Escrita habitual dos índices
Elevação à potência ↑	Escrita habitual dos expoentes
Parentesis ⟨ ⟩	Qualquer forma de parêntesis, chaves
Potência de base dez$_{10}$	Escrita habitual dos factores (potência de 10).

---

(1) Priliminary Report. International Algebraic Language. *Comm. Assoc. Comp. Mach* 1, N.° 12 (1958), 8.

(2) Report on the Algorithmic Language ALGOL by the ACM Committee on Programming Languages and the GAMM Committee on Programming, editado por A. J. Perliss e K. Samelson, *Numerische Mathematik*, Bd. 1. S 41-60 (1959).

(3) William Turanski do grupo americano morreu de um acidente de viação ao dirigir-se para a Conferência de Janeiro de 1060.

MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAME DE FREQUÊNCIA E FINAIS

MATEMÁTICAS GERAIS

F. C. P. — Matemáticas Gerais — (Lic. em Matemáticas e Físico-Químicas) — Exame Final — Julho de 1963.

5588 — I. Seja $a \in R$ e seja $R \xrightarrow{f_a} R$, $f_a(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - a$.

1) Note $g(a)$ o número de raízes distintas de f_a; represente gràficamente a função $a \in R \to g(a) \in R$. Justifique.

2) Utilize conjuntamente o método das cordas e o método das tangentes a fim de calcular os três primeiros termos do desenvolvimento decimal da única raiz de f_1.

5589 — II. Seja $R \xrightarrow{f} R$, $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{2} + \sqrt{7+(2-x)^2}$.

1) $f(R)$ é minorado e $f(R) = [\inf f(R), \to[$. Justifique.

2) Determine os números $x \in R$ tais que $f(x) = \inf f(R)$. Justifique.

5590 — III. Seja $R_0^+ \xrightarrow{f} R$ nas condições seguintes: é duas vezes contìnuamente derivável;

$$Df(R_0^+) \subset R_0^+; \quad D^2 f(R_0^+) \subset R^+.$$

Mostre que: $f(R_0^+)$ não é majorado;

$$\{x \in R_0^+ \mid Df(x) = 0\}$$

é $\{0\}$ ou $\emptyset$.

5591 — IV. Seja $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ um referencial ortonormado.

1) Coordenadas dos vértices dos quadrados do plano que passa pelos pontos $A = (1,0,0)$, $B = (0,1,0)$ e $C = (0,0,1)$ e têm A e B como vértices não opostos.

2) Equações cartesianas da cónica que passa pelos pontos:

$$\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right); \left(-\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right); \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right); \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right); \left(\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right).$$

Nota — Comece por representar a cónica no referencial $(O; \vec{I}, \vec{J})$ com $\vec{I} = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ e $\vec{J} = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

F. C. P. — Matemáticas Gerais — (Lic. em Matemáticas e Físico-Químicas — Exame Final — Outubro de 1963.

5592 — I. Considere as sucessões reais seguintes: $(a_n)_{n \in N}$ com $a_n = \log n$; $(b_n)_{n \in N}$ com $b_n = tg\,\frac{1}{n}$.

1) Conclua, através da definição, a regularidade ou a não-regularidade da sucessão $(a_n)_{n \in N}$.

2) Conclua a existência de números reais a e b tais que, para qualquer $n \in N$, é $\frac{a}{n} - \frac{b}{n^2} \leqslant b_n \leqslant \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2}$.

5593 — II. Considere as funções seguintes:

$$[0,2] \xrightarrow{f} R, \ f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{se } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ x^2 + x & \text{se } 1 < x \leqslant 2 \end{cases};$$

$$[1, \to[\xrightarrow{g} R, \ g(x) = \frac{e^{1/x} - 1}{1/x}.$$

1) Mostre que f é derivável no ponto 1 (utilizando, nas considerações que fizer, apenas definições) e aproveite a função f a fim de *verificar* alguns dos teoremas que conheça e a ela sejam aplicáveis.

2) Determine o contradomínio de g. Justifique.

5594 — III. Seja $A = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 10 & -3 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{2,2}(R)$; determine as matrizes $B \in \mathfrak{M}_{2,2}(R)$ inversíveis tais que $B A B^{-1}$ seja diagonal. Justifique.

5595 — IV. Seja $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k})$ um referencial ortonormado.

1) Considere as rectas $r\begin{cases} x+2y+2z=0 \\ 2x-6y-\ \ z=1 \end{cases}$ e $s\begin{cases} 3x+y-3z=1 \\ x-\ \ z=2 \end{cases}$; determine equações cartesianas duma recta t nas condições seguintes: o ângulo de r e t é $\pi/2$; o ângulo de s e t é $\pi/4$; t é coplana com r e com s. Quantas rectas existem nas condições referidas?

2) Considere os pontos $A=(1,2,2)$ e $B=(11,-2,10)$; determine equações paramétricas das bissectrizes dos ângulos das rectas OA e OB.

Enunciados dos N.os 5588 a 5595
de Aníbal Coimbra Aires de Matos

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 1.ª Cadeira — 1.º exame de frequência (1.ª Chamada) — 7-3-964.

I

5596 — 1) Seja S uma relação reflexiva e transitiva definida num conjunto A. Mostre que a relação $(a\,S\,b \wedge b\,S\,a)$ é uma relação T entre a e b que é uma equivalência.

2) No conjunto R dos números reais define-se uma operação, simbolizada por $*$, do seguinte modo: $a*b=a+b-(a\cdot b)$.

O conjunto R fica munido de uma estrutura de grupo? Porquê?

3) Sendo $w_1=\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\,\mathrm{sen}\,\dfrac{2\pi}{3}$, prove que $(x+y\,w_1+z\,w_1^2)\,(x+y\,w_1^2+z\,w_1)=x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy$.

R: 1) $aTa=aSa\wedge aSa=aSa$ *e, como* S *é reflexiva, o mesmo acontece a* T; $aTb=aSb\wedge bSa=bSa\wedge aSb=bTa$ *e portanto* T *é simétrica; quanto à transitividade, note-se que* $aTb\wedge bTc=(aSb\wedge bSa)\wedge(bSc\wedge cSb)=(aSb\wedge bSc)\wedge(cSb\wedge bSa)=aSc\wedge cSa=aTc$.

2) G. 1. $a,b\in R\Longrightarrow a*b\in R$.

G. 2. $a*(b*c)=a+(b*c)-a\cdot(b*c)=a+b+c-bc-a(b+c-bc)=a+b+c-bc-ab-ac+abc$.

$(a*b)*c=(a*b)+c-(a*b)c=a+b-ab+c-(a+b-ab)c=a+b+c-bc-ab-ac+abc$ *e portanto a operação é associativa:* $a*(b*c)=(a*b)*c$.

G. 3. *A equação* $a*e=a$ *tem a solução* $e=0$ *e portanto existe elemento neutro.*

G. 4. *A equação* $a*a'=e$, *ou* $a*a'=0$, *tem a solução* $a'=\dfrac{a}{a-1}$ $(a\neq1)$; *o elemento* 1 *não tem inverso.*

Como há um elemento que não tem inverso, basta isso para afirmar que o conjunto R *não fica munido de uma estrutura de grupo com a operação* $*$.

3) *Notando que* $w_1^3=1$ *e* $1+w_1+w_1^2=0$, *vem* $(x+y\,w_1+z\,w_1^2)\,(x+y\,w_1^2+z\,w_1)=x^2+xy\,w_1^2+xz\,w_1+xy\,w_1+y^2w_1^3+yz\,w_1^2+xz\,w_1^2+yz\,w_1^4+z^2w_1^3=x^2+y^2+z^2+xy\,(w_1^2+w_1)+xz\,(w_1+w_1^2)+yz\,(w_1^2+w_1^4)=x^2+y^2+z^2-xy-xz+yz\,w_1^2(1+w_1^2)=x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz$.

II

5597 — 1) Defina sublimite de uma sucessão e prove que todo o ponto de acumulação do conjunto (u_n) é sublimite de u_n.

Mostre que a sucessão

$$v_n(x)=(-1)^n\left[\frac{n}{n+1}+(-1)^{n-1}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right]$$

é divergente qualquer que seja o número real x. Indique $\overline{\lim}\,v_n(x)$ e $\underline{\lim}\,v_n(x)$.

2) Sendo $\Sigma\,a_n$ uma série de termos positivos convergente e $\Sigma\,u_n$ uma série de termos quaisquer, prove que $\Sigma\,u_n$ é absolutamente convergente quando $\lim\limits_{n=\infty}\dfrac{a_n}{|u_n|}=h\neq0,\infty$.

Estude a natureza da série $\Sigma\,\dfrac{1}{n}\log\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$.

R: 1) $\lim\limits_{n=\infty}v_{2n-1}(x)=-(1+e^x)$ $\lim\limits_{n=\infty}v_{2n}(x)=1-e^x$.

A sucessão $v_n(x)$ *é divergente qualquer que seja o número real* x *pois é sempre* $-(1+e^x)\neq1-e^x$.

$\overline{lim}\,u_n(x)=1-e^x$ *e* $\underline{lim}\,u_n(x)=-(1+e^x)$.

2) *Como* $log\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=\eta\,\dfrac{1}{n}$ $(\lim\limits_{n=\infty}\eta=1)$, *a série dada pode escrever-se na forma* $\Sigma\,\eta\,\dfrac{1}{n^2}$ *que tem a mesma natureza de* $\Sigma\,\dfrac{1}{n^2}$ *(convergente).*

III

5598 — 1) Defina extremos absolutos de uma função num certo conjunto e mostre que, para função contínua num intervalo fechado, a sua existência é certa.

Considere $f(x)=x$ no intervalo $]1,3[$ e diga como deve definir $f(1)$ e $f(3)$ para que a função seja desprovida de extremos absolutos em $[1,3]$.

2) Mostre que $g(x)=\sqrt{x^2+x^3}$ não tem derivada em $x=0$. Este ponto é um extremante para a função? Porquê?

3) Calcule $P\,x\sqrt[3]{1+x}$.

R: 1) $1<f(1)<3$ *e* $1<f(3)<3$.

2) $\dfrac{g(x)-g(0)}{x}=\dfrac{\sqrt{x^2+x^3}}{x}=\dfrac{|x|}{x}\sqrt{1+x}$ *e portanto* $g'_d(0)=1$ *e* $g'_e(0)=-1$. *O ponto* $x=0$ *é um minimizante porque* $g'_e(0)<0$ *e* $g'_d(0)>0$.

3) $P\,x\sqrt[3]{1+x}=P\,x(1+x)^{\frac{1}{3}}=\dfrac{(1+x)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}x-$

$-\dfrac{3}{4}P(1+x)^{\frac{4}{3}}=\dfrac{3}{4}x\sqrt[3]{(1+x)^4}-$

$-\dfrac{3}{4}\dfrac{(1+x)^{\frac{7}{3}}}{\frac{7}{3}}=\dfrac{3}{4}x\sqrt[3]{(1+x)^4}-\dfrac{9}{28}\sqrt[3]{(1+x)^7}.$

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 1.ª cadeira — 1.º exame de frequência (2.ª chamada) — 14-3-964.

5599 — 1) Sendo A e B subconjuntos de um conjunto fundamental U, prove que

$$A\subseteq B \Longleftrightarrow A\cup(B-A)=B.$$

2) Parta da desigualdade $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n<e$ para deduzir a relação $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}>\log(n+1)$.

Aproveite o resultado para mostrar que a série harmónica é divergente.

3) Ache os números complexos de módulo 3 cujas imagens estão sobre a parábola $y=x^2-7$.

R: 1) *A proposição sobre conjuntos é equivalente à seguinte proposição:*

$(x\in A\Rightarrow x\in B)\Longleftrightarrow\{x\in A\vee[x\in B\wedge\sim(x\in A)]\Longleftrightarrow x\in B\}$.

Fazendo $p=x\in A$ *e* $q=x\in B$, *vem*

$$(p\Rightarrow q)\Longleftrightarrow\{[p\vee(q\wedge\sim p)]\Longleftrightarrow q\}$$

cuja veracidade se pode provar por meio de uma tabela de verdade:

p	q	(p ⇒ q)			⟺	{[p	∨(q∧∼p)]⟺q}			
0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0
0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1
1	0	1	0	0	1	1	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1

2) *De* $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n<e$ *vem* $n\log\left(1+\dfrac{1}{n}\right)<1$ *ou* $\log\left(\dfrac{n+1}{n}\right)<\dfrac{1}{n}$.

Fazendo $n=1,2,\cdots,n$, *vem*

$$\log\frac{2}{1}<1$$
$$\log\frac{3}{2}<\frac{1}{2}$$
$$\log\frac{4}{3}<\frac{1}{3}$$
$$\cdots\cdots$$
$$\log\left(\frac{n+1}{n}\right)<\frac{1}{n}$$

e, somando ordenadamente estas desigualdades, resulta imediatamente $\log(n+1)<1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}$.

Ora $\log(n+1)\to+\infty\Rightarrow 1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}\to+\infty$ *e assim a série* $\Sigma\dfrac{1}{n}$ *é divergente infinita.*

3) *Os números complexos* $x+iy$ *têm módulo* 3 *e, portanto,* $\sqrt{x^2+y^2}=3$ *ou* $x^2+y^2=9$. *Como as imagens estão sobre a parábola* $y=x^2-7$, *as componentes têm de satisfazer ao sistema de equações* $\begin{cases}x^2+y^2=9\\ y=x^2-7\end{cases}$ *que tem por soluções* $\begin{cases}x=2\sqrt{2}\\ y=1\end{cases}$ $\begin{cases}x=-2\sqrt{2}\\ y=1\end{cases}$ $\begin{cases}x=\sqrt{5}\\ y=-2\end{cases}$ $\begin{cases}x=-\sqrt{5}\\ y=-2\end{cases}$.

Os números complexos pedidos são $2\sqrt{2}+i$, $-2\sqrt{2}+i$, $\sqrt{5}-2i$ *e* $-\sqrt{5}-2i$.

II

5600 — 1) Se, a partir de uma certa ordem, é $a<u_n<b$ e se $u_n\to u$, demonstre que $a\leqslant u\leqslant b$. O que pode afirmar àcerca do sinal dos termos de uma sucessão cujo limite é positivo (negativo)? Porquê?

Calcule $\lim\limits_{n=\infty} \dfrac{(v_n/v)^v - 1}{1 - v_n/v}$, onde $\lim\limits_{n=\infty} v_n = v \neq 0$.

2) Enuncie o critério da razão e prove que a série Σa_n é convergente com $\overline{\rho} < 1$ e divergente com $\underline{\rho} > 1 \left(\rho_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$.

Mostre que a série $\Sigma \log\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) x^n$ é uniformemente convergente em qualquer intervalo $[-1, r]$ $(r < 1)$.

R: 1) *Como* $\dfrac{v_n}{v} = 1 + \dfrac{v_n - v}{v}$, *vem* $\left(1 + \dfrac{v_n - v}{v}\right)^v =$
$= 1 + v\,\zeta \dfrac{v_n - v}{v}$ $(\lim\limits_{n=\infty} \zeta = 1)$ *e portanto*

$$\lim_{n=\infty} \frac{(v_n/v)^v - 1}{1 - v_n/v} = \lim_{n=\infty} \frac{v\,\zeta \dfrac{v_n - v}{v}}{\dfrac{v - v_n}{v}} = -v.$$

2) *Como* $\lim\limits_{n=\infty} \dfrac{\log\left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right)|x|^{n+1}}{\log\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)|x|^n} = |x|$, *o intervalo de convergência da série* $\Sigma \log\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)x^n$ *é* $]-1, 1[$. *Notando que para* $x = 1$ *a série é divergente e que para* $x = -1$ *é convergente, pode garantir-se a convergência uniforme em qualquer intervalo* $[-1, r]$ *com* $r < 1$.

III

5601 — 1) Defina oscilação de uma função num ponto de acumulação do seu campo de existência. Prove que, sendo $f(x)$ contínua em $x = a$, a sua oscilação nesse ponto é nula.

Considere a função $g(x) = \begin{cases} x & (x < 1) \\ x^2 + 1 & (x \geq 1) \end{cases}$ e mostre que ela apresenta uma descontinuidade de primeira espécie em $x = 1$. Qual é o salto de $g(x)$ em $x = 1$?

Calcule $g'_d(1)$ e $g'_e(1)$.

2) Calcule $P \dfrac{1}{x^2(x^2 + x + 1)}$.

R: 1) $g(1+0) = \lim\limits_{x=1+0} g(x) = \lim\limits_{x=1+0} (x^2 + 1) = 2$

$g(1-0) = \lim\limits_{x=1-0} g(x) = \lim\limits_{x=1-0} x = 1$

e como $g(1-0) < g(1) = g(1+0)$ *vem* $\omega(1) = g(1+0) - g(1-0) = 1$ *e* $x = 1$ *é um ponto de descontinuidade de primeira espécie. O salto é* $s(1) = g(1+0) - g(1-0) = 1$.

$$g'_d(1) = \lim_{x=1+0} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \lim_{x=1+0} \frac{x^2 + 1 - 2}{x - 1} = \lim_{x=1+0} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x=1+0} (x + 1) = 2$$

$$g'_e(1) = \lim_{x=1-0} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \lim_{x=1-0} \frac{x - 2}{x - 1} = +\infty$$

2) $$\frac{1}{x^2(x^2 + x + 1)} = \frac{a_0 + a_1 x}{x^2} + \frac{S_0}{x^2 + x + 1}.$$

Cálculo de a_0 e a_1:

Considerando $R_0(x) = \dfrac{1}{1 + x + x^2}$ *e dividindo o numerador pelo denominador até o quociente atingir o grau* 1, *obtém-se* $a_0 = 1$ *e* $a_1 = -1$.

Cálculo de S_0:

Considerando $R_\Delta(x) = \dfrac{1}{x^2}$ *e ordenando o denominador segundo as potências crescentes de* $\Delta = x^2 + x + 1$, *vem* $R_\Delta(x) = \dfrac{1}{-(x+1) + \Delta}$. *Como* 1 *não é divisível por* $-(x+1)$, *faça-se* $[1 - \alpha_0(x^2 + x + 1)]_{-1} = 0$, *o que dá* $\alpha_0 = 1$. *O coeficiente corrigido será* $-x^2 - x$ *que, dividido por* $-(x+1)$, *dá* $S_0 = x$. *Então*

$$\frac{1}{x^2(x^2 + x + 1)} = \frac{1 - x}{x^2} + \frac{x}{x^2 + x + 1} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\,\frac{2x + 1 - 1}{x^2 + x + 1} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\,\frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{\dfrac{3}{4} + \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\,\frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} - \frac{1}{\sqrt{3}}\,\frac{2/\sqrt{3}}{1 + \left(\dfrac{2x + 1}{\sqrt{3}}\right)^2}$$

$$P \frac{1}{x^2(x^2 + x + 1)} = -\frac{1}{x} - \log|x| + \frac{1}{2}\log(x^2 + x + 1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{2x + 1}{\sqrt{3}}\right).$$

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 2.º Ponto de Informação (1.ª chamada) — 11-6-64.

I

5602 — 1) Prove que toda a série de derivadas é primitivável o termo em qualquer intervalo de convergência uniforme.

Ache o desenvolvimento em série de $\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$ segundo as potências de $1/x$ e indique os valores de x para os quais é válido.

2) Sabendo que as raízes da derivada de $f(x) = 18x^4 - 8x^3 - 9x^2 + 6x + 6$ são racionais, mostre que $f(x)$ não tem raízes reais. Qual é a natureza das raízes de $f(x)$? Porquê?

R: 1) *Utilizando a fórmula do binómio vem*

$$\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = \left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{1/2} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2} + \binom{\frac{1}{2}}{2}\frac{1}{x^4} + \cdots + \binom{\frac{1}{2}}{n}\frac{1}{x^{2n}} + \cdots$$

válido para $\left|\dfrac{1}{x}\right| < 1$ *ou* $|x| > 1$.

2) *Utilizando o método de* Newton, *calculam-se fàcilmente os limites excedente e deficiente das raízes de* $f(x)$: $L = 1$ e $l = -1$.

Pesquisando as raízes da derivada $f'(x) = 6(12x^3 - 4x^2 - 3x + 1)$, *obtém-se* $x_1' = -\frac{1}{2}, x_2' = \frac{1}{2}, x_3' = \frac{1}{3}$ *e construindo a sucessão de* Rolle *para* $f(x)$

	-1	$-1/2$	$1/2$	$1/3$	1
$f(x)$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$

conclui-se imediatamente que $f(x)$ *não tem zeros reais.*

As raízes de $f(x)$ *são complexas porque todo o polinómio de grau* n *tem exactamente* n *raízes. Como* $f(x)$ *é do quarto grau e é polinómio real, tem quatro raízes complexas da forma* $p \pm iq$, $r \pm is$.

II

5603 — 1) Dada a equação $f(x, y) = 0$ e sendo $f(a, b) = 0$, enuncie as condições de existência de uma função implícita $y = \varphi(x)$ na vizinhança de $x = a$.

Mostre que, sendo $f(x,y)$ diferenciável em $P(a,b)$ e $f_y'(a,b) \neq 0$, a função $y = \varphi(x)$ é diferenciável em $x = a$.

2) De uma certa função $g(x, y)$ conhece-se a seguinte tabela de valores:

$x \backslash y$	0	1
0	2	-1
1	3	5

Calcule $g(2,0)$, $g(2,1)$, $g(0,2)$, $g(1,2)$ e $g(2,2)$, utilizando a teoria da interpolação.

Sugestão: Considere uma das variáveis constante e interpole em relação à outra. Não é necessária a construção dos polinómios interpoladores

R: 2)

x	g(x, 0)	Δ g(x, 0)
0	2	1
1	3	
2		

$g(2, 0) = 1 + 3 = 4$

x	g(x, 1)	Δ g(x, 1)
0	−1	6
1	5	
2		

$g(2, 1) = 6 + 5 = 11$

y	g(0, y)	Δ g(0, y)
0	2	−3
1	−1	
2		

$g(0, 2) = -3 - 1 = -4$

y	g(1, y)	Δ g(1, y)
0	3	2
1	5	
2		

$g(1, 2) = 2 + 5 = 7$

y	g(2, y)	Δ g(2, y)
0	4	7
1	11	
2		

$g(2, 2) = 7 + 11 = 18$

III

5604 — 1) Prove que a transposta do produto de duas matrizes é o produto por ordem inversa das transpostas dos factores.

Supondo que $A = |a_i^j|$, de ordem n, é singular, mostre que existe sempre uma matriz $B = |b_i^j| \neq 0$ de ordem n, tal que $AB = 0$.

2) Estude o sistema de equações lineares

$$\begin{aligned} x + y + 2z + t &= 5 \\ 2x + 3y - z - 2t &= 2 \\ 4x + 5y + 3z &= k \end{aligned}$$

por meio da teoria dos determinantes.

R: 1) *Sendo* $|A| = 0$, *o problema da existência de uma matriz* $B \neq 0$ *tal que* $a_i^{\alpha} b_{\alpha}^{k} = 0$ *esclarece-se considerando o sistema homogéneo* $a_i^{\alpha} x_{\alpha} = 0$. *Neste caso o sistema é indeterminado e portanto tem soluções não nulas.*

2) *A matriz do sistema é* $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & -2 \\ 4 & 5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ *cuja característica é* 2. *Tomando para determinante principal* $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$, *o único determinante característico* $\Delta'_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & k \end{vmatrix} = k - 12$ *é diferente de zero quando* $k \neq 12$ *e igual a zero quando* $k = 12$. *Portanto, de acordo com o teorema de* Rouché, *o sistema é impossível com* $k \neq 12$ *e possível com* $k = 12$. *Neste segundo caso o sistema é indeterminado de grau 2 e a sua solução geral obtém-se do sistema principal*

$$\begin{cases} x + y + 2z + t = 5 \\ 2x + 3y - z - 2t = 2 \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} x + y = 5 - 2z - t \\ 2x + 3y = 2 + z + 2t \end{cases}$$

e, pela regra de Cramer, *vem*

$$x = \begin{vmatrix} 5-2z-t & 1 \\ 2+z+2t & 3 \end{vmatrix} = 13 - 7z - 5t$$

$$y = \begin{vmatrix} 1 & 5-2z-t \\ 2 & 2-z+2t \end{vmatrix} = -8 + 5z + 4t.$$

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 2.º Ponto de Informação (2.ª Chamada) — 18-6-64.

I

5605 — 1) Deduza a fórmula do binómio, que permite obter o desenvolvimento em série de Mac Laurin de $(1+x)^{\alpha}$.

Recorra aos desenvolvimentos em série para calcular

$$\lim_{x=0} \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{arctg} x}{x^2 \log(1+x)}.$$

2) Mostre que a condição necessária e suficiente para que $Y = mX + p$ seja assíntota da imagem de $f(x)$ é que $f(x) = mx + p + \varphi(x)$ com $\lim_{x=\infty} \varphi(x) = 0$.

Determine a e b por forma que $Y = 2X - 3$ seja assíntota da imagem de $y = \dfrac{ax^2+1}{bx+2}$.

R:

1) $$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} - \cdots$$

desenvolvimentos todos válidos para $|x| < 1$.

$$\lim_{x=0} \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{arctg} x}{x^2 \log(1+x)} =$$

$$= \lim_{x=0} \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots - \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots\right)}{x^2\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots\right)} =$$

$$= \lim_{x=0} \frac{\frac{x^3}{6} + \frac{5}{24}x^5 + \cdots}{x^3 - \frac{x^4}{2} + \cdots} = \frac{1}{6}.$$

2) $$\frac{ax^2+1}{bx+2} = \frac{a}{b}x - \frac{2a}{b^2} + \frac{1 + \frac{2a}{b^2}}{bx+2}, \text{ com}$$

$$\lim_{x=\infty} \frac{1 + \frac{2a}{b^2}}{bx+2} = 0.$$

Então

$$\begin{cases} \dfrac{a}{b} = 2 \\ -\dfrac{2a}{b^2} = -3 \end{cases} \quad \text{donde} \quad \begin{cases} a = 8/3 \\ b = \dfrac{4}{3} \end{cases}.$$

II

5606 — 1) Sendo $x = g(t)$ e $y = h(t)$ diferenciáveis no ponto $t = t_0$ e $f(x, y)$ diferenciável no ponto correspondente $g(t_0) = a$, $h(t_0) = b$, mostre que a função $F(t) = f[g(t), h(t)]$ é diferenciável para $t = t_0$.

2) Relacione as diferenças divididas com as diferenças ordinárias e deduza a fórmula interpoladora de Gregory-Newton a partir da de Newton.

III

5607 — 1) Deduza das relações de Laplace que toda a matriz regular tem inversa, determinando ao mesmo tempo asua composição. Matriz singular tem inversa? Porquê?

Sendo A^{-1} a matriz inversa de A, prove as seguintes propriedades:

$$a)\ (A^{-1})^{-1} = A$$

$$b)\ (A^{n})^{-1} = (A^{-1})^{n}.$$

2) Considere o sistema homogéneo $AX = 0$ simplesmente indeterminado. Sendo X_0 uma solução não nula, prove que toda a solução X se pode escrever na forma $X = \beta X_0$ (β constante arbitrária).

Aproveite o resultado para mostrar que, em matriz quadrada singular, filas paralelas tem complementos proporcionais.

R: 1) a) *Da própria definição da matriz* A^{-1} *se conclui imediatamente que* A *é a inversa de* A^{-1}.

b) $$(A^n)^{-1} = (A \cdot A \cdots A)^{-1} = $$
$$= A^{-1} \cdot A^{-1} \cdots A^{-1} = (A^{-1})^n.$$

2) *Sendo* A *matriz singular de ordem* n, *se a característica de* A *for inferior a* $n-1$ *então os complementos são todos nulos e portanto filas têm complementos proporcionais. Se a característica de* A *for* $n-1$ *então há pelo menos um complemento significativo e o sistema homogéneo* $a_i^\alpha x_\alpha = 0$ *é simplesmente indeterminado. Como* $a_i^\alpha A_k^\alpha = 0$ (*teorema de* LAPLACE) *designando por* $A_j^1, \cdots A_j^n$) *a solução não nula, vem*

$$\frac{A_k^1}{A_j^1} = \frac{A_k^2}{A_j^2} = \cdots = \frac{A_k^n}{A_j^n}$$

pois todas as soluções do sistema são proporcionais.

Enunciados e soluções dos N.os 5596 a 5607 de Fernando de Jesus

CÁLCULO INFINITÉSIMAL

Academia Militar — Cálculo Infinitésimal — Exame final da 6.ª cadeira — Época de Setembro — 1962-1963.

Responda apenas a quatro questões.

I

5608 — Considere o campo vectorial definido pelo vector genérico $\mathbf{v} = (y+z)\,\mathbf{i} + (z+x)\,\mathbf{j} + (x+y)\,\mathbf{k}$.

a) Mostre que o campo é conservativo e determine uma sua função potencial.

b) Calcule a circulação do vector $\mathbf{v}$ ao longo dum arco de circunferência partindo do ponto $A = (1,1,1)$ e terminando no ponto $B = (2,2,2)$.

II

5609 — *a*) Represente por uma série trigonométrica de FOURIER *de senos* a função

$$f(x) = x + 1$$

no intervalo $]0, \pi[$.

b) Represente gràficamente no intervalo $[-2\pi, 2\pi]$ a função definida pela série a que se refere a alínea anterior.

III

5610 — *a*) Fórmula de RIEMANN.

b) Use a fórmula anterior para estabelecer que a área dum domínio simplesmente conexo limitado por uma linha fechada simples regular por secções é dada por

$$\text{área} = 1/2 \int_{L^+} x\,dy - y\,dx.$$

IV

5611 — Considere o integral

$$\iiint_D (xy)^2\,dv$$

sendo D o domínio limitado pelo elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

a) Efectue no integral dado a mudança de variáveis definida por

$$x = a\xi,\ y = b\eta,\ z = c\zeta.$$

b) Calcule o valor do integral.

V

5612 — Determine as soluções particulares $\varphi(x)$ da equação diferencial

$$3y''' - 5y'' + 2y' = x$$

para as quais se tenha $\varphi(0) = \varphi'(0) = \varphi''(0)$.

Enunciados dos N.os 5608 a 5612 de A. César de Freitas

F. C. L. — CÁLCULO INFINITESIMAL — **Exame final** — **11-6-64.**

5613 — 1. *a*) Indique as propriedades mais importantes das equações diferenciais lineares de ordem n.

b) Se a equação tem os coeficientes constantes, como obter a expressão geral das soluções? A que condição devem obedecer as raízes da equação característica para que qualquer solução da equação homogénea se mantenha limitada quando a variável independente tende para $+\infty$?

c) Resolva o problema de valores iniciais $\begin{cases} y''' - y' = 2\cos x \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0 . \end{cases}$

2. Seja $\{e_1, e_2, e_3\}$ uma base o. n. fixa de R^3, $t(s)$, $n(s)$, $b(s)$ o triedro de SERRET de uma curva do espaço.

a) Escreva as fórmulas de FRENET-SERRET.

b) Pondo $\begin{bmatrix} t \\ n \\ b \end{bmatrix} = A(s) \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}$, mostre que

$$\frac{d}{ds}\begin{bmatrix} t \\ n \\ b \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} t \\ n \\ b \end{bmatrix} \quad \text{com } C = \frac{dA}{ds} \cdot A^{-1},$$ e dê a expressão da matriz C em função da curvatura e da torção da curva dada.

c) Determine, em particular, as matrizes A e C para a linha $r = a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\, e_1 + a \operatorname{sen}\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\, e_2 + b\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\, e_3$ (a e b constantes). Quais as equações intrínsecas desta linha?

3. Considerando a linha Γ do plano XOZ definida por $\begin{cases} x = \varphi(z) \\ y = 0 \end{cases}$ $(z_0 \leqslant z \leqslant z_1)$.

a) Verifique que a equação da superfície de revolução $\mathcal{S}$ gerada por Γ quando executa uma rotação de 360° em torno de OZ se pode escrever na forma $x^2 + y^2 = [\varphi(z)]^2$.

b) Designando por $\mathcal{D}$ o domínio do plano XOZ definido por $\{(x, z) : z_0 \leqslant z \leqslant z_1 \wedge 0 \leqslant x \leqslant \varphi(z)\}$, mostre que a definição dada para área de uma superfície permite concluir que a área de $\mathcal{S}$ é dada por

$$A = 4\iint_{\mathcal{D}} \sqrt{\frac{[\varphi(z)]^2 \{1 + [\varphi'(z)]^2\}}{[\varphi(z)]^2 - x^2}}\, dx\, dz .$$

c) Mostre que a expressão anterior conduz a $A = \int_{z_0}^{z_1} 2\pi\varphi(z)\, ds$, designando por s o comprimento de arco referente a Γ.

d) Atendendo a que o centro de gravidade da linha Γ (suposta homogénea e de comprimento L) tem uma abcissa (no plano XOZ) dada por $\xi = \left(\int_\Gamma x\, ds\right)/L$, estabeleça o seguinte teorema:

A área gerada por uma linha plana homogénea quando executa uma rotação em torno de um eixo do seu plano, que a não corte, é igual ao produto do comprimento da linha pelo perímetro da circunferência descrita pelo seu centro de gravidade.

Enunciado N.° 5613 de F. R. Dias Agudo

ERRATA

«Gazeta de Matemática» n.° 88-89 — *O enunciado correcto do problema 5549 — 5), pág. 38, é o seguinte:*

«Sejam f e g funções reais definidas em R, contínuas e cujas restrições a Q são iguais: $f_{|Q} = g_{|Q}$. Mostre que $f = g$».

BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de Matemática de que os Autores ou Editores enviarem dois exemplares à Redacção

156 — A. TORTRAT — **Calcul des Probabilités**, Masson & Cie., (1963) Paris, VIII + 168 pp.
Preço: NF 27,45.

O livro aqui em crítica foi publicado em princípios do ano passado, precisamente numa colecção de monografias de Matemática, onde já anteriormente aparecera um livro sobre o mesmo assunto (J. BASS (1962), *Éléments du Calcul des Probabilités*), e onde também recentemente foi publicada uma obra notável sobre a moderna teoria das Probabilidades (J. NEVEAU (1964), *Bases Mathématiques du Calcul des Probabilités*). Se o livro de BASS é uma obra de carácter «clássico» (no domínio das Probabilidades), e o de NEVEAU é de bases nìtidamente modernas, na nossa opinião, este trabalho de TORTRAT pretende reunir ao mesmo tempo os dois aspectos da disciplina.

O A., professor da especialidade na Faculdade de Ciências de Paris, começa por afirmar no Intróito que «a matéria deste livro constitui um curso da licenciatura [em Ciências Matemáticas], de extenção reduzida, correspondente a uma cadeira semestral de opção, com um máximo de três horas semanais» ; e é dentro desta limitação que a matéria exposta no livro é apresentada, conduzindo o A. a uma tarefa delicada e ingrata, de selecção e de apresentação. Não sabemos quais os conhecimentos matemáticos de que dispõe o Leitor a que este livro se destina, mas não devemos andar longe, admitindo que são constituídos pelas matérias usualmente exigíveis ao aluno com um ou dois anos de iniciação nas Matemáticas Superiores.

O livro é quase todo ele de leitura muito fácil e acessível a todos os que tenham um treino básico anterior em Teoria da Medida. Embora este requisito não seja essencial, estamos em crer que as breves notas dispostas pelo livro, destinadas a suprir a possível falta de preparação do Leitor neste capítulo, não são suficientes para quem pela primeira vez contacte com estas matérias. Por outro lado, o programa que o livro pretende cobrir é excessivamonte extenso, de modo que alguns aspectos importantes foram simplesmente ignorados, a fim de manter o livro acessível e de tamanho reduzido. Outras vezes o A. socorre-se do sistema de enunciar resultados mais complexos, sem os derivar ou justificar. Assim sucede entre outros com os teoremas (importantìssimos na Teoria das Probabilidades) de FUBINI, EGOROFF, BEPPO-LEVI, LEBESGUE (teor. da conv. majorada), BOREL-CANTELLI, RADON-NIKODYM e FISCHER-RIESZ. Para este último, e. g. o A. esboça uma demonstração que deixa ao cuidado do Leitor, mas duvidamos que o principiante nestes assuntos possa deduzir a demonstração (rigorosa) pelos seus próprios meios. O mesmo sucede, aliás, para o teor. LYAPUNOFF da convergência majorada. O teor. de LYAPUNOFF é apresentado ao Leitor como exercício, aqui sem quaisquer outras indicações para a demonstração. Mesmo assim, é pena que o mesmo critério não tenha sido seguido relativamente a outros resultados que bem caberiam dentro do âmbito desta Introdução. Assim, os teoremas de LEBESGUE e de KOLMOGOROFF, os espaços L_p, as derivadas à RADON-NIKODYM, etc., são completamente ignorados, se bem que estreitamente ligados com a matéria exposta. Também as aplicações da teoria são muitas vezes difíceis de descortinar, e só muito esporàdicamente se indicam algumas aplicações no domínio da Estatística. Aqui e além surgem exercícios, a maior parte das vezes com o carácter de complementos à matéria desenvolvida. Este método de simplificar as coisas parece-nos bastante honesto, preferível mesmo ao de expôr as questões de maneira menos rigorosa do ponto de vista matemático (caso infelizmente bastante em voga entre alguns cultores da Teoria das Probabilidades e da Estatística Matemática).

O livro tem 51 parágrafos, que se agrupam em 11 capítulos, dos quais vamos, numa breve resenha, enunciar os títulos, o que por si só nos dá uma ideia dos assuntos tratados: Introdução e Axiomas Fundamentais; Espaços Mensuráveis e Variáveis Aleatórias; Funções de Distribuição; Distribuições Discretas; Integrais à Stieltjes e Esperanças Matemáticas; Função de Distribuição e Função Característica; Composição de duas Funções de Distribuição; Probabilidades Condicionais; Regressão e Correlação; Leis Normais; Aproximação de Leis Binomiais por Leis Normais e Leis de POISSON; Convergência para uma Lei duma Sucessão de Variáveis Aleatórias; Convergência em Probabilidade, Quase Certa e em Média Quadrática. Segue-se uma pequena bibliografia das obras clássicas da especialidade e cujo conhecimento se deve esperar de todos os que pretendem estudar honestamente o Cálculo das Probabilidades.

Na elaboração deste livro o A. teve grandes preocupações pedagógicas; infelizmente, porém, nem sempre usa o rigor matemático (e probabilístico) que seria de esperar, especialmente nos primeiros capítulos. Assim, e. g. logo nas duas primeiras linhas do texto, a definição de experiência aleatória é muito imprecisa, e depois na página seguinte o A. confunde acontecimento (resultado de uma experiência aleatória) com acontecimento elementar. Definições vagas aparecem depois para f. mensurável, variável aleatória, f. truncada, e outras.

O livro tem uma apresentação cuidada, mas é muito pobre do ponto de vista gráfico. Além de numerosas «gralhas» tipográficas, que vão desde erros sem importância à falta de sinais de integral (e. g. na fórmula do teor. de BEPPO-LEVI), e outros, o A. emprega notações que nem sempre são as mais cómodas e usuais e que podem originar confusão frequente ao Leitor desprevenido. Assim, por toda a parte é usado o $'$ para indicar o complementar (de conjunto ou acontecimento); mas mais do que uma vez surge A' para indicar um elemento distinto do complementar de A: $A'_n = A_n - A_{n-1}$ (p. 20), ou até mesmo $A' \subset A$ (p. 26). O (*) para as notas no fim da página leva também a erros nos parágrafos dedicados às medidas exterior e interior. Na p. 27 aparece (1) no corpo do texto e (*) no rodapé! A esperança matemática da v. a. X é quase sempre representada por $\overline{X}$ e só excepcionalmente por $\mathfrak{M}(X)$; esta notação origina alguns erros no capítulo sobre a regressão e a correlação, aí se encontrando também (X, Y) para designar não uma v. a. bidimensional, mas a covariância entre X e Y, em vez de cov (X, Y), às vezes usada, ou outra parecida. Nenhum dos símbolos utilizados para designar v. a. gausseana, f. d. normal ou função de densidade normal é usual nem mesmo se encontra nos tratados indicados na bibliografia. Num dos exercícios é evidente a falta de distinção entre a σ — álgebra de Borel de um produto cartesiano de classes de conjuntos e o produto cartesiano das σ — álgebras de Borel das mesmas classes. No enunciado do teor. de Radon-Nikodym (no livro aparece sempre Nicodym), o conjunto sobre o qual se efectua a integração é mensurável relativamente a μ, mas pode não ser de medida ν finita. O teor. 2 do § 49 pode induzir em erro pela maneira como está formulado, uma vez que a conv. em prob. não implica a conv. quase certa, como se pode mostrar com o contra-exemplo da sucessão de Fréchet, a que o A., aliás, não faz a mínima referência. A propósito, a numeração dos parágrafos ao alto das páginas, a partir da p. 150 está trocada. O A. deriva repetidas vezes sob o sinal de integral, sem nunca justificar se tal procedimento é válido.

Apesar de todas estas pequenas falhas, difíceis ou mesmo impossíveis de evitar num livro deste tipo, destinado a abraçar uma área tão vasta da Teoria das Probabilidades, trata-se de uma obra de real valor, que poderá com proveito ser lida por todos os aprendizes de Estatística das nossas Faculdades de Ciências ou mesmo da Universidade Técnica, desde que, como dissemos no início, estejam de posse do instrumental básico da Teoria da Medida. E até mesmo o especialista, talvez encontre algo de novo nos últimos capítulos do livro, ou uma exposição diferente de outros resultados já conhecidos.

J. Marques Henriques

157 — Fréderic Riesz — Oeuvres Complètes — Académie des Sciences de Hongrie — Budapest — 1960.

Fréderic Riesz não é apenas um dos matemáticos húngaros mais eminentes; é, com efeito, à escala mundial um dos que maior influência exerceram sobre os fundamentos e o desenvolvimento dos ramos modernos da análise matemática. As noções por ele introduzidas, os métodos elaborados e os resultados que lhe são devidos, os processos de demonstração por ele criados pertencem ao domínio clássico das funções de variável real, da análise funcional e da Topologia geral. O rápido desenvolvimento da análise funcional observado nestas últimas dezenas de anos deve-se precisamente ao impulso dado pelas descobertas de Riesz, estabelecidas há meio século, relativas à teoria dos espaços funcionais e às operações lineares que nela são definidas.

A Academia das Ciências da Hungria empreende uma missão cultural publicando as obras completas de Frederico Riesz: os trabalhos dispersos em numerosas revistas tornam-se assim muito mais acessíveis.

Em seguida à enumeração cronológica das obras de Riesz, as Obras Completas publicam por reprodução fotográfica as mesmas obras agrupadas pelos assuntos seguintes:

A. Topologia — 10 trabalhos
B. Teoria das funções reais — 18 trabalhos
C. Espaços funcionais — 18 trabalhos
D. Funções analíticas — 8 trabalhos
E. Funções harmónicas e sub-harmónicas — 6 trabalhos
F. Análise funcional — 16 trabalhos
G. Teoria ergódica — 8 trabalhos
H. Geometria — 2 trabalhos
I. Questões diversas — 18 trabalhos

e terminam por dois Apêndices de 13 e 90 páginas, respectivamente, que contêm as traduções em língua francesa dos trabalhos publicados originàriamente em húngaro.

Entre os trabalhos encontra-se o livro publicado por Riesz em 1913 e editado por Gauthier-Villars: *Os sistemas de equações lineares a uma infinidade de incógnitas*; em contrapartida os Editores excluíram as célebres «Lições de Análise Funcional» publicados em 1952 em colaboração com Bela Szokefalvi-Nagy alegando ter Riesz colaborado apenas em parte da redacção.

Riesz nasceu em 1880 em Györ, frequentou a Escola Politécnica de Zürich e continuou os seus estudos em Budapest e Göttingen.

As Obras Completas de Riesz tornam-se assim de uma grande acessibilidade a quem não domina a língua materna do eminente matemático.

GAZETA DE MATEMÁTICA

Número avulso: 17 escudos e 50 centavos
Assinatura relativa a 1965 (4 números) 50 escudos
Assinatura para o estrangeiro, 80 escudos

PONTOS DE EXAME

Uma das secções permanentes da *Gazeta de Matemática* é constituída pelos pontos de Matemática do exame do 3.º ciclo do ensino liceal e de exames de aptidão às Universidades e pontos de exames de frequência e finais das cadeiras de matemática das escolas superiores.

2.ª EDIÇÃO DO VOL. II (N.ºˢ 5 a 8)

Continua aberta a inscrição para a nova edição do ano II da *Gazeta de Matemática* (n.ºˢ 5 a 8) ao preço de escudos 30. Esta nova edição oferece aos leitores da *Gazeta de Matemática* a possibilidade de completarem as suas colecções no formato e características actuais e com os textos cuidadosamente revistos. Logo que as inscrições atinjam o número de 300, proceder-se-á, à composição, impressão e distribuição da nova edição do ano II. Depois de publicada, a segunda edição do volume II será vendida ao preço de escudos 40.

CONDIÇÕES DE ASSINATURA

A administração da *Gazeta de Matemática* aceita, quando pedidas directamente, assinaturas de quatro números, ao preço de escudos 50, para o que basta indicar o nome, a morada e o local de cobrança As assinaturas são renovadas automàticamente no seu termo, salvo aviso prévio em contrário. Todas as assinaturas têm início com o primeiro número publicado em cada ano.

ASSINATURAS GRATUITAS

Todo o assinante que indique à administração da *Gazeta de Matemática* dez novos assinantes beneficiará de uma assinatura gratuita durante o ano seguinte ao da sua assinatura.

NÚMEROS ATRASADOS

Estão completamente esgotados os números 5 a 15, da *Gazeta de Matemática*. Os restantes números são vendidos aos preços seguintes:

N.ºˢ 1-4 (2.ª edição do ano I, no formato actual e com o texto cuidadosamente revisto)	40$00
N.ºˢ 16 a 49, cada número	12$50
N.º 50	60$00
N.ºˢ 51 a 75 { cada número simples	17$50
N.ºˢ 78 a 95 { » » duplo	35$00
N.ºˢ 76-77	60$00

A administração da *Gazeta de Matemática* executa qualquer encomenda à cobrança pelo correio.

ANGARIE ASSINANTES PARA A «GAZETA DE MATEMÁTICA».

Concorrerá, assim, para o melhoramento de uma revista sem objectivos comerciais

PREÇO ESC. 35$00

ADMINISTRAÇÃO DA «GAZETA DE MATEMÁTICA»
Rua Diário de Notícias, 134-1.º-Esq.º—LISBOA-2 — Telefone 369449