
GAZETA DE MATEMÁTICA

JORNAL DOS CONCORRENTES AO EXAME DE APTIDÃO E DOS
ESTUDANTES DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS SUPERIORES

ANO XXVI

N.º 98-99

JAN.-JUNHO 1965

SUMÁRIO

Geodesic curvature of a curve of a vector field
by *R. N. Kaul*

Sobre as aplicações de $\mathcal{P}(A)$ em $\mathcal{P}(B)$
por *José Morgado*

Um novo método numérico de extração
da raiz quadrada
por *Ruy Madsen Barbosa*

Sobre a origem da Álgebra Moderna
por *Otto Endler*

Relatório revisto sobre a linguagem algorítmica
ALGOL 60
(*Conclusão*)

Centésimo número da «Gazeta de Matemática»

Matemáticas Superiores
Pontos de Exames de Frequência e Finais
Matemáticas Gerais

Boletim Bibliográfico

G A Z E T A D E M A T E M Á T I C A

EDITOR — *Gazeta de Matemática, Lda.*

ADMINISTRADOR — *A. Sá da Costa*

Sede e Administração — Rua Diário de Notícias, 134-1.º-Esq.º — Tel. 369449 — Lisboa-2.

R E D A C Ç Ã O

Redactores: *J. Gaspar Teixeira, J. Morgado e J. da Silva Paulo*

OUTROS COMPONENTES

EM PORTUGAL:

Coimbra: L. Albuquerque; **Lisboa:** Almeida Costa, A. Sá da Costa, J. J. Dionísio, J. Sebastião e Silva, J. Ribeiro Albuquerque, M. Teodora Alves, Fernando de Jesus, A. César de Freitas e Fernando Dias Agúdo; **Porto:** Andrade Guimarães, Arala Chaves, Coimbra de Matos, Laureano Barros, L. Neves Real.

NO ESTRANGEIRO:

Argentina — Buenos Aires: António Monteiro, L. A. Santaló e Eduardo del Busto; **Mendoza:** F. Toranzos; **San Luis:** Manuel Balanzat; **Brasil — Belo Horizonte:** Cristovam dos Santos; **Recife:** Manuel Zaluar, Newton Maia, Ruy Luís Gomes e José Morgado; **Rio de Janeiro:** Achille Bassi, Leopoldo Nachbin, Maria Laura Mousinho e Mauricio Peixoto; **São Paulo:** Omar Catunda; **Espanha — Barcelona:** Francisco Sanvisens; **Madrid:** Sixto Rios Garcia; **Itália — Roma:** Emma Castelnuovo; **França — Paris:** Paul Belgodère; **Nancy:** A. Pereiro Gomes; **Suísça — Zürich:** H. Wermus; **Uruguay — Montevideo:** Rafael La Guardia; **U. S. A. — Pennsylvania:** Maria Pilar Ribeiro; **Venezuela —** J. Gallego Diaz.

Toda a colaboração enviada para publicação nesta revista deve ser dactilografada. A G. M. fornece separatas dos artigos publicados, mediante acordo prévio entre o Autor e a Redacção.

COLECÇÃO «PROBLEMAS DA ACTUALIDADE CIENTÍFICA»

N.º 1 — A Exploração do Espaço Cósmico

por A. N. NESMEIANOV

Esta colecção dirige-se ao público português com conhecimentos equivalentes aos adquiridos no ensino secundário.

EDIÇÕES DA «GAZETA DE MATEMATICA»

F. R. DIAS AGUDO

INTRODUÇÃO À ÁLGEBRA LINEAR E GEOMETRIA ANALÍTICA

— 2.ª edição — vol. II — Lisboa, 1964

Os sócios de S. P. M., assinantes de «Gazeta de Mat.» e de «Portugaliae Math.», beneficiam para estas obras do desconto de 20 %.

Composição e impressão — Tipografia Matemática, Lda. — Rua Diário de Notícias, 134-1.º-Esq.º — Telefone 369449 — LISBOA-2

Geodesic curvature of a curve of a vector field

by *R. N. Kaul*

1. Introduction.

Let V be a vector field in a surface in a Euclidean space of three dimensions. PAN [3] has studied the normal curvature of the vector field V with generalization obtained by the author [2].

The object of the present note is to define the geodesic curvature of the curve of the vector field and obtain some properties. As a special case when the curves of the vector field V form an orthogonal net of co-ordinate curves, these geodesic curvatures have the known form.

2. Consider upon a surface S

$$x^i = x^i(u^1, u^2) \quad (i = 1, 2, 3),$$

a curve C defined by

$$u^\alpha = u^\alpha(s) \quad (\alpha = 1, 2).$$

With each point of the surface we associate an arbitrary but fixed vector field V . The components v^i and p^α of the vector field V in the x 's and u 's are connected by the relation

$$v^i = x^i_{,\alpha} p^\alpha.$$

A curve on the surface S along which the vectors of the vector field V are tangent is

called the curve of the vector field. It is defined by [3]

$$\varepsilon_{\alpha\beta} p^\alpha du^\beta = 0.$$

The geodesic curvature of the curve C_V of the vector field V shall, therefore, be defined by [1]

$$(2.1) \quad v^k g = - \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial u^\beta} \left(\frac{\sqrt{g} g^{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\gamma} p^\gamma}{(g^{\gamma\delta} \varepsilon_{\alpha\gamma} \varepsilon_{\beta\delta} p^\alpha p^\beta)^{1/2}} \right)$$

Use of formulae

$$(2.2) \quad g^{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\gamma} \varepsilon_{\beta\delta} = g_{\gamma\delta}$$

$$(2.3) \quad \varepsilon_{\lambda\alpha} g^{\beta\alpha} = \varepsilon^{\gamma\beta} g_{\gamma\lambda}$$

in (2.1) yields the relation

$$v^k g = - \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial u^\beta} \left(\frac{e^{\gamma\beta} g_{\gamma\lambda} p^\lambda}{(g_{\alpha\mu} p^\alpha p^\mu)^{1/2}} \right).$$

In particular when p^α are the components of a unit vector, we have

$$(2.4) \quad -v^k g = \varepsilon^{\alpha\beta} p_{\alpha;\beta}$$

where semi-colon (;) followed by an index denotes covariant differentiation with respect to u with that index. Since the right hand expression of (2.4) is a scalar called the curl of the vector p_α [3], we have

"The geodesic curvature of the curve C_V of a unit vector field V is a scalar which numerically equals the curl of the covariant components of the vector field V ".

Evidently this curl vanishes if p_α are the components of the gradient of a scalar ϕ . Therefore

"The necessary and sufficient condition for the vanishing of the geodesic curvature of a curve of a vector field is that the vector be a gradient".

Suppose now that the vectors of the unit vector field V form an orthogonal net of co-ordinate curves, then from (2.4) we obtain for the geodesic curvatures $v^k g_1$, and $v^k g_2$ of these curves the following relations

$$(2.5) \quad v^k g_1 = -\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial u^2} (g_{11} p^1)$$

$$(2.6) \quad v^k g_2 = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial u^1} (g_{22} p^2).$$

It is well to recall that

$$p^\alpha = \frac{d u^\alpha}{d s} \quad \alpha = 1, 2$$

and

$$\frac{d u^1}{d s} = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}, \quad \frac{d u^2}{d s} = -\frac{1}{\sqrt{g_{22}}}$$

to verify that (2.5) and (2.6) are the known results for the geodesic curvature of these curves.

Next we consider the orthogonal trajectory C_W of the curve C_V of the vector field V . These are defined by

$$\varepsilon_{\rho\sigma} g^{\rho\mu} \varepsilon_{\mu\alpha} p^\alpha d u^\sigma = 0$$

which by virtue of (2.2) reduces to

$$g_{\alpha\alpha} p^\alpha d u^\sigma = 0.$$

If $w^k g$ denotes the geodesic curvature of the curve C_W , we have

$$w^k g = -\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial u^\beta} \left(\frac{\sqrt{g} g^{\alpha\beta} g_{\lambda\alpha} p^\alpha}{(g^{\gamma\delta} g_{\alpha\gamma} g_{\mu\delta} p^\alpha p^\mu)^{1/2}} \right)$$

which yields on simplification

$$(2.7) \quad w^k g = -\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial u^\beta} \left(\frac{\sqrt{g} p^\beta}{(g_{\alpha\mu} p^\alpha p^\mu)^{1/2}} \right)$$

Assuming p^α to be a unit vector, we obtain from (2.7)

$$-w^k g = \operatorname{div} p^\beta$$

Thus

"The geodesic curvature of the orthogonal trajectory of the curve C_V of a unit vector field V numerically equals the divergence of the vector field".

We can arrive at the above result also by considering a unit vector field $w^i (= x^i_{,\alpha} q^\alpha)$ orthogonal to the unit vector field $v^i (= x^i_{,\alpha} p^\alpha)$.

From (2.1), the geodesic curvature of a curve C_W of the vector field W is given by

$$w^k g = -\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial u^\beta} (\varepsilon^{\gamma\beta} g_{\gamma\lambda} q^\lambda)$$

which on using the relations

$$\varepsilon_{\lambda\alpha} p^\alpha = q_\lambda$$

$$\varepsilon^{\gamma\beta} \varepsilon_{\gamma\mu} = \delta^\beta_\mu$$

yields

$$w^k g = -\operatorname{div} p^\beta.$$

Therefore

"The geodesic curvature of a curve of a unit vector field orthogonal to another unit vector field equals numerically the divergence of the latter".

REFERENCES

- [1] L. P. EISENHART, *An introduction to differential geometry with use of the tensor calculus*, Princeton University Press, 1947.
- [2] R. N. KAUL, *Generalized normal curvature of a vector field*, The Tensor (New Series). **7**, N.º 3, 1957, pp. 185-189.
- [3] T. K. PAN, *Normal curvature of a vector field*. Amer. Jour. Maths., **75**, 1952, pp. 955-966.

Sobre as aplicações de $\mathcal{P}(A)$ em $\mathcal{P}(B)$ ⁽¹⁾

por José Morgado

Seja $g: B \rightarrow A$ uma aplicação de B em A . Se $X \subseteq A$, designa-se por $g^{-1}(X)$ o conjunto dos elementos de B cujas imagens por g são elementos de X , i. e.,

$$a \in g^{-1}(X), \text{ se e só se } g(a) \in X$$

Isto significa que g^{-1} é uma aplicação do conjunto $\mathcal{P}(A)$, formado pelas partes de A , no conjunto $\mathcal{P}(B)$, formado pelas partes de B .

No entanto, dada uma aplicação $f: \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(B)$, pode acontecer que não exista nenhuma aplicação $g: B \rightarrow A$ para a qual se tenha $f = g^{-1}$. Por exemplo, sejam $A = \{a, b\}$ e $B = \{1, 2\}$; se f é uma aplicação de $\mathcal{P}(A)$ em $\mathcal{P}(B)$ tal que $f(A) = \{1\}$ e $f(\{a\}) = \{1, 2\}$, não existe nenhuma aplicação $g: B \rightarrow A$ tal que $f = g^{-1}$, visto que, se X e Y são partes de A , então

$$X \subseteq Y \text{ implica } g^{-1}(X) \subseteq g^{-1}(Y)$$

para toda aplicação $g: B \rightarrow A$.

Surge naturalmente o problema de caracterizar as aplicações $f: \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(B)$ para as quais existe alguma aplicação $g: B \rightarrow A$ tal que $f = g^{-1}$.

Para que exista uma tal aplicação $g: B \rightarrow A$, é evidentemente necessário que f satisfaça às condições:

$$(I) \quad f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \bigcap_{i \in I} f(A_i),$$

para toda família não vazia $\{A_i\}_{i \in I}$ de partes de A ;

$$(II) \quad f(A - X) = B - f(X),$$

para todo $X \in \mathcal{P}(A)$.

Isto resulta do facto de que, para toda aplicação $g: B \rightarrow A$, se tem

$$g^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \bigcap_{i \in I} g^{-1}(A_i)$$

e

$$g^{-1}(A - X) = B - g^{-1}(X),$$

quaisquer que sejam a família não vazia $\{A_i\}_{i \in I}$ de partes de A e a parte X de A .

Vejamos que as condições (I) e (II) são também suficientes.

Em primeiro lugar, observemos que

$$f(\emptyset) = \emptyset \text{ e } f(A) = B.$$

Com efeito, das condições (I) e (II) resulta

$$\begin{aligned} f(\emptyset) &= f(\emptyset \cap (A - \emptyset)) = f(\emptyset) \cap f(A - \emptyset) = \\ &= f(\emptyset) \cap (B - f(\emptyset)) = \emptyset \end{aligned}$$

e, utilizando novamente a condição (II), obtém-se

$$f(A) = f(A - \emptyset) = B - f(\emptyset) = B.$$

Para estabelecermos a suficiência das condições (I) (II), basta mostrar que para todo $b \in B$ existe um e um só elemento $a \in A$ tal que $b \in f(\{a\})$, porque, pondo então $g(b) = a$, obtém-se uma aplicação $g: B \rightarrow A$ tal que $f = g^{-1}$.

Vejamos então que:

(1) Nota de aula.

- 1) Existe pelo menos um elemento $a \in A$ tal que $b \in f(\{a\})$.

De facto, se para nenhum $a \in A$ se tem $b \in f(\{a\})$, então tem-se

$$b \in B - f(\{a\}) \text{ para todo } a \in A,$$

donde

$$b \in \bigcap_{a \in A} (B - f(\{a\})) = \bigcap_{a \in A} f(A - \{a\}), \text{ por (II)}$$

$$= f\left(\bigcap_{a \in A} (A - \{a\})\right), \text{ por (I).}$$

Mas

$$\bigcap_{a \in A} (A - \{a\}) = \emptyset,$$

porque

$$x \in \bigcap_{a \in A} (A - \{a\}) \text{ implica } x \in A - \{x\},$$

o que é absurdo.

Quer dizer, se para nenhum $a \in A$ se tivesse $b \in f(\{a\})$, ter-se-ia $b \in \emptyset$.

- 2) Não existe mais que um elemento $a \in A$ tal que $b \in f(\{a\})$.

Com efeito, se

$$b \in f(\{a\}) \text{ e } b \in f(\{a'\})$$

onde $a, a' \in A$ e $a' \neq a$, então resultaria

$$b \in f(\{a\}) \cap f(\{a'\}) = f(\{a\} \cap \{a'\}) = f(\emptyset) = \emptyset,$$

o que é absurdo.

Por consequência, é válido o seguinte

TEOREMA: Seja f uma aplicação de $\mathcal{P}(A)$ em $\mathcal{P}(B)$. Para que exista uma aplicação g de B em A tal que se tenha $f = g^{-1}$, é necessário e suficiente que f satisfaça às condições (I) e (II).

É imediato que a condição (I) pode ser substituída pela condição

$$(I') \quad f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} f(A_i),$$

para toda família não vazia $\{A_i\}_{i \in I}$ de partes de A .

Na verdade, se as condições (I) e (II) são satisfeitas, então

$$\begin{aligned} f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) &= f\left(A - \bigcap_{i \in I} (A - A_i)\right) = \\ &= B - f\left(\bigcap_{i \in I} (A - A_i)\right) = B - \bigcap_{i \in I} (f(A - A_i)) = \\ &= \bigcup_{i \in I} (B - f(A - A_i)) = \\ &= \bigcup_{i \in I} (B - (B - f(A_i))) = \bigcup_{i \in I} f(A_i), \end{aligned}$$

o que mostra que (I) e (II) implicam (I') e (II'). Análogamente se vê que (I') e (II) implicam (I) e (II').

Recordemos que, se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}'$ são álgebras de BOOLE completas e f é uma aplicação de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{A}'$ tal que

$$f\left(\bigwedge_{i \in I} a_i\right) = \bigwedge_{i \in I} f(a_i),$$

para toda família $\{a_i\}_{i \in I}$ de elementos de $\mathcal{A}$

$$f(\bar{a}) = \overline{f(a)},$$

para todo elemento $a \in \mathcal{A}$, onde por $\bar{x}$ se designa o complemento de x ,

então diz-se que f é um homomorfismo completo de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{A}'$.

Ora, se A e B são conjuntos não vazios, então os conjuntos $\mathcal{P}(A)$ e $\mathcal{P}(B)$ constituem álgebras de BOOLE, relativamente à intersecção, união e complementação de conjuntos.

Podemos, por consequência, afirmar que, se A e B são conjuntos não vazios e f é uma aplicação de $\mathcal{P}(A)$ em $\mathcal{P}(B)$, então existe uma aplicação g de B em A tal que $f = g^{-1}$, se e só se f é um homomorfismo completo da álgebra de BOOLE $\mathcal{P}(A)$ na álgebra de BOOLE $\mathcal{P}(B)$.

Um novo método numérico de extração da raiz quadrada

por Ruy Madsen Barbosa

Por ocasião do Curso de Férias de Verão, do Grupo de Estudos do Ensino da Matemática, em Janeiro de 1964, em São Paulo, apresentamos, numa palestra para professores secundários de matemática, um novo método numérico de extração da raiz quadrada, não só como um trabalho de cálculo numérico, mas especialmente com finalidades didáticas.

Julgávamos que o método apresentava sobre o procedimento tradicional, baseado na expansão quadrática de um binômio, a vantagem importante de ser muito mais facilmente entendida as suas razões.

Hoje, já possuímos os primeiros resultados, os quais vêm confirmando o nosso julgamento a priori; temos recebido comunicações de vários mestres que o têm empregado, e todas favoráveis.

Com o intuito de divulgar mais amplamente o método, para utilização, ou mesmo para novas experimentações, cujos resultados, se comunicados, agradecemos as atenções, publicamos nas páginas da Gazeta de Matemática, a cópia do trabalho mimeografado pelo G. E. E. M.

Preliminares

Dois tópicos do nosso curso secundário têm sempre suscitado indagações: a radiciação e as progressões; o primeiro pelas dificuldades didáticas em se expor as razões do algoritmo usual de extração da raiz quadrada;

o segundo pelo fato de muitos mestres julgarem de pouca importância.

O presente trabalho que apresentamos; fruto de idéias de meu irmão NEWTON ATALIBA MADSEN BARBÓSA, cremos, vem de encontro aos dois problemas, conciliando-os.

Procuramos nestas linhas, apresentar, sucintamente, a introdução no curso ginásial de elementos sobre as sucessões de ímpares e pares no que diz respeito às suas somas; depois, raciocinando sobre essas *particulares progressões aritméticas* obter o *novo processo de extração da raiz quadrada*.

No final do trabalho acrescentou-se a parte algébrica, o que poderia ser ministrado no primeiro científico (*), após as progressões, ou então, simultaneamente como simples aplicações.

A. Sucessões de ímpares.

A. 1. Os alunos já conhecem desde o curso primário a sucessão de números ímpares:

$$1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots$$

Nós vamos estudar algumas propriedades curiosas desses números e bastante fáceis.

A. 2. Somas.

Façamos as somas seguintes:

$$1 + 3 = 4$$

$$1 + 3 + 5 = 9$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 16$$

(*) Correspondente ao High School.

Observem os estudantes que 4 é o quadrado de 2, que 9 é o quadrado de 3, que 16 é o quadrado de 4; justamente o quadrado do número de ímpares considerados.

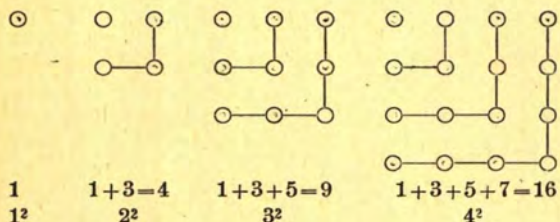
Esta é uma propriedade verdadeira para qualquer número de ímpares; verifiquemos por exemplo na sucessão seguinte de 5 ímpares:

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$$

25 é o quadrado de 5.

Verifiquem em suas casas, para obter outras sucessões de ímpares, por exemplo, para 6, para 7, etc. para 10 ímpares; aliás observem também que a regra é válida para o primeiro ímpar sozinho.

Nas figuras abaixo(*) cada bolinha corresponde a uma unidade, e cada ímpar é representado por bolinhas unidas por um traço; verifiquem que a forma de cada figura é de um quadrado, o que nos mostra novamente que a propriedade está certa.



Conclusão: A soma dos ímpares é igual ao quadrado do número de ímpares considerados.

A. 3. Ímpar sucessivo.

Consideremos as sucessões de ímpares

1	de 1 ímpar
1, 3	de 2 ímpares
1, 3, 5	de 3 ímpares
1, 3, 5, 7	de 4 ímpares

(*) A disposição utilizada é denominada processo gnômônico.

Observemos que em cada sucessão, para se achar o ímpar seguinte nós *multiplicamos por 2 a quantidade de ímpares que possuímos e adicionamos uma unidade.*

Assim, da primeira para a segunda:

$$2 \times 1 + 1 = 3 \text{ que é o ímpar seguinte.}$$

Da segunda para a terceira:

$$2 \times 2 + 1 = 5 \text{ que é o ímpar seguinte.}$$

Da terceira para a quarta:

$$2 \times 3 + 1 = 7$$

Vamos ver se a regra dá certo em seguida:

Temos 4 ímpares: 1, 3, 5, 7.

$$2 \times 4 + 1 = 9 \text{ e, 9 é o ímpar seguinte.}$$

Vamos verificar novamente: 1, 3, 5, 7, 9.

$$2 \times 5 + 1 = 11.$$

Verifiquem em casa até obterem uma sucessão de 10 ímpares.

B. Sucessão de pares.

B. 1. Vamos fazer estudo semelhante com a sucessão de pares:

0, 2, 4, 6, 8, ...

B. 2. Façamos as somas:

$$0 + 2 = 2$$

$$0 + 2 + 4 = 6$$

$$0 + 2 + 4 + 6 = 12$$

$$0 + 2 + 4 + 6 + 8 = 20$$

Observemos que:

$$2 = 2 \times 1$$

$$6 = 3 \times 2$$

$$12 = 4 \times 3$$

$$20 = 5 \times 4$$

isto é:

A soma dos pares é igual ao número de pares considerados, multiplicado pelo número antecessor.

Vamos verificar para a sucessão de 6 pares:

$$6 \times 5 = 30$$

De fato:

$$0 + 2 + 4 + 6 + 8 + 10 = 30.$$

Façamos outro exemplo com 7 pares:

$$7 \times 6 = 42$$

Está certo:

$$0 + 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 = 42.$$

B. 3. Par sucessivo:

Os alunos vão descobrir a regra para se achar o par seguinte (*).

C. Extração da raiz quadrada.

C. 1. Por separação em intervalos.

C. 1. 1. Preliminares.

Como questões preparatórias ao algoritmo de extração da raiz quadrada nós propomos que se forneça aos alunos questões como a seguinte:

— quantos ímpares estão contidos em 27?

E, deixe-os escrever a sucessão de ímpares e a de quadrados, até chegar ao número fornecido:

ímpares	1	3	5	7	9	11
quadrados	1	4	9	16	25	36
					↓	
					27	

Resposta: Existem 5 ímpares e sobram 2.

Lembrar aos alunos que o 5 encontrado é na verdade a raiz quadrada aproximada por falta de 27:

$$\sqrt{27} \cong 5.$$

Na fase seguinte proponha a mesma questão no caso do número ser «grande», por exemplo 1428, e chame atenção dos alunos para a dificuldade que o processo traria até chegarmos ao 1428; o que nos obriga a descobrir um processo mais rápido.

C. 1. 2. Usando as propriedades das sucessões.

a) Primeiro exemplo estudado:

Consideremos para primeiro exemplo o número 52.

Tomemos um quadrado qualquer conhecido, 9 por exemplo, que é o quadrado de 3, portanto conforme o que nós aprendemos anteriormente: soma dos 3 primeiros ímpares: 1, 3 e 5.

Com esta escolha separamos a sucessão em dois intervalos como ilustra a esquema abaixo:

	1.º intervalo	2.º intervalo
ímpares	1 3 5	
quadrados	1 4 9	
		↓
		52

No segundo intervalo, os ímpares devem somar $52 - 9 = 43$ ou, pelo menos quase 43 (*).

O 1.º ímpar do 2.º intervalo, nós também já aprendemos a calcular pela regra do ímpar seguinte:

$$2 \times 3 + 1 = 7.$$

Os ímpares do segundo intervalo são portanto:

$$7, 9, 11?$$

(*) Esta regra não será utilizada no presente trabalho, mas por certo despertará interesse.

(*) Conforme 52 seja ou não um quadrado.

ou

$$7 + 0, 7 + 2, 7 + 4, 7 + 6?$$

Procuramos agora quantos ímpares existem no segundo intervalo; é fácil, basta dividirmos o 43 por 7.

Vejamos

$$\begin{array}{r|l} 43 & 7 \\ 1 & 6 \end{array}$$

Temos então seis 7, e os pares: 0, 2, 4, etc.?

Devemos ter no segundo intervalo uma sucessão de 6 pares; e nós também já aprendemos a calcular a soma de 6 pares:

$$6 \times 5 = 30.$$

Logo, não podem existir seis 7, que quase fornecem os 43.

Reduzamos para cinco 7:

$$\begin{array}{r|l} 43 & 7 \\ 8 & 5 \end{array}$$

Neste caso a soma dos pares seria:

$$5 \times 4 = 20$$

que é também maior que o resto 8, portanto também não serve.

Reduzamos, novamente, para quatro 7.

$$\begin{array}{r|l} 43 & 7 \\ 15 & 4 \end{array}$$

e, agora, a soma dos pares é:

$$4 \times 3 = 12$$

menor que o resto 15 e ainda sobram 3, pois:

$$\begin{array}{r} 15 \\ -12 \\ \hline 3 \end{array}$$

Concluimos, finalmente, que no segundo intervalo existem 4 ímpares e sobra o número 3.

Como no primeiro intervalo tínhamos 3 ímpares, temos ao todo $3 + 4 = 7$ ímpares e sobra o número 3; ou que:

$$\sqrt{52} \cong 7 \text{ aproximado por falta, resto 3.}$$

b) Segundo exemplo estudado:

Seja extrair a raiz de 38.

1. Tomemos o quadrado de 4, que é 16 (1.º intervalo)

$$\begin{array}{r} 38 \\ -16 \\ \hline \end{array}$$

Sobram 22 para o segundo intervalo.

2. O primeiro ímpar do segundo intervalo é:

$$\begin{array}{r} 2 \times 4 = 8 \\ +1 \\ \hline 9 \end{array}$$

3. Vejamos quantos ímpares existem em 23:

$$\begin{array}{r|l} 22 & 9 \\ 4 & 2 \end{array}$$

4. A soma dos pares é:

$$2 \times 1 = 2$$

mas 2 é menor que o resto 4, logo é possível, e sobram ainda:

$$\begin{array}{r} 4 \\ -2 \\ \hline 2 \end{array}$$

Concluimos que no segundo intervalo de fato existem 2 ímpares.

5. Total de ímpares:

$$4 + 2 = 6.$$

6. Conclusão

$$\sqrt{38} = 6 \text{ aproximada por falta, resto 2.}$$

C. 2. Exercícios:

1. Determine a raiz quadrada dos números seguintes, escrevendo as sucessões de ímpares e de quadrados:

$$a) \sqrt{45} \quad b) \sqrt{69} \quad c) \sqrt{88}.$$

2. Determine a raiz quadrada dos números seguintes, separando a sucessão em dois intervalos.

- a) $\sqrt{87}$ escolhendo o quadrado de 5
 b) $\sqrt{62}$ » » de 6
 c) $\sqrt{29}$ » » de 4.

Resolva as questões do exercício 2 fazendo Você as escolhas.

4. Calcule a raiz quadrada dos números seguintes:

- a) 432 escolhendo o quadrado de 20
 b) 986 » » » 30
 c) 158 » » » 10
 d) 576 » » » 20

5. Resolva os exercícios anteriores escolhendo outros quadrados, compare os cálculos feitos; qual escolha é preferível?

D. Novo algoritmo para extração da raiz quadrada.

D. 1. Preliminares.

O professor poderá aproveitar os exercícios exploratórios, como o 4.º e 5.º, para ensinar-lhes que devem separar os números em classes de dois algarismos e buscar a raiz aproximada da 1.ª, e acrescentar os zeros conforme o número de classes para determinar um «bom quadrado» para o primeiro intervalo (*).

Também é importante ensinar-lhes quantos algarismos terá a raiz, o que em alguns casos ajuda a determinação do quociente correto na busca do número de ímpares do segundo intervalo.

D. 2. Dispositivo.

Para o novo algoritmo da extração da raiz quadrada nós sugerimos o dispositivo seguinte onde escrevemos ao lado algumas indicações que julgamos úteis.

$\sqrt{87} = ?$		quadrado escolhido = $25 = 5^2$		
	$\sqrt{87}$	$5 \times 2 = 10$		
(1.º intervalo)	$\frac{-25}{62}$	$\frac{+1}{11}$		
(2.º intervalo)		Divisor = 11	(1.º ímpar do 2.º intervalo)	
(1.º resto parcial)	7	(N.º de 5	4	Raiz = $5 + 4 = 9$
(2.º » »)	18	ímpares) $\times 4$	$\times 3$	
	$\frac{-12}{6}$	Soma 20	12	
Resto = 6		dos pares)		
		maior que o 7	menor que o 18	
		corto o 7	subtraio do 18	

(*) Esta escolha como já verificaram não é necessária, mas facilita bastante.

D. 3. Outros exemplos:

a) $\sqrt{374}$ Previsão: 2 algarismos $\sqrt{3} \cong 1$, logo usamos $10^2 = 100$

$\sqrt{\begin{array}{r} 374 \\ -100 \\ \hline 274 \\ 85 \\ -72 \\ \hline \text{Resto} = 13 \end{array}}$	$10 \times 2 = 20$ $\quad \quad +1$ $\quad \quad \hline \quad \quad 21$	9^* $\times 8$ $\hline 72$	Raiz = $10 + 9 = 19$

* Observar que, com a escolha feita: $10^2 = 100$, já sabemos que o número de ímpares é um número com um só algarismo.

b) $\sqrt{3244}$ Previsão: 2 algarismos $\sqrt{32} \cong 5$, logo usamos $50^2 = 2500$

$\sqrt{\begin{array}{r} 3244 \\ -2500 \\ \hline 744 \\ 37 \\ 138 \\ -30 \\ \hline \text{Resto} = 108 \end{array}}$	$50 \times 2 = 100$ $\quad \quad +1$ $\quad \quad \hline \quad \quad 101$	7 $\times 6$ $\hline 42$	6 $\times 5$ $\hline 30$	Raiz = $50 + 6 = 56$

c) $\sqrt{7365}$ Previsão: 2 algarismos $\sqrt{73} \cong 8$, usamos $80^2 = 6400$

$\sqrt{\begin{array}{r} 7365 \\ -6400 \\ \hline 965 \\ 160 \\ -20 \\ \hline \text{Resto} = 140 \end{array}}$	$80 \times 2 = 160$ $\quad \quad +1$ $\quad \quad \hline \quad \quad 161$	5 $\times 4$ $\hline 20$	Raiz = $80 + 5 = 85$

d) $\sqrt{5973}$

$\sqrt{\begin{array}{r} 5973 \\ 4900 \\ \hline 1073 \\ 86 \\ -42 \\ \hline \text{Resto} = 44 \end{array}}$	$\begin{array}{r} 70 \times 2 = 140 \\ +1 \\ \hline 141 \end{array}$
$\begin{array}{r} 7 \\ \times 6 \\ \hline 42 \end{array}$	$\begin{array}{l} \text{Raiz} = 70 + 7 = 77 \\ \\ \text{(menor)} \end{array}$

e) $\sqrt{83526}$

$\sqrt{\begin{array}{r} 83526 \\ 40000 \\ \hline 43526 \\ 7436 \\ 3827 \\ 11446 \\ 7837 \\ -7832 \\ \hline \text{Resto} = 0005 \end{array}}$	$\begin{array}{r} 200 \times 2 = 400 \\ +1 \\ \hline 401 \end{array}$	$\begin{array}{r} 99 \\ \times 98 \\ \hline - \end{array}$	$\begin{array}{r} 89 \\ \times 88 \\ \hline 712 \\ 712 \\ \hline 7832 \end{array}$	$\begin{array}{l} \text{Raiz} = 200 + 89 = 289 \\ \\ \text{(menor)} \end{array}$
--	---	--	--	--

Observações — Nesta raiz previmos 3 algarismos, o primeiro era 2, portanto quando fomos dividir 43526 por 401 separamos o 6 final e procuramos 4352 por 401 para pesquisar o segundo algarismo, e o 6 deixamos para abaixar depois para pesquisarmos o terceiro algarismo.

Para o teste da soma dos pares ganhamos também em cálculo, observando que enquanto tivermos mais que 90 a soma fornecerá mais que $90 \times 90 = 8100$, portanto mais que o próprio resto anterior 7436; logo reduzimos já para 89.

E. Apêndice para o Curso Colegial.

E. 1. Soma de ímpares

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) = k^2.$$

Sugestões: a) Indução completa.

b) Soma de termos da progressão aritmética com: primeiro termo = 1, razão = 2, último = $2k - 1$.

E. 2. Impar sucessivo

$$(2k - 1) + 2 = 2k + 1.$$

E. 3. Soma de Pares (começando com o zero)

$$0 + 2 + 4 + 6 + \dots + 2(k - 1) = k(k - 1).$$

Sugestões: a) Indução completa.

b) Soma de termos em progressão aritmética com: 1.º termo = 0, razão = 2, último termo = $2(k - 1)$.

E. 4. Demonstração do Algoritmo.

Seja o número $Y = X^2 + R$.

Seja Z^2 qualquer quadrado inferior a Y

e $D = Y - Z^2$.

Pela E. 1. $1 + 3 + 5 + \dots + (2Z - 1) = Z^2$.

Pela E. 2. o impar seguinte é $2Z + 1 = m$.

Dividindo-se D por m obtém-se o número q de impares do intervalo seguinte.

Seja $D = m \cdot q + r$.

Mas D é a soma de impares, portanto tirando-se m de todos obtemos a sucessão de pares: $0, 2, 4, 6, \dots$, de soma: $q(q-1)$ (pela propriedade E. 3.).

Seja $D' = D - R =$ soma dos impares do 2.º intervalo

portanto $D' - m \cdot q = q(q-1)$

mas $r = D - m \cdot q$

portanto:

$$r = D' - m \cdot q + R$$

ou substituindo:

$$r = q(q-1) + R \Rightarrow q(q-1) \leq r.$$

Verificada a condição anterior deveremos ter:

$$Z + q = X$$

ou que

$$\sqrt{Y} = Z + q \text{ com resto } R.$$

Sôbre a origem da Álgebra Moderna⁽¹⁾

por Otto Endler⁽²⁾

O enorme progresso que a Matemática realizou nos últimos cinquenta anos e ainda está realizando hoje, é estreitamente ligado à algebrização da Matemática começada neste século, i. e., a penetração em todas as disciplinas matemáticas dos métodos que foram primeiro aplicados na Álgebra Moderna.

Por esta razão, o estudo de Matemática hoje em dia começa necessariamente por um curso de introdução à Álgebra Moderna, e todo estudante de Matemática sabe do que trata esta disciplina: É o estudo de grupos, aneis, corpos e outras estruturas algébricas,

i. e., estruturas definidas por uma ou algumas operações, internas ou externas, que satisfaçam a certas condições prescritas. Porém, perguntado sobre o que é a Álgebra Clássica, o estudante em geral não saberá responder. Na medida em que é reconhecida a importância da Álgebra Moderna, está sendo esquecida a Álgebra Clássica. Isto é lamentável, pois foi essencialmente a Álgebra Clássica que deu origem à Álgebra Moderna, e acho que um certo conhecimento deste desenvolvimento deveria fazer parte da formação geral de todo matemático.

O que é a Álgebra Clássica? Cem anos atrás, SERRET, um importante algebrista francês, definiu a Álgebra como a «análise de equações». De fato, desde 2000 A. C. até há pouco mais que um século, o problema central da Álgebra era de resolver equações algébricas por radicais, i. e., dada uma equação algébrica

$$X^n + a_1 \cdot X^{n-1} + \dots + a_{n-1} \cdot X + a_n = 0,$$

(1) Conferência proferida no Instituto de Matemática da Universidade do Ceará, em 24-4-1965, no Instituto Central de Matemática da Universidade de Paraíba, em 3-5-1965 (aula inaugural) e no Instituto de Física e Matemática da Universidade do Recife, em 5-5-1965.

(2) Instituto de Matemática P. e A., Rio de Janeiro e Mathematisches Institut der Universität Bonn.

indicar uma solução por meio de uma expressão nos coeficientes $a_1, \dots, a_n$, utilizando as operações racionais e os radicais $\sqrt{}$, $\sqrt[3]{}$, $\sqrt[4]{}$, etc., possivelmente iterados.

A necessidade de resolver equações algébricas apareceu há muito tempo. Sabe-se que já os Babilônios, aproximadamente 2000 A. C., conheciam, além das operações racionais, a raiz quadrática (i. e., o radical $\sqrt{}$), e sabiam resolver qualquer equação do segundo grau. Aliás, eles possuíam um sistema de números parecido com o nosso sistema decimal, mas com base 60 em lugar de 10. Deve-se notar, porém, que os Babilônios não conheciam demonstrações; eles calculavam conforme certas regras as quais não justificavam.

Foram os antigos gregos (600 A. C. a 300 D. C., aproximadamente) que primeiro reconheceram a necessidade das demonstrações na Matemática. Já por volta de 500 A. C., PYTHAGORAS demonstrou que $\sqrt{2}$ é irracional. Mas apesar de terem descoberto os números irracionais, encontrados na forma de «razões incomensuráveis» nas construções geométricas, os matemáticos gregos reconheceram como números apenas os números naturais: 1, 2, 3, etc. Este fato atrasou o desenvolvimento da Álgebra que, na época grega, não fez nenhum progresso essencial. Deve-se mencionar, porém, que certos problemas de construção geométrica com régua e compasso (por exemplo, a triseção de um ângulo, a quadratura do círculo), que foram formulados pelos matemáticos gregos, chamaram a atenção dos algebristas dos séculos subsequentes. Finalmente, já no declínio da Matemática grega, DIOPHANTOS (aproximadamente 250 D. C.) deu uma valiosa contribuição à Álgebra: Ele foi o primeiro a representar incógnitas por letras e a indicar a conhecida «regra dos sinais».

Depois da época grega, começando com o Império Romano, houve uma decadência da Matemática na Europa, que se estendeu à Idade Média. Enquanto isto, por volta de 700 D. C., os Hindus (possivelmente influenciados pela Matemática babilônica ou chinesa) inventaram o número zero, considerado uma das grandes invenções do mundo. O sistema decimal dos Hindus foi aceito pelos Árabes e, através de guerras e comércio entrou na Europa da Idade Média. Foi principalmente o «Livro de Cálculo» de LEONARDO DE PISA, publicado em 1202, que divulgou a Matemática árabe e converteu a Europa ao sistema decimal.

Passaram ainda mais três séculos até que se verificasse um progresso essencial na Álgebra. Um tal progresso se deu somente por volta de 1500, quando SCIPIONE DEL FERRO (1465?-1526) conseguiu resolver a equação $X^5 + a \cdot X = b$, expressando a solução pela fórmula

$$x = \sqrt[5]{b/2 + \sqrt{(b/2)^2 + (a/3)^3}} + \\ + \sqrt[5]{b/2 - \sqrt{(b/2)^2 + (a/3)^3}}.$$

O costume daquela época de ocultar novos resultados matemáticos, em lugar de publicá-los, causou muitas brigas entre TARTAGLIA (1500?-57) por um lado, e CARDANO (1501-76) e seus discípulos por outro lado. TARTAGLIA redescobriu a fórmula acima em 1535, e CARDANO conseguiu obtê-la dele, sob a promessa de guardar segredo, mas publicou-a em 1545 como sua própria invenção. Entretanto, deve-se mesmo a CARDANO o método de reduzir uma equação arbitrária do terceiro grau a uma equação do tipo acima, como também o resultado que esta possui exatamente três soluções reais no «casus irreducibilis», i. e. no caso em que $(b/2)^2 + (a/3)^3 < 0$. Na mesma época, FERRARI (1522-65), um aluno de

CARDANO, conseguiu resolver a equação do quarto grau. Esses sucessos nutriram a esperança dos algebristas de que fosse possível resolver, por radicais, as equações algébricas de qualquer grau. Veremos mais tarde, que esta esperança foi destruída no século XIX. A respeito do século XVI, deve-se mencionar ainda o nome de VIÈTE (1540-1603), considerado o «pai da Álgebra simbólica», pois ele foi o primeiro a usar letras não somente para as incógnitas mas também para os números dados, como é costume na Álgebra atual.

O século XVII é considerado o começo da Matemática Moderna, em virtude da invenção da Geometria Analítica, por DESCARTES (1596-1650), e do Cálculo Infinitesimal, por NEWTON (1643-1727) e LEIBNIZ (1646-1716). A Álgebra, entretanto, progrediu pouco nessa época, apesar de certas contribuições de LEIBNIZ e TSCHIRNHAUS (1651-1708), que tentaram em vão resolver por radicais a equação geral do quinto grau.

Somente na segunda metade do século XVIII verificaram-se progressos consideráveis na Álgebra, e precisamente em duas direcções. O primeiro progresso consiste numa extensão da noção de número. Nos séculos anteriores, pouco a pouco, os matemáticos reconheceram como números os números racionais, os negativos, e as expressões obtidas como soluções de equações algébricas, pelo menos quando elas representavam números reais. Eles acostumaram-se também calcular com os números complexos envolvidos nessas expressões (por exemplo, as parcelas na fórmula acima, no «casus irreducibilis»), embora não os reconhecessem como números, chamando-os de números «falsos», «fictícios» ou «imaginários». Pelo facto destes números aparecerem nas soluções de equações do segundo, terceiro e quarto grau, surgiu a conjectura que eles serviriam também para resol-

ver equações algébricas de qualquer grau, ou mais precisamente, que toda equação algébrica possuiria pelo menos uma raiz na forma de um número real ou complexo. A demonstração desta conjectura, o chamado «teorema fundamental da Álgebra», foi tentada primeiro por D'ALEMBERT (1717-83) e completada por GAUSS (1777-1855). Deve-se notar que, diferentemente do problema da resolução de equações por radicais, se trata aqui de demonstrar apenas a existência de uma solução, sem precisar indicá-la numa fórmula explícita. Deve-se também a GAUSS a consolidação dos números complexos (representados por ele pelos pontos no plano), necessária para a demonstração deste teorema. Entretanto, esta consolidação baseou-se numa noção apenas intuitiva dos números reais (que somente em 1872 seria tornada precisa por DEDEKIND).

O segundo progresso dessa época refere-se ao problema da resolução de equações algébricas por radicais. Em trabalhos publicados por volta de 1770, LAGRANGE (1736-1813) e VANDERMONDE (1735-96) iniciaram estudos sistemáticos dos métodos de resolução. LAGRANGE investigou, para uma dada equação do n -ésimo grau, expressões racionais nas suas raízes $x_1, \dots, x_n$ (reais ou complexas, cuja existência é assegurada pelo «teorema fundamental») e, em particular, os «resolventes de Lagrange», e seu comportamento quando se permutam as raízes. VANDERMONDE, cujos estudos correspondem em parte aos de LAGRANGE, dedicou-se principalmente à investigação da «equação de divisão do círculo» $(X^p - 1)/(X - 1) = 0$, sendo p um número primo. Seus resultados foram completados por GAUSS nas «Disquisitiones arithmeticae», publicadas em 1801, onde se encontra também, como aplicação, o famoso resultado de que um polígono regular de p lados pode ser construído com régua e compasso se, e somente se, p for da forma $2^{2^k} + 1$.

Finalmente, o problema da resolução de equações algébricas foi solucionado, no primeiro terço do século XIX, pelos resultados definitivos de dois jovens matemáticos: ABEL (1802-29) e GALOIS (1811-32). Já RUFFINI (1765-1822) tinha tentado mostrar, em 1799, que a equação geral do quinto grau não se pode resolver por radicais, mas a sua demonstração era incompleta. Uma demonstração completa foi dada por ABEL, em 1824. Apesar de trabalhos importantíssimos, ABEL nem sempre obteve reconhecimento; ele viveu em pobreza e morreu de tuberculose na idade de 27 anos. Trágica foi também a vida, ainda mais curta, de GALOIS. Expulso da École Normale Supérieure por motivo de «comportamento irreverente», ele se envolveu em actividades políticas consideradas subversivas, esteve preso durante meses e finalmente, na idade de 20 anos, foi mortalmente ferido num duelo, ao qual ele não se pôde furtar, produto de uma intriga de inimigos políticos. Na véspera do duelo, já certo de que iria morrer, numa carta dirigida a um amigo ele expôs a hoje famosa teoria de GALOIS. Apesar da extrema importância deste e dos demais trabalhos matemáticos de GALOIS, eles não foram apreciados pelos matemáticos da época e publicados somente em 1846.

O resultado essencial da teoria de GALOIS, expressa na linguagem moderna, é o seguinte: Dada uma equação algébrica do grau n , com coeficientes num corpo K e raízes $x_1, \dots, x_n$ distintas, os corpos intermediários entre K e $K(x_1, \dots, x_n)$ correspondem biunivocamente aos sub-grupos do «grupo de GALOIS», definido como um determinado sub-grupo do grupo S_n das permutações de $x_1, \dots, x_n$ (e canonicamente isomorfo ao grupo dos K -automorfismos de $K(x_1, \dots, x_n)$, como foi mostrado, mais tarde, por DEDEKIND). Conclue-se disto que uma equação algébrica será resolúvel por radicais se, e somente se, o seu grupo de

GALOIS for resolúvel (i. e., possuir uma sequência de composição cujos quocientes são grupos comutativos). A impossibilidade de resolver a equação geral do n -ésimo grau, para $n \geq 5$, resulta então do facto de que o grupo S_n não é resolúvel.

Pela teoria de GALOIS, o problema da resolução de equações algébricas por radicais foi completamente solucionado e reconhecido como um caso especial, até bastante artificial, do problema mais geral de classificar os números algébricos. Com o estímulo da teoria de GALOIS, os algebristas começaram a estender o campo das suas pesquisas. Em primeiro lugar, ela incentivou o estudo dos grupos de permutações, que foi realizado principalmente por SERRET (1819-85) e JORDAN (1838-1922) e que deu lugar, mais tarde, ao estudo dos grupos abstratos (noção introduzida já em 1854, por CAYLEY (1821-95)). Além disto, a teoria de GALOIS deu um forte impulso à Teoria dos Números e, através dela, estimulou o desenvolvimento da teoria dos corpos. Essa teoria foi iniciada por DEDEKIND (1831-1916) e continuada por KRONECKER (1823-91), WEBER (1842-1913) e HILBERT (1862-1943). Entretanto, os corpos estudados na segunda metade do século XIX eram todos «concretos», i. e., seus elementos eram números, funções de variáveis complexas, séries de números, etc.. A axiomatização da teoria dos corpos somente foi realizada em 1910 no trabalho de STEINITZ (1871-1928), que se tornou fundamental para a conceituação atual da Álgebra. A partir de 1920, seguiu-se rapidamente a axiomatização do resto da Álgebra, pelos trabalhos de E. NOETHER (1882-1935), ARTIN (1898-1962) e seus alunos, em particular HASSE (1898) e KRULL (1899). O primeiro livro expositório da Álgebra Moderna foi publicado por VAN DER WAERDEN (1903), em 1930.

O objectivo desta minha palestra foi o de mostrar, que a teoria de GALOIS, como cul-

minância da Álgebra Clássica, deu origem à Álgebra Moderna. Porém, não se deve deixar de considerar também as influências provenientes de outras disciplinas matemáticas que foram importantes para a sua formação, as quais, entretanto, não posso analisar aqui. Devo mencionar ainda, que o meu esboço histórico se refere principalmente à teoria dos grupos e à dos corpos, como disciplinas centrais da Álgebra Moderna, deixando de lado as suas outras partes como, por exemplo, a Álgebra Linear e teorias algébricas mais recentes, cujos desenvolvimentos deveriam ser estudados à parte.

Não quero terminar a minha conferência sem mencionar, que o problema antigo da resolução de equações algébricas ainda existe, embora em forma modificada. Como a teoria de GALOIS mostra, os radicais não são suficientes, ou seja, as equações puras, como as únicas equações «resolventes», são demasiadamente especiais, pois servem somente no caso de grupos de GALOIS resolúveis. Mas pode-se pensar em admitir, além das equações puras, outros tipos de equações resolventes. Investigações neste sentido foram realizadas, no século passado, por F. KLEIN (1849-1925) e HERMITE (1822-1905). Uma teoria da resolução de equações algébricas bastante geral, baseada nas ideias de F. KLEIN, foi recentemente desenvolvida por KRULL e encontra-se exposta nas Notas de

Matemática no. 24. Apesar desta teoria ser uma interessante continuação da Álgebra Clássica e aplicação da teoria de GALOIS, não lhe cabe tanta importância atual como à própria teoria de GALOIS, que tem sido completada e generalizada, em várias direções, até nossos dias. Pretendo expôr essa teoria, como ela se apresenta hoje em dia, num curso a ser realizado no Quinto Colóquio Brasileiro de Matemática (veja Notas de Matemática no. 30).

BIBLIOGRAFIA (*)

- E. T. BELL, *The Development of Mathematics*. McGraw-Hill Book Co., New York — London, 1945.
- N. BOURBAKI, *Éléments d'histoire des mathématiques*. Hermann, Paris, 1960.
- P. DURY, *La vie d'Évariste Galois*. Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure, 3^{ème} série, vol. 13, pg. 197-266 (1896).
- J. E. HOFMANN, *Geschichte der Mathematik. I-III*. Sammlung Götschen. Berlin 1953-57.
- F. KLEIN, *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert*. I. Chelsea Publishing Co., New York, 1950.
- D. J. STRICK, *A concise History of Mathematics*. 2nd revised edition. Dover Publications, New York, 1948.

(*) Esta lista contém somente as obras históricas que foram consultadas pelo autor.

A Redacção está a organizar o número 100
da «Gazeta de Matemática»

Leitor: Dê-lhe o seu concurso.

RELATÓRIO REVISTO SOBRE A LINGUAGEM ALGORÍTMICA ALGOL 60

Descrição da linguagem de Referência

(Conclusão)

3. Expressões.

Na linguagem, os componentes principais dos programas que descrevem processos algorítmicos são expressões *aritméticas*, *booleanas* e *designatórias*. Os elementos destas expressões, com excepção de certos limitadores, são valores lógicos, números, variáveis, indicadores de função, operações de relação, operadores aritméticos, lógicos e sequenciais. Como a definição sintática das variáveis e dos indicadores de função contém expressões, a definição de expressões e dos seus componentes é necessariamente recursiva.

$\langle \text{expressão} \rangle ::=$
 $\langle \text{expressão aritmética} \rangle |$
 $\langle \text{expressão booleana} \rangle |$
 $\langle \text{expressão designatória} \rangle$

3.1. Variáveis.

3.1.1. Sintaxe.

$\langle \text{identificador de variável} \rangle ::=$
 $\langle \text{identificador} \rangle$
 $\langle \text{variável simples} \rangle ::=$
 $\langle \text{identificador de variável} \rangle$
 $\langle \text{expressão em índice} \rangle ::=$
 $\langle \text{expressão aritmética} \rangle$
 $\langle \text{lista de índices} \rangle ::=$
 $\langle \text{expressão em índice} \rangle |$
 $\langle \text{lista de índices} \rangle ,$
 $\langle \text{expressões em índice} \rangle$

$\langle \text{identificador de tabela} \rangle ::=$
 $\langle \text{identificador} \rangle$
 $\langle \text{variável indiciada} \rangle ::=$
 $\langle \text{identificador de tabela} \rangle$
 $[\langle \text{lista de índices} \rangle]$
 $\langle \text{variável} \rangle ::= \langle \text{variável simples} \rangle |$
 $\langle \text{variável indiciada} \rangle$

3.1.2. Exemplos.

ϵ
 $\text{det } A$
 a
 17
 $Q[7,2]$
 $x[\text{sen}(n \times \pi/2), Q[3, n, 4]]$

3.1.3. Semântica.

Uma variável é uma designação dada a um valor único. Este valor pode ser utilizado em expressões para formar outros valores e pode ser alterado à vontade mediante instruções de afectação (cf. 4.2.). O tipo de valor de uma variável particular é definido na declaração relativa a esta própria variável (cf. 5.1. Declarações de tipo) ou no identificador de tabela correspondente (cf. 5.2. Declarações de tabela).

3.1.4. Índices.

3.1.4.1. As variáveis indiciadas designam valores que são componentes de tabelas a

várias dimensões (cf. 5. 2. Declarações de tabela). Cada expressão aritmética numa lista de índices ocupa uma posição de índice de uma variável indiciada e tem o nome de *índice*. A lista completa dos índices está contida nos parêntesis de índices []. A componente da tabela à qual a variável indiciada se refere é determinada pelo verdadeiro valor numérico dos seus índices (cf. 3. 3. Expressões aritméticas).

3. 1. 4. 2. Todo o índice actua como uma variável do tipo *inteiro* e a atribuição de um valor a este índice equivale a uma afectação a essa variável fictícia (cf. 4. 2. 4.). O valor da variável indiciada é definido apenas no caso do valor do índice estar compreendido entre os limites dos índices da tabela (cf. 5. 2. Declarações de tabela).

3. 2. Indicadores de função.

3. 2. 1. Sintaxe.

< identificador de procedimento > ::= =
 < identificador >
 < parâmetro efectivo > ::= =
 < cadeia > | < expressão > |
 < identificador de tabela > |
 < identificador de comutação > |
 < identificador de procedimento >
 < cadeia de letras > ::= < letra > |
 < cadeia de letras > < letra >
 < limitador de parâmetros > ::= = , |
 { < cadeia de letras > : }
 < lista de parâmetros efectivos > ::= =
 < parâmetro efectivo > |
 < lista de parâmetros efectivos >
 < limitador de parâmetros >
 < parâmetro efectivo >
 < parte de parâmetro efectivo > ::= =
 < vazio > |
 { < lista de parâmetros efectivos > }
 < indicador de função > ::= =

< indicador de procedimento >
 < parte de parâmetro efectivo >

3. 2. 2. Exemplos.

sen {a — b}
 J {v + s, n}
 R
 S {s — 5} Temperatura: {T} Pressão: {P}
 compor {': = '} Feixe: {Q}

3. 2. 3. Semântica.

Os indicadores de função definem valores simples, numéricos ou lógicos, que resultam da aplicação dum conjunto determinado de regras dadas por uma declaração de procedimento (cf. 5. 4. Declarações de procedimento) a determinados conjuntos de parâmetros efectivos. Em 4. 7. (Instruções de procedimento), são dadas as regras que determinam as especificações dos parâmetros efectivos. Toda a declaração de procedimento não define obrigatoriamente o valor de um indicador de função.

3. 2. 4. Funções padrão.

Podemos reservar certos indicadores para as funções padrão da análise que deverão exprimir-se sob a forma de procedimento. Recomenda-se a lista seguinte:

abs {E} para o módulo (valor absoluto) do valor da expressão E
 sign {E} para o sinal do valor de E
 (+1 para $E > 0$, 0 para $E = 0$, —1 para $E < 0$)
 sqrt {E} para a raiz quadrada do valor de E
 sin {E} para o seno do valor de E
 cos {E} para o coseno do valor de E
 arctan {E} para o valor principal do arco-tangente do valor E

$\ln \{E\}$ para o logaritmo neperiano do valor de E

$\exp \{E\}$ para a função exponencial do valor de $E(e^E)$.

Considera-se que estas funções operam indiferentemente sobre argumento do tipo *real* ou *inteiro*. Elas fornecem todos os valores do tipo *real* excepto para $\text{sign } \{E\}$ que possui valores do tipo *inteiro*. Numa representação particular, estas funções podem ser directamente disponíveis sem declaração explícita (cf. 5. Declarações).

3. 2. 5. Funções de transferência.

Podemos definir funções de transferência entre qualquer par de quantidades ou de expressões. Entre as funções padrão, recomenda-se particularmente: *inteiro* $\{E\}$, que «transfere» uma expressão do tipo *real* para outra do tipo *inteiro*, afectando-a do valor que é o maior inteiro, menor ou igual ao valor de E .

3. 3. Expressões aritméticas.

3. 3. 1. Sintaxe.

$\langle \text{operador aditivo} \rangle ::= + \mid -$
 $\langle \text{operador multiplicativo} \rangle ::= \times \mid / \mid :$
 $\langle \text{primário aritmético} \rangle ::=$
 $\quad \langle \text{número sem sinal} \rangle \mid \langle \text{variável} \rangle \mid$
 $\quad \langle \text{indicador de função} \rangle \mid$
 $\quad \{ \langle \text{expressão aritmética} \rangle \}$
 $\langle \text{factor} \rangle ::= \langle \text{primário aritmético} \rangle \mid$
 $\quad \langle \text{factor} \rangle \uparrow \langle \text{primário aritmético} \rangle$
 $\langle \text{termo} \rangle ::= \langle \text{factor} \rangle \mid$
 $\quad \langle \text{termo} \rangle \langle \text{operador multiplicativo} \rangle$
 $\quad \langle \text{factor} \rangle$
 $\langle \text{expressão aritmética simples} \rangle ::=$
 $\quad \langle \text{termo} \rangle \mid$
 $\quad \langle \text{operador aditivo} \rangle \langle \text{termo} \rangle \mid$
 $\quad \langle \text{expressão aritmética simples} \rangle$
 $\quad \langle \text{operador aditivo} \rangle \langle \text{termo} \rangle$

$\langle \text{proposição se} \rangle ::=$
 $\quad \text{se } \langle \text{expressão booleana} \rangle \text{ então}$
 $\langle \text{expressão aritmética} \rangle ::=$
 $\quad \langle \text{expressão aritmética simples} \rangle \mid$
 $\quad \langle \text{proposição se} \rangle$
 $\quad \langle \text{expressão aritmética simples} \rangle$
 $\text{senão } \langle \text{expressão aritmética} \rangle$

3. 3. 2. Exemplos.

Primários aritméticos

$7.394_{10} - 8$
soma
 $w \ i + 2, 8]$
 $\cos \{ y + z \times 3 \}$
 $\{ a - 3/y + v u \uparrow 8 \}$

Factores

omega
soma $\uparrow \cos \{ y + z \times 3 \}$
 $7.394_{10} - 8 \uparrow w [i + 2, 8] \uparrow$
 $\{ a - 3/y + v u \uparrow 8 \}$

Termos

U
 $\text{omega} \times \text{soma} \uparrow \cos \{ y + z \times 3 \} / 7.394_{10} -$
 $8 \uparrow w [i + 2, 8] \uparrow \{ a - 3/y + v u \uparrow 8 \}$

Expressões aritméticas simples

$U - Y u + \text{omega} \times \text{sum} \uparrow \cos \{ y + z \times 3 \} /$
 $7.394_{10} - 8 \uparrow w [i + 2, 8] \uparrow \{ a - 3/y +$
 $+ v u \uparrow 8 \}$

Expressões aritméticas

$w \times u - Q \{ S + C u \} \uparrow 2$
se $q > 0$ então $S + 3 \times Q / A$ senão
 $2 \times S + 3 \times Q$
se $a < 0$ então $U + V$ senão se $a \times b > 17$
então U / V senão se $k \neq y$ então V / U
senão 0
 $a \times \sin \{ \text{omega} \times t \}$

$$0.57_{10} 12 \times a [N \times (N - 1) / 2, 0]$$

$$\{A \times \arctan |y| + Z\} \uparrow \{7 + Q\}$$

se q então $n - 1$ senão n

se $a < 0$ então A/B senão se $b = 0$ então B/A senão z

3. 3. 3. Semântica.

Uma expressão aritmética é uma regra para o cálculo dum valor numérico. Quando se trata de expressões aritméticas simples, obtém-se este valor executando as operações aritméticas indicadas sobre os valores numéricos efectivos dos primários aritméticos da expressão (como se indica com pormenor em 3. 3. 4.). No caso de números o valor numérico efectivo dum primário aritmético é evidente.

Para as variáveis trata-se do valor corrente (sentido dinâmico), e para os indicadores de função trata-se do valor proveniente da aplicação das regras de cálculo definidas pelo processo aplicado (cf. 5. 4 4. Valor dos indicadores de função) aos valores correntes dos parâmetros de procedimento definidos na expressão. Enfim, para as expressões aritméticas entre parêntesis, deve exprimir-se o seu valor pelo método recursivo em função dos valores dos primários aritméticos das três outras categorias.

Nas expressões aritméticas mais gerais, que compreendem proposições se, de entre todas as diversas expressões aritméticas simples apenas uma se escolhe em função dos valores actuais das expressões booleanas (cf. 3. 4. Expressões booleanas). Esta escolha faz-se, na realidade, da seguinte maneira: as expressões booleanas das proposições se são avaliadas uma a uma, em sequência, da esquerda para a direita, até à obtenção de um valor verdadeiro. O valor da expressão aritmética é então o valor da primeira expressão aritmética que segue esta expressão booleana (entende-se por isto, a maior

expressão aritmética que se encontra no local considerado).

A construção:

senão < expressão aritmética simples >

é equivalente à construção

senão se verdadeiro então < expressão aritmética simples >

3. 3. 4. Operadores e Tipos.

Exceptuando-se as expressões booleanas das proposições se, os constituintes das expressões aritméticas simples devem ser do tipo *real* ou *inteiro* (cf. 5. 1. Declarações de tipo). O significado dos operadores de base e os tipos das expressões aos quais eles conduzem, obedecem às regras seguintes:

3. 3. 4. 1. As operações $+$, $-$, $\times$, têm o sentido usual de adição, de subtracção ou de multiplicação.

O tipo da expressão será *inteiro*, se os dois operandos são do tipo *inteiro*. Em todos os outros casos será *real*.

3. 3. 4. 2. As operações $< \text{termo} > / < \text{factor} >$ e $< \text{termo} > \div < \text{factor} >$ representam a divisão como multiplicação do termo pelo inverso do factor segundo as regras de de prioridade definidas em 3. 3. 5. Assim, por exemplo

$$a/b \times 7 / \{p - q\} \times v/s$$

significa

$$\{ \{ \{ a \times \{ b^{-1} \} \times 7 \} + \{ \{ p - q \}^{-1} \} \times v \} \times \{ s^{-1} \} \}$$

O operador $/$ é definido para as quatro combinações possíveis dos tipos *real* e *inteiro* e fornece um resultado do tipo *real* em todos os casos. O operador $\div$ é definido apenas para os dois operadores do tipo *inteiro* e fornece um resultado do tipo *inteiro*, definido da maneira seguinte:

$$a \div b = \text{sign } \{a/b\} \times \text{inteiro } \{ \text{abs } \{a/b\} \}$$

(cf. 3. 2. 4. e 3. 2. 5.).

3. 3. 4. 3. A operação $\langle \text{factor} \rangle \uparrow \langle \text{primário aritmético} \rangle$ representa a elevação à potência de que o factor é a base e o primário aritmético o expoente. Assim, por exemplo:

$$2 \uparrow n \uparrow k \text{ significa } (2^n)^k$$

enquanto que

$$2 \uparrow (n \uparrow m) \text{ significa } 2^{(n^m)}$$

Designando por i um número do tipo *inteiro*, por r um número no tipo *real*, e por a um número que é do tipo, ou *inteiro* ou *real*, o resultado obtém-se por meio das regras seguintes:

$a \uparrow i$ se $i > 0$, $a \times a \times \dots \times a$ (i vezes)
do mesmo tipo que a

se $i = 0$, se $a \neq 0, 1$
do mesmo tipo que a

se $a = 0$,
indefinido

se $i < 0$, se $a \neq 0, 1 / \{a \times a \times \dots \times a\}$
(o denominador tem $-i$ factores do tipo *real*)

se $a = 0$,
indefinido

$a \uparrow r$ se $a > 0$, $\exp \{r \times \ln \{a\}\}$
do tipo *real*

se $a = 0$, se $r > 0$, 0
do tipo *real*

$r < 0$:
indefinido

se $a < 0$
sempre indefinido

3. 3. 5. Prioridade dos operadores

A sequência das operações contidas numa expressão faz-se, em geral, da esquerda para a direita. Convém no entanto ter em consideração as seguintes regras adicionais:

3. 3. 5. 1. São válidas as seguintes regras de prioridade (de acordo com as regras de sintaxe enunciadas em 3. 3. 1.)

primeiro	$\uparrow$
segundo	$\times / \div$
terceiro	$+ -$

3. 3. 5. 2. As expressões contidas entre parêntesis são calculadas em separado e os seus valores são utilizados na sequência dos cálculos.

Consequentemente pode sempre escolher-se a ordem de execução das operações por conveniente disposição dos parêntesis.

3. 3. 6. Aritmética das quantidades do tipo *real*

Atribui-se aos números e às variáveis do tipo *real* o sentido da análise numérica, isto é, as entidades são definidas com uma precisão determinada. De modo análogo, admite-se a possibilidade dum desvio do resultado definido matematicamente numa expressão aritmética. Não se faz, porém, especificação aritmética exacta e as diferentes representações máquina poderão avaliar as expressões aritméticas de maneiras diferentes. O controlo das consequências decorrentes de tais diferenças deve ser realizado por métodos de análise numérica. Este controlo deve ser considerado como uma parte do processo descrito e deve portanto poder exprimir-se em termos da própria linguagem.

3. 4. Expressões booleanas

3. 4. 1. Sintaxe

$\langle \text{operador de relação} \rangle ::=$
 $\langle | \langle | = | \rangle | \rangle | \neq$

$\langle \text{relação} \rangle ::=$
 $\langle \text{expressão aritmética simples} \rangle$
 $\langle \text{operador de relação} \rangle$
 $\langle \text{expressão aritmética simples} \rangle$
 $\langle \text{primário booleano} \rangle ::=$
 $\langle \text{valor lógico} \rangle | \langle \text{variável} \rangle |$
 $\langle \text{indicador de função} \rangle |$
 $\langle \text{relação} \rangle | \langle \text{expressão booleana} \rangle \{$
 $\langle \text{secundário booleano} \rangle ::=$
 $\langle \text{primário booleano} \rangle |$
 $\neg \langle \text{primário booleano} \rangle$
 $\langle \text{factor booleano} \rangle ::=$
 $\langle \text{secundário booleano} \rangle |$
 $\langle \text{factor booleano} \rangle \wedge$
 $\langle \text{secundário booleano} \rangle$
 $\langle \text{termo booleano} \rangle ::=$
 $\langle \text{factor booleano} \rangle |$
 $\langle \text{termo booleano} \rangle$
 $\vee \langle \text{factor booleano} \rangle$
 $\langle \text{implicação} \rangle ::=$
 $\langle \text{termo booleano} \rangle |$
 $\langle \text{implicação} \rangle \supset \langle \text{termo booleano} \rangle$
 $\langle \text{Booleano simples} \rangle ::=$
 $\langle \text{implicação} \rangle |$
 $\langle \text{Booleano simples} \rangle \equiv \langle \text{implicação} \rangle$
 $\langle \text{expressão booleana} \rangle ::=$
 $\langle \text{Booleano simples} \rangle |$
 $\langle \text{proposição se} \rangle$
 $\langle \text{Booleano simples} \rangle$
 $\text{senão} \langle \text{expressão booleana} \rangle$

3. 4. 2. Exemplos.

$x = -2$
 $y > \vee z < q$
 $a + b > -5 \wedge z - d > q \uparrow 2$
 $p \wedge q \vee x \neq y$
 $g \equiv \neg a \wedge b \wedge \neg c \vee d \vee e \supset \neg f$
 $\text{se } k < l \text{ então } s > w \text{ senão } h < c$
 $\text{se se se } a \text{ então } b \text{ senão } c \text{ então } d$
 $\text{senão } f \text{ então } g \text{ senão } h < k$

3. 4. 3. Semantica.

Uma expressão booleana é uma regra para o cálculo de um valor lógico. Os princípios de cálculo são inteiramente análogos aos dados pelas expressões aritméticas em 3. 3. 3.

3. 4. 4. Tipos.

As variáveis e os indicadores de função introduzidos como primários booleanos devem ser declarados *booleanos* (cf. 5. 1. Declarações de tipo e 5. 4. 4. Valores dos indicadores de função).

3. 4. 5. Os operadores.

As relações tomam o valor *verdadeiro* sempre que a relação correspondente seja satisfeita para as expressões nela contidas; caso contrário toma o valor *falso*.

O significado dos operadores lógicos $\neg$ (não), $\wedge$ (e), $\vee$ (ou), $\supset$ (implica), $\equiv$ (equivalente), é dado pela seguinte tabela de valores⁽¹⁾.

$b1$	f	f	v	v
$b2$	f	v	f	v
$\neg b1$	v	v	f	f
$b1 \wedge b2$	f	f	f	v
$b1 \vee b2$	f	v	v	v
$b1 \supset b2$	v	v	f	v
$b1 \equiv b2$	v	f	f	v

3. 4. 6. Prioridade dos operadores.

A sequência de operações numa expressão processa-se geralmente da esquerda para a direita, com as seguintes regras adicionais:

3. 4. 6. 1. Adoptam-se as seguintes regras de prioridade (de acordo com as regras de sintaxe enunciadas em 3. 4. 1.).

⁽¹⁾ v significa verdadeiro
 f significa falso

primeiro	expressão aritmética
segundo	segundo 3. 3. 5.
terceiro	$< < = > > \neq$
quarto	$\neg$
quinto	$\wedge$
sexto	$\vee$
sétimo	$\supset$
	$\equiv$

3. 4. 6. 2. A utilização dos parentesis deve entender-se no mesmo sentido que em 3. 3. 5. 2.

3. 5. Expressões de designação.

3. 5. 1. Sintaxe.

$\langle \text{etiqueta} \rangle ::=$
 $\langle \text{identificador} \rangle \mid \langle \text{inteiro sem sinal} \rangle$
 $\langle \text{identificador de comutação} \rangle ::=$
 $\langle \text{identificador} \rangle$
 $\langle \text{indicador de comutação} \rangle ::=$
 $\langle \text{identificador de comutação} \rangle$
 $[\langle \text{expressão em índice} \rangle]$
 $\langle \text{expressão de designação simples} \rangle ::=$
 $\langle \text{etiqueta} \rangle \mid$
 $\langle \text{indicador de comutação} \rangle \mid$
 $\mid \langle \text{expressão de designação} \rangle \mid$
 $\langle \text{expressão de designação} \rangle ::=$
 $\langle \text{expressão de designação simples} \rangle \mid$
 $\langle \text{proposição se} \rangle$
 $\langle \text{expressão de designação simples} \rangle$
 $\text{senão} \langle \text{expressão de designação} \rangle$

3. 5. 2. Exemplos.

17

p9

escolher $[n - 1]$

cidade $[\text{se } y < 0 \text{ então } N \text{ senão } N + 1]$

se $Ab < c$ então 17 senão q $[\text{se } w < 0$
 então 2 senão n]

3. 5. 3. Semântica.

Uma expressão de designação é uma regra para obter a etiqueta duma instrução (cf. 4. Instruções). O princípio de avaliação é inteiramente análogo ao que respeita as expressões aritméticas (cf. 3. 3. 3.). No caso geral, as expressões booleanas das proposições se selecionarão uma expressão de designação simples. Se esta é uma etiqueta o resultado que se pretende é imediatamente determinado. Um indicador de comutação refere-se à correspondente declaração de comutação (cf. 5. 3. Declaração de comutação); de acordo com o valor numérico efectivo da sua expressão em índice, ele seleciona uma das expressões de designação que figuram na declaração de comutação, por meio de uma contagem feita da esquerda para a direita. Como a expressão de designação assim escolhida pode ainda ser um indicador de comutação, esta avaliação é evidentemente um processo recursivo.

3. 5. 4. A expressão em índice.

A avaliação da expressão em índice é análoga à das variáveis indicadas (cf. 3. 1. 4. 2.). O valor de um indicador de comutação é definido apenas no caso de a expressão em índice possuir um dos valores positivos $1, 2, 3, \dots, n$, em que n é o número de entradas da lista de comutação.

3. 5. 5. Etiquetas representadas por números sem sinal.

Estas etiquetas têm a seguinte propriedade: os zeros à esquerda não intervêm no seu significado. Por exemplo 00217 representa a mesma etiqueta que 217.

4. Instruções.

As ordens elementares da linguagem têm o nome de *instruções*. São geralmente executadas em sequência pela ordem por que são escritas. Esta sequência pode, porém, ser interrompida por instruções *ir a* que definam explicitamente os seus sucessores e por instruções condicionais que possibilitam o salto de certas instruções.

As instruções podem ser providas de etiquetas a fim de se poder definir a sequência de sucessão dinâmica.

A definição duma instrução deve ser necessariamente recursiva para que a sequência de instruções possam grupar-se em instruções compostas e blocos. Mas como as declarações, definidas em 5, figuram de uma maneira fundamental na estrutura sintática, a definição sintática das instruções deve supor as declarações já definidas.

4.1. Instruções compostas e blocos.

4.1.1. Sintaxe.

$\langle \text{instrução não etiquetada de base} \rangle ::=$
 $\langle \text{instrução de afectação} \rangle |$
 $\langle \text{instrução ir a} \rangle | \langle \text{instrução vazia} \rangle |$
 $\langle \text{instrução de procedimento} \rangle$
 $\langle \text{instrução de base} \rangle ::=$
 $\langle \text{instrução não etiquetada de base} \rangle |$
 $\langle \text{etiqueta} \rangle : \langle \text{instrução de base} \rangle$
 $\langle \text{instrução incondicional} \rangle ::=$
 $\langle \text{instrução de base} \rangle |$
 $\langle \text{instrução composta} \rangle | \langle \text{bloco} \rangle$
 $\langle \text{instrução} \rangle ::=$
 $\langle \text{instrução incondicional} \rangle |$
 $\langle \text{instrução condicional} \rangle |$
 $\langle \text{instrução para} \rangle$
 $\langle \text{fim de instrução composta} \rangle ::=$
 $\langle \text{instrução} \rangle \text{ fim} | \langle \text{instrução} \rangle ;$
 $\langle \text{fim de instrução composta} \rangle$
 $\langle \text{cabeça de bloco} \rangle ::= \text{começo}$

$\langle \text{declaração} \rangle | \langle \text{cabeça de bloco} \rangle ;$
 $\langle \text{declaração} \rangle$
 $\langle \text{composta não etiquetada} \rangle ::=$
 $\text{começo} \langle \text{fim de instrução composta} \rangle$
 $\langle \text{bloco não etiquetado} \rangle ::=$
 $\langle \text{cabeça de bloco} \rangle ;$
 $\langle \text{fim de instrução composta} \rangle$
 $\langle \text{instrução composta} \rangle ::=$
 $\langle \text{composta não etiquetada} \rangle |$
 $\langle \text{etiqueta} \rangle : \langle \text{instrução composta} \rangle$
 $\langle \text{bloco} \rangle ::= \langle \text{bloco não etiquetado} \rangle |$
 $\langle \text{etiqueta} \rangle : \langle \text{bloco} \rangle$
 $\langle \text{programa} \rangle ::= \langle \text{bloco} \rangle |$
 $\langle \text{instrução composta} \rangle$

Esta sintaxe pode exemplificar-se como segue: representemos por *I*, *D* e *E* respectivamente instruções, declarações e etiquetas arbitrárias; as unidades sintáticas de base tomam então as formas

Instrução composta

$E : E : \dots \text{começo } I ; I ; \dots I ; I \text{ fim}$

Bloco

$E : E : \dots \text{começo } D ; D ; \dots D ; I ; I ; \dots I ; I \text{ fim}$

Não deve esquecer-se que cada instrução *I* pode por seu lado ser uma instrução composta ou um bloco.

4.1.2. Exemplos.

Instruções de base

$a := p + q$

ir a Nápoles

Partida: Contínua: $W := 7.993$

Instrução composta

começo $x := 0$; para $y := 1$ passo 1 até n
 fazer $x := x + A[y]$;

se $x > q$ então ir a *Final* senão se $x < w - 2$
então ir a *S*
Aw: St: W: = $x + bob$ fim

Bloco

Q: começo inteiro i, k ; real w ;
para $i := 1$ passo 1 até m fazer
para $k := i + 1$ passo 1 até m fazer
começo $w := A[i, k]$
 $A[i, k] := A[k, i]$
 $A[k, i] := w$ fim para i e k
fim bloco Q

4. 1. 3. Semântica.

Cada bloco introduz automaticamente um novo nível de nomenclatura. Tal processa-se como segue: todo o identificador que figure no interior do bloco pode, por conveniente declaração (cf. 5. Declarações) ser classificado de local para o bloco em questão. Isto significa que

(a) a quantidade representada por este identificador no interior do bloco não tem existência fora dele e

(b) qualquer quantidade representada por este identificador fora do bloco é completamente inacessível ao interior dele.

Os identificadores (excepto os que representam etiquetas) que figuram num bloco e que não são declarados neste bloco, serão não locais para ele, isto é, representarão a mesma quantidade no interior do bloco e ao nível que lhe é imediatamente exterior. Uma etiqueta separada de uma instrução pelo símbolo : isto é, etiquetando esta instrução, comporta-se como se tivesse sido declarada na cabeça do menor bloco que a contém, isto é, o menor bloco cujos parêntesis começo e fim confinam a instrução. Neste sentido, um corpo de procedimento deve ser considerado como se estivesse confinado pelos símbolos começo e fim e tratado como um bloco.

Como uma instrução dum bloco pode de novo e por sua vez ser um bloco, os conceitos «local» e «não-local» para um bloco devem ser compreendidos recursivamente. Assim, um identificador que seja não-local para um bloco A , pode ser ou não ser não-local para o bloco B no qual A é uma instrução.

4. 2. Instruções de afectação.

4. 2. 1. Sintaxe.

$\langle \text{parte esquerda} \rangle ::= \langle \text{variável} \rangle := |$
 $\langle \text{identificador de procedimento} \rangle :=$
 $\langle \text{lista de partes esquerdas} \rangle ::=$
 $\langle \text{parte esquerda} \rangle |$
 $\langle \text{lista de partes esquerdas} \rangle$
 $\langle \text{parte esquerda} \rangle$
 $\langle \text{instrução de afectação} \rangle ::=$
 $\langle \text{lista de partes esquerdas} \rangle$
 $\langle \text{expressão aritmética} \rangle |$
 $\langle \text{lista de partes esquerdas} \rangle$
 $\langle \text{expressão booleana} \rangle$

4. 2. 2. Exemplos.

$s := q[0] := n := n + 1 + s$
 $n := n + 1$
 $A := B/C - v - q \times S$
 $S[v, k + 2] := 3 - \arctan \{s \times \text{zeta}\}$
 $V := Q > Y \wedge Z$

4. 2. 3. Semântica.

As instruções de afectação servem para dar o valor duma expressão a uma ou mais variáveis ou identificadores de procedimento. No caso geral, a instrução será interpretada em três fases como segue:

4. 2. 3. 1. Todas as expressões em índice que figuram nas variáveis da parte esquerda, são avaliadas sucessivamente da esquerda para a direita.

4. 2. 3. 2. A expressão à direita da instrução é calculada.

4. 2. 3. 3. O valor da expressão é atribuído a todas as variáveis da parte esquerda, e os índices tem os valores calculados em 4. 2. 3. 1.

4. 2. 4. Tipos.

Todas as variáveis e identificadores de procedimento numa lista de partes esquerdas devem ser declarados do mesmo tipo. Se as variáveis são do tipo *Booleano*, a expressão deve ser ela própria booleana. Se as variáveis são do tipo *real* ou *inteiro*, a expressão deve ser aritmética. Se o tipo da expressão aritmética difere do das variáveis e identificadores de procedimento, a mudança de tipo realiza-se automaticamente. Para a transferência do tipo *real* para o tipo *inteiro*, a função de transferência deve conduzir a um resultado equivalente a

$$\text{inteiro } \{E + 0.5\}$$

em que E é o valor da expressão. O tipo associado a um identificador de procedimento é dado pelo declarador que aparece como primeiro símbolo da declaração de procedimento correspondente.

4. 3. Instruções *Ir a*.

4. 3. 1. Sintaxe.

$\langle \text{instrução } \textit{ir a} \rangle ::=$
 $\textit{ir a} \langle \text{expressão de designação} \rangle$

4. 3. 2. Exemplos.

ir a 8

ir a saída $[n + 1]$

ir a cidade $[\text{se } y < 0 \text{ então } N \text{ senão } N+1]$

ir a se $A b < c \text{ então } 17 \text{ senão } q [\text{se } w < 0 \text{ então } 2 \text{ senão } n]$

4. 3. 3. Semântica.

Uma instrução *ir a* interrompe a sequência normal das operações, definida pela ordem de escrita das instruções, definindo o seu sucessor explicitamente por meio do valor duma expressão de designação. A instrução seguinte a executar será a que tem por etiqueta o valor desta expressão.

4. 3. 4. Restrição.

Como as etiquetas são inerentemente locais, uma instrução *ir a* não pode conduzir do exterior ao interior dum bloco. Uma instrução *ir a* pode, porém, conduzir do exterior ao interior de uma instrução composta.

4. 3. 5. *ir a* indicador de comutação não definido.

Uma instrução *ir a* é equivalente a uma instrução vazia se a expressão de designação é indicador de comutação cujo valor não está definido.

4. 4. Instruções vazias.

4. 4. 1. Sintaxe.

$\langle \text{instrução vazia} \rangle ::= \langle \text{vazio} \rangle$

4. 4. 2. Exemplos.

$L : \text{começo} \dots ; \text{Jose} : \text{fim}$

4. 4. 3. Semântica.

Uma instrução vazia não executa nada. Pode servir para colocar uma etiqueta.

4. 5. Instruções condicionais.

4. 5. 1. Sintaxe

$\langle \text{proposição se} \rangle ::=$
 $\text{se} \langle \text{expressão booleana} \rangle \text{ então}$

$\langle \text{instrução incondicional} \rangle ::=$
 $\langle \text{instrução de base} \rangle |$
 $\langle \text{instrução composta} \rangle | \langle \text{bloco} \rangle$
 $\langle \text{instrução se} \rangle ::= \langle \text{proposição se} \rangle$
 $\langle \text{instrução incondicional} \rangle$
 $\langle \text{instrução condicional} \rangle ::=$
 $\langle \text{instrução se} \rangle | \langle \text{instrução se} \rangle$
 $\text{senão} \langle \text{instrução} \rangle |$
 $\langle \text{proposição se} \rangle \langle \text{instrução para} \rangle |$
 $\langle \text{etiqueta} \rangle :$
 $\langle \text{instrução condicional} \rangle$

4. 5. 2. Exemplos.

Se $x > 0$ então $n := n + 1$
 se $v > u$ então $V: q := n + m$ senão ir a R
 se $s < 0 < P < Q$ então AA : começo se
 $q < v$ então $a := v/s$
 senão $y := 2 \times a$ e senão se $v > x$
 então $a := v - q$
 senão se $v > s - 1$ então ir a S

4. 5. 3. Semântica.

As instruções condicionais provocam a execução ou o salto de certas instruções de acordo com os valores das expressões booleanas especificadas.

4. 5. 3. 1. Instrução se.

A instrução incondicional de uma instrução se será executada se a expressão booleana da proposição se é verdadeira. Caso contrário, ela será saltada, passando-se à instrução seguinte.

4. 5. 3. 2. Instrução condicional.

Quanto à sintaxe, há duas formas possíveis de instruções condicionais, que podem ser representadas como segue:

Se B1 então S1 senão se B2 então S2
senão S3; S4

e

Se B1 então S1 senão se B2 então S2
senão se B3 então S3; S4

Aqui B1 a B3 são expressões booleanas, S1 a S3 instruções incondicionais. S4 é a instrução que segue a instrução condicional completa.

A execução duma instrução condicional pode descrever-se como segue: as expressões booleanas das proposições se são avaliadas uma a seguir à outra em sequência da esquerda para a direita até a obtenção de uma, cujo valor é verdadeiro. Então a instrução incondicional que segue esta expressão booleana é executada. A menos que esta instrução defina o seu sucessor explicitamente, a próxima instrução a ser executada será S4, quer dizer a instrução que segue a instrução condicional. Assim, pode dizer-se que o efeito do limitador senão é o de dar como sucessor à instrução que segue, a instrução que segue a instrução condicional inteira.

A construção

senão $\langle \text{instrução incondicional} \rangle$

pode ser substituída por

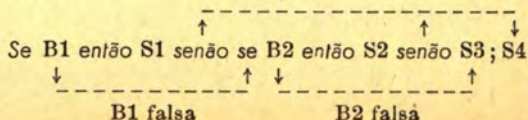
senão se verdadeiro então

$\langle \text{instrução incondicional} \rangle$

que lhe é equivalente.

Se nenhuma das expressões booleanas das proposições se é verdadeira o efeito da instrução condicional completa será o de uma instrução vazia.

Para maior clareza, pode ser útil o esquema seguinte:



4.5.4. Ir a instrução condicional.

O efeito de uma inscrição *ir a* que conduza ao interior de uma instrução condicional, resulta directamente da explicação anterior do efeito de *senão*.

4.6. Instrução para.

4.6.1. Sintaxe.

$\langle \text{elemento numa lista de para} \rangle ::=$
 $\langle \text{expressão aritmética} \rangle \mid$
 $\langle \text{expressão aritmética} \rangle \text{ passo}$
 $\langle \text{expressão aritmética} \rangle \text{ até}$
 $\langle \text{expressão aritmética} \rangle \mid$
 $\langle \text{expressão aritmética} \rangle \text{ enquanto que}$
 $\langle \text{expressão booleana} \rangle$
 $\langle \text{lista de para} \rangle ::=$
 $\langle \text{elemento numa lista de para} \rangle \mid$
 $\langle \text{lista de para} \rangle ,$
 $\langle \text{elemento de uma lista de para} \rangle$
 $\langle \text{proposição para} \rangle ::= \text{para}$
 $\langle \text{variável} \rangle :=$
 $\langle \text{lista de para} \rangle \text{ fazer}$
 $\langle \text{instrução para} \rangle ::=$
 $\langle \text{proposição para} \rangle \langle \text{instrução} \rangle \mid$
 $\langle \text{etiqueta} \rangle : \langle \text{instrução para} \rangle$

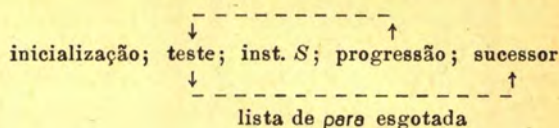
4.6.2. Exemplos.

para $q := 1$ passo s até n fazer $A[q] := B[q]$
 para $k := 1, V1 \times 2$ enquanto que $V1 < N$
 fazer para $J := 1 + G, L, 1$ passo 1 até
 $N, C + D$ fazer $A[k, j] := B[k, j]$

4.6.3. Semântica.

Uma proposição *para* provoca a execução repetida de zero ou várias vezes da instrução *S* que lhe sucede. Além disso, dá sequência de valores à variável que controla.

O mecanismo pode ser visualizado pelo esquema seguinte:



Neste esquema, a palavra *inicialização* significa cálculo do primeiro valor da proposição *para*; *progressão* significa: cálculo do valor seguinte da proposição *para*. O teste determina se o valor final foi calculado. Se sim, passa-se ao sucessor da instrução *para*. Se não, é executada a instrução que segue a proposição *para*.

4.6.4. Os elementos numa lista de para.

A lista dá uma regra para obter os valores dados sucessivamente à variável controlada. Esta sucessão de valores obtém-se a partir de elementos da lista tomando estes um por um pela ordem por que são escritos. A sequência dos valores gerados pelas três espécies de elementos numa lista de *para* e a execução correspondente da instrução são descritos pelas regras seguintes:

4.6.4.1. Expressão aritmética.

Este elemento provoca o cálculo dum valor: o valor da expressão aritmética calculada imediatamente antes da execução correspondente da instrução *S*.

4.6.4.2. Elemento com passo e até.

O efeito de um elemento da forma *A passo B até C* em que *A*, *B* e *C* são expressões aritméticas, pode ser descrito de maneira mais concisa em termos de instruções ALGOL como segue:

$V := A;$

$L1 : \text{se } \{V - C\} \times \text{sign } \{B\} < 0 \text{ então ir a elemento esgotado;}$

Instrução S;

$V := V + B$;

ir a L1;

elemento esgotado:...

em que V é a variável controlada da proposição para, e «elemento esgotado» designa ou o cálculo de V de acordo com o elemento que segue na lista de para, ou, a expressão que segue no programa, se o elemento considerado é o último.

4. 6. 4. 3. Elemento com enquanto que.

O efeito de um elemento da forma E enquanto que F , em que E é uma expressão aritmética e F uma expressão booleana, pode ser assim descrito em termos de instrução ALGOL.

L3: $V := E$ e p ;

se $\neg F$ então ir a elemento esgotado.

Instrução S

ir a L3; elemento esgotado:...

com as mesmas notações que em 4. 6. 4. 2.

4. 6. 5. Valor da variável controlada à saída.

Na saída da instrução S (suposta composta) com uma instrução ir a, o valor da variável controlada será aquele imediatamente anterior ao da execução da instrução ir a.

Se a saída se deve ao esgotamento da lista de para, o valor da variável controlada não é definido depois da saída.

4. 6. 6. Ir a condizente a uma instrução para.

O efeito de uma instrução ir a, exterior a uma instrução para, que reenvia a uma etiqueta interior à instrução para, não é definido.

4. 7. Instruções de procedimento.

4. 7. 1. Sintaxe.

$\langle$ parâmetro efectivo $\rangle ::= \langle$ cadeia $\rangle |$
 $\langle$ expressão $\rangle |$

$\langle$ identificador de tabela $\rangle |$
 $\langle$ identificador de comutação $\rangle |$
 $\langle$ identificador de procedimento $\rangle$
 $\langle$ cadeia de letras $\rangle ::= \langle$ letra $\rangle |$
 $\langle$ cadeia de letras $\rangle \langle$ letra $\rangle$
 $\langle$ limitador de parâmetro $\rangle ::= , |$
 $\{ \langle$ cadeia de letras $\rangle : \{$
 $\langle$ lista de parâmetros efectivos $\rangle ::= =$
 $\langle$ parâmetro efectivo $\rangle |$
 $\langle$ lista de parâmetros efectivos $\rangle$
 $\langle$ limitador de parâmetros $\rangle$
 $\langle$ parâmetro efectivo $\rangle$
 $\langle$ parte-parâmetro efectivo $\rangle ::= =$
 $\langle$ vazio $\rangle |$
 $\{ \langle$ lista de parâmetros efectivos $\rangle \{$
 $\langle$ instrução de procedimento $\rangle ::= =$
 $\langle$ identificador de procedimento $\rangle$
 $\langle$ parte-parâmetro efectivo $\rangle$

4. 7. 2. Exemplos.

Norma $\{A\}$ Ordem: $\{7\}$ Resultado em: $\{V\}$
 Transposição $\{W, v + 1\}$
 Maxabs $\{A, N, M, Y, I, K\}$
 Produto escalar $\{A[t, P, u], B[P], IO, P, Y\}$

Estes exemplos correspondem aos exemplos dados em 5. 4. 2.

4. 7. 3. Semântica.

Uma instrução de procedimento tem por objectivo provocar a execução do corpo dum procedimento (cf. 5. 4. Declarações de procedimento). Se o corpo do procedimento é uma instrução escrita em ALGOL, o efeito desta execução será o de efectuar as seguintes operações sobre o programa:

4. 7. 3. 1. Afectação de valor (chamada por valor).

Todos os parâmetros formais presentes na parte valor da cabeça da declara-

ção de procedimento, recebem os valores (cf. 2. 8. Valores e tipos) dos parâmetros efectivos correspondentes, passando-se tudo como se estas afectações de valor fossem efectuadas explicitamente antes de entrar no corpo do procedimento. O efeito produzido é aquele que se obteria com a criação de um bloco suplementar que englobasse o corpo de procedimento e no qual estas afectações seriam feitas a variáveis locais para este bloco fictício, e de tipo em acordo com as especificações (cf. 5. 4. 5.). Como consequência, variáveis chamadas por valor devem ser consideradas como não locais para o corpo de procedimento, mas locais para o bloco fictício (cf. 5. 4. 3.).

4. 7. 3. 2. *Substituição do nome (chamada por nome).*

Todo o parâmetro formal não presente na parte valor é substituído, em todo o corpo do procedimento, pelo parâmetro efectivo correspondente, depois colocado entre parêntesis deste último sempre onde tal seja sintacticamente possível. Eventuais conflitos entre os identificadores introduzidos por esta substituição e outros identificadores já presentes no corpo de procedimento serão evitados sistematicamente por modificação conveniente dos identificadores formais ou locais contidos no corpo.

4. 7. 3. 3. *Substituição pelo corpo e execução.*

Enfim o corpo de procedimento, assim modificado, é posto à disposição da instrução de procedimento e executado. Se o procedimento é empregado em local que se encontre fora do campo duma quantidade não local do corpo de procedimento os conflitos entre os identificadores introduzidos pelo processo de substituição do corpo e os identificadores cujas declarações são válidas

no local onde se encontra a instrução de procedimento ou o indicador de função, serão evitados por uma alteração sistemática conveniente destes últimos identificadores.

4. 7. 4. *Correspondência parâmetro efectivo — parâmetro formal.*

A correspondência entre os parâmetros efectivos da instrução de procedimento e os parâmetros formais da cabeça do procedimento, faz-se como segue: a lista dos parâmetros efectivos da instrução de procedimento deve ter o mesmo número de elementos que a lista dos parâmetros formais da cabeça da declaração de procedimento. Obtém-se a correspondência tomando os elementos das duas listas na mesma ordem.

4. 7. 5. *Restrições.*

Para que uma instrução de procedimento tenha um sentido, é necessário evidentemente que as operações sobre o corpo de procedimento definidos em 4. 7. 3. 1. e 4. 7. 3. 2. conduzam a uma instrução ALGOL correcta. Isto impõe como restrição que o género e o tipo de cada parâmetro efectivo sejam compatíveis com o género e o tipo do parâmetro formal correspondente. Eis alguns casos particulares importantes desta regra:

4. 7. 5. 1. Se uma cadeia é introduzida como parâmetro efectivo numa instrução de procedimento ou um indicador de função cujo corpo de procedimento seja uma instrução de ALGOL (por oposição a um código não ALGOL, cf. 4. 7. 8.), então esta cadeia não pode ser utilizada no corpo de procedimento a não ser como parâmetro efectivo duma outra chamada de procedimento. Finalmente, ela não pode ser utilizada senão em corpo de procedimento escrito num código não ALGOL.

4.7.5.2. Um parâmetro formal que apareça como variável na parte esquerda duma instrução de afectação e que não é chamado por valor, apenas pode corresponder a um parâmetro efectivo que seja uma variável (caso particular de expressão).

4.7.5.3. Um parâmetro formal, utilizado no corpo do procedimento como identificador de tabela, apenas pode corresponder a um parâmetro efectivo que seja identificador duma tabela da mesma dimensão. Além disso, se o parâmetro formal é chamado por valor, a tabela local criada pelo chamamento terá os mesmos terminais de índice que a tabela efectiva.

4.7.5.4. Um parâmetro formal chamado por valor não pode em geral corresponder a um identificador de comutação ou de procedimento, porque estes últimos não têm valor (a excepção é o identificador de procedimento duma declaração de procedimento que tem uma parte — parâmetros formais vazia (cf. 5.4.1.) e que define o valor dum indicador de função (cf. 5.4.4.). Este identificador de procedimento é em si mesmo uma expressão completa).

4.7.5.5. Todo o parâmetro formal pode comportar restrições sobre o tipo do parâmetro efectivo que lhe é associado (estas restrições podem ser ou não dadas pelas especificações da cabeça de procedimento). Na instrução procedimento, tais restrições devem evidentemente ser observadas.

4.7.6. Suprimido na nova redacção.

4.7.7. *Limitador de parâmetros.*

Todos os limitadores de parâmetros são equivalentes. Nenhuma correspondência entre os limitadores utilizados numa instrução de procedimento e os utilizados na cabeça do

procedimento, é examinada; apenas o seu número deve ser o mesmo. Assim, é facultativa a informação contida na forma elaborada.

4.7.8. *Corpo de procedimento expresso em código.*

As restrições impostas sobre uma instrução de procedimento, chamando um procedimento que tenha o seu corpo escrito num código diferente de ALGOL, dependem evidentemente das características do código utilizado e da intenção do utilizador e cai assim fóra do domínio da linguagem de referência.

5. Declarações.

As declarações servem para definir certas propriedades das quantidades utilizadas no programa. Uma declaração para um identificador é válida para um bloco. No exterior deste bloco o referido identificador pode ser utilizado para outros fins (cf. 4.1.3.).

Dinamicamente isto implica as regras seguintes: no momento de entrada num bloco (por meio de começo, visto que as etiquetas no interior são locais e portanto inacessíveis do exterior), todos os identificadores declarados para o bloco tomam o significado implícito na natureza das declarações dadas. Se estes identificadores já foram definidos por outras declarações do exterior, a partir deste momento tomam novo significado. Por outro lado, os identificadores que não são declarados para um bloco mantêm o seu antigo significado.

No momento da saída dum bloco (por meio de fim ou por uma instrução ir a) todos os identificadores que foram declarados para o bloco perdem de novo o seu significado.

Uma declaração pode ser marcada com o declarador adicional *próprio*. Isto tem o efeito

seguinte: a partir do momento em que se entra de novo no bloco, os valores das quantidades remanescentes (declaradas com *próprio*) permanecerão inalteradas em relação aos que elas tinham à última saída, ao passo que os valores das variáveis declaradas, que não são indicadas remanescentes, ficam indefinidas.

Postos de parte as etiquetas e os parâmetros formais das declarações de procedimento e levando em conta a possível excepção dos identificadores de funções padrão (cf. 3.2.4. e 3.2.5.), todos os identificadores dum programa devem ser declarados. Nenhum identificador pode ser declarado mais que uma vez, em não importa que cabeça de bloco.

Sintaxe.

```
< declaração > ::=
  < declaração de tipo > |
  < declaração de tabela > |
  < declaração de comutação > |
  | < declaração de procedimento >
```

5.1. Declarações de tipo.

5.1.1. Sintaxe.

```
< lista de tipo > ::=
  < variável simples > |
  < variável simples > ,
  < lista de tipo >
< tipo > ::= real | inteiro | Booleano
< declaração de tipo > ::=
  < tipo local ou remanescente >
  < lista de tipo >
< tipo local ou remanescente > ::=
  < tipo > | próprio < tipo >
```

5.1.2. Exemplos.

Inteiro p, q, s
próprio Booleano $Acryl, n$

5.1.3. Semântica.

As declarações de tipo servem para declarar que certos identificadores representam variáveis simples dum dado tipo. As variáveis declaradas reais podem tomar apenas valores positivos e negativos, inclusivé o zero. As variáveis declaradas inteiras podem tomar apenas valores inteiros positivos ou negativos, inclusivé o zero. As variáveis declaradas booleanas podem tomar apenas os valores verdadeiro ou falso.

Nas expressões aritméticas, toda a posição que possa ser ocupada por uma variável declarada real, pode ser ocupada por uma variável declarada inteira. Para a semântica de *própria* ver o quarto parágrafo de 5. Declarações.

5.2. Declaração de tabela.

5.2.1. Sintaxe.

```
< terminal inferior > ::=
  < expressão aritmética >
< terminal superior > ::=
  < expressão aritmética >
< par de terminais > ::=
  < terminal inferior > :
  < terminal superior >
< lista de pares de terminais > ::=
  < pares de terminais > |
  < lista de pares de terminais > ,
  < pares de terminais >
< secção de tabela > ::=
  < identificador de tabela >
  [ < lista de pares de terminais > ]
  < identificador de tabela > ,
  < secção de tabela >
< lista de tabela > ::=
  < secção de tabela > |
  < lista de tabela > ,
  < secção de tabela >
< declaração de tabela > ::=
  tabela < lista de tabela > |
  < tipo local ou remanescente >
  tabela < lista de tabela >
```


5.2.2. Exemplos.

Tabela $a, b, c [7:n, 2:m], s[-2:10]$
 próprio inteiro tabela $A [se\ c < 0\ então\ 2$
 senão $1:20]$
 tabela real $q [-7:-1]$.

5.2.3. Semântica.

Uma declaração de tabela tem por função declarar que um ou vários identificadores representam tabelas de variáveis indicadas e dão as dimensões das tabelas, os terminais dos índices e o tipo das variáveis.

5.2.3.1. Terminais de índices.

Os terminais de índices para as tabelas são dados nos primeiros parêntesis de índices segundo o identificador desta tabela, sob a forma duma lista de pares de terminais.

Cada entidade desta lista dá o terminal superior e o terminal inferior dum índice, sob a forma de duas expressões aritméticas separadas pelo limitador $:$. A lista de pares de terminais, dá os terminais de todos os índices tomados em sequência da esquerda para a direita.

5.2.3.2. Dimensões.

As dimensões são dadas pelo número de elementos nas listas de pares de terminais.

5.2.3.3. Tipos.

Todas as tabelas declaradas numa declaração devem ser do mesmo tipo. Se nenhum declarador de tipo é dado adopta-se o tipo real.

5.2.4. Terminais superiores e inferiores.

5.2.4.1. As expressões correspondentes serão analisadas da mesma maneira que as expressões em índice (cf. 3.1.4.2).

5.2.4.2. As expressões apenas podem depender das variáveis e dos procedimentos que são não locais para o bloco no qual a declaração de tabela é válida. Em consequência, no bloco mais exterior dum programa apenas se podem encontrar declarações de tabela com terminais constantes.

5.2.4.3. Uma tabela é definida apenas quando os valores de todos os terminais superiores de índices não são inferiores aos dos terminais inferiores correspondentes.

5.2.4.4. As expressões serão avaliadas por uma vez em cada entrada no bloco.

5.2.5. Identidade de variáveis indicadas.

A identidade duma variável indicada não tem relação alguma com os terminais de índices dados na declaração de tabela. Mas, mesmo que uma tabela seja declarada remanescente, os valores das variáveis indicadas correspondentes serão, de cada vez, definidos apenas pelos daquelas variáveis que têm índices no interior dos terminais de índices calculados por último.

5.3. Declaração de comutação.

5.3.1. Sintaxe.

```
< lista de comutação > :: =
  < expressão de designação > |
  < lista de comutação > ,
  < expressão de designação >
< declaração de comutação > :: =
  comutador
  < identificador de comutação > . =
  < lista de comutação >
```

5.3.2. Exemplos.

comutador $S := S1, S2, Q[m]$, se $v > -5$
 então $S3$ senão $S4$
 comutador $Q := p1, w$

5.3.3. Semântica.

Uma declaração de comutação define o conjunto de valores correspondentes a um indicador de comutação.

Estes valores são dados um a um como os valores das expressões de designação que compõem a lista de comutação. A cada uma destas expressões de designação está associado um inteiro positivo 1, 2, ... etc., obtido por contagem dos elementos da lista da esquerda para a direita. O valor do indicador de comutação correspondente a um valor dado da expressão em índice (cf. 3.5. Expressão de designação) é o valor da expressão de designação na lista de comutação que tem este valor dado como inteiro associado.

5.3.4. Avaliação das expressões na lista de comutação.

Uma expressão na lista de comutação será avaliada cada vez que se faz referência ao elemento da lista na qual a expressão aparece utilizando os valores correntes de todas as variáveis.

5.3.5. Influência dos campos.

Se um indicador de comutação aparece fora do campo duma quantidade que intervem numa expressão de designação da lista de comutação, e se uma avaliação do indicador de comutação escolhe esta expressão de designação, então os conflitos entre os identificadores das quantidades desta expressão e os identificadores cujas declarações são válidas no local do indicador de comutação serão ultrapassados por uma alteração sistemática conveniente destes últimos identificadores.

5.4. Declarações de procedimento.

5.4.1. Sintaxe.

$\langle \text{parâmetro formal} \rangle ::=$
 $\langle \text{identificador} \rangle$

lista de parâmetros formais $\rangle ::=$
 $\langle \text{parâmetro formal} \rangle |$
 $\langle \text{lista de parâmetros formais} \rangle$
 $\langle \text{limitador de parâmetro} \rangle$
 $\langle \text{parâmetro formal} \rangle$
 $\langle \text{parte-parâmetro formal} \rangle ::=$
 $\langle \text{vazio} \rangle |$
 $\{ \langle \text{lista de parâmetros formais} \rangle \}$
 $\langle \text{lista de identificadores} \rangle ::=$
 $\langle \text{identificador} \rangle |$
 $\langle \text{lista de identificadores} \rangle ,$
 $\langle \text{identificador} \rangle$
 $\langle \text{parte-valor} \rangle ::= \text{valor}$
 $\langle \text{lista de identificadores} \rangle ; | \langle \text{vazio} \rangle$
 $\langle \text{especificador} \rangle ::= \text{cadeia} | \langle \text{tipo} \rangle |$
 $\text{tabela} | \langle \text{tipo} \rangle \text{ tabela etiqueta} |$
 $\text{comutador} | \text{procedimento} | \langle \text{tipo} \rangle$
 procedimento
 $\langle \text{parte-especificação} \rangle ::= \langle \text{vazio} \rangle |$
 $\langle \text{especificador} \rangle$
 $\langle \text{lista de identificadores} \rangle ; |$
 $\langle \text{parte-especificação} \rangle$
 $\langle \text{especificador} \rangle$
 $\langle \text{lista de identificadores} \rangle ;$
 $\langle \text{cabeça de procedimento} \rangle ::=$
 $\langle \text{identificador de procedimento} \rangle$
 $\langle \text{parte de parâmetro formal} \rangle ;$
 $\langle \text{parte-valor} \rangle \langle \text{parte-especificação} \rangle$
 $\langle \text{corpo de procedimento} \rangle ::=$
 $\langle \text{instrução} \rangle | \langle \text{código} \rangle$
 $\langle \text{declaração de procedimento} \rangle ::=$
 procedimento
 $\langle \text{cabeça de procedimento} \rangle$
 $\langle \text{corpo de procedimento} \rangle |$
 $\langle \text{tipo} \rangle \text{ procedimento}$
 $\langle \text{cabeça de procedimento} \rangle$
 $\langle \text{corpo de procedimento} \rangle$

5.4.2. Exemplos (ver também os exemplos no final deste relatório).

procedimento Traço {a} Ordem : {n}
 Resultado : {s} ; valor n ;
 tabela a ; inteiro n ; real s ;
 começo inteiro k ;


```

s := 0;
para k : 1 passo 1 até n fazer s := s + a[k, k]
fim
procedimento transpor {a} ordem : {n};
  valor n; tabela a; inteiro n;
começo real w; inteiro i, k;
para i := 1 passo 1 até n fazer
  para k := 1 + i passo 1 até n fazer
    começo w := a[i, k];
    a[i, k] := a[k, i];
    a[k, i] := w
  fim
fim
fim transpor

```

```

procedimento inteiro passo {u}; real u;
  Passo := se  $0 < u \wedge u < 1$  então 1 senão 0
procedimento absmax {a} dimensão :
  {n, m} resultado : {y} índices : {i, k};
comentário: O maior elemento em valor
absoluto da matriz a de dimensão n sobre
m é transferido em y e os índices deste
elemento em i e k;
tabela a; inteiro n, m, i, k; real y;
começo inteiro p, q;
y := 0;
para p := 1 passo 1 até n fazer para
  q := 1 passo 1 até m fazer
se  $\text{abs}\{a[p, q]\} > y$  então começo
  y :=  $\text{abs}\{a[p, q]\}$ ;
  i := p; k := q fim fim Absmax

```

```

procedimento Produto escalar {a, b}
  Ordem: {k, p} Resultado: {y};
  valor k; inteiro k, p; real y, a, b;
começo real s; s := 0;
  para p := 1 passo 1 até k fazer
    s := s + a  $\times$  b;
  y := s
fim produto escalar

```

5. 4. 3. Semântica.

Uma declaração de procedimento serve para definir o procedimento associado a um identificador de procedimento. O constituinte

principal de uma declaração de procedimento é uma instrução ou um conjunto de códigos, o corpo do procedimento, que pelo emprego de instruções de procedimento e/ou de indicadores de função, pode ser comandado depois de outras partes dum bloco na cabeça do qual aparece a declaração de procedimento. Associado ao corpo, encontra-se uma cabeça que precisa certos identificadores que figuram no corpo na situação de parâmetros formais. Quando o procedimento é activado (cf. 3. 2. Indicadores de função e 4. 7. Instruções de procedimento), os parâmetros formais do corpo de procedimento tomarão os valores dos parâmetros efectivos ou então serão substituídos por estes últimos. Os identificadores do corpo de procedimento que não são formais serão, quer locais quer não-locais para o corpo, segundo tenham sido ou não declarados neste corpo. Entre estes identificadores, os que não são locais para o corpo podem ser locais para o bloco, na cabeça do qual aparece a declaração de procedimento. O corpo de procedimento age sempre como um bloco quer tenha ou não a forma respectiva. Em consequência, o campo de toda a etiqueta actuando uma instrução no corpo ou o próprio corpo em si nunca pode estender-se ao exterior do corpo de procedimento. Além disso, se o identificador dum parâmetro formal é declarado no interior do corpo de procedimento (compreendendo o caso da sua utilização na situação de etiqueta como em 4. 1. 3.) dá-se-lhe um significado local e os parâmetros efectivos correspondentes são inacessíveis no campo desta quantidade local interior.

5. 4. 4. Valores dos indicadores de função.

Para que uma declaração de procedimento defina o valor de um indicador de função, é necessário que no corpo de procedimento apareçam uma ou mais afectações de valor

para o identificador de procedimento. Pelo menos uma destas afectações deve ser efectuada. O tipo associado ao identificador de procedimento deve ser declarado por meio dum declarador de tipo que será o primeiro símbolo da declaração de procedimento. O último valor assim afectado é utilizado para continuar a avaliação da expressão na qual aparece o indicador de função. Toda outra ocorrência do identificador de procedimento no corpo de procedimento em local diferente de uma parte esquerda duma instrução de afectação significa a chamada do procedimento.

5. 4. 5. Especificações.

Pode-se incluir na cabeça uma parte especificação que forneça informações sobre os géneros e tipos dos parâmetros formais por meio de notações evidentes. Nesta parte nenhum parâmetro formal pode aparecer mais que uma vez. As especificações de parâmetros formais chamados por valor devem ser dadas enquanto que as especificações dos parâmetros formais chamados por nome podem ser omissas.

5. 4. 6. Corpo de procedimento em código.

É óbvio que o corpo de procedimento pode exprimir-se numa linguagem diferente do ALGOL. Tal emprego releva uma representação máquina e nenhuma indicação mais precisa relativa a este código pode ser dada na linguagem de referência.

Exemplos de declarações de procedimento.

Exemplo 1.

```
procedure Euler {fct, sum, eps, tim}; value
eps, tim; integer tim;
real procedure fct; real sum, eps;
```

comment: Euler calcula a soma de $fct\{i\}$ desde $i=0$ a $i=\infty$ por meio de uma conveniente transformação de Euler. A adição termina desde que se obtenha para valor absoluto dos termos da série transformada, *tim* vezes consecutivas um valor menor que *eps*. Fornece-se portanto uma função *fct* com 1 só argumento inteiro, um terminal superior *eps* e um inteiro *tim*. A saída é a soma *sum*. Euler é particularmente eficaz no caso de séries alternadas lentamente convergentes ou divergentes;

```
begin integer i, k, n, t; array m[0:15]; real
mn, mp, ds;
i:=n:=t:=0; m[0]:=fct{0}; sum:='m[0]/2;
termo seguinte: i:=i+1; mn:=fct{i};
for k:=0 step 1 until n do
begin mp:={mn+m[k]}/2; m[k]:=mn;
mn:=mp end;
if {abs{mn}<abs{m[n]}} & {n<15} then
begin ds:=mn/2; n:=n+1; m[n]:=mn
end aceita
else ds:=mn;
som:=som+ds;
if abs{ds}<eps then t:=t+1 else t:=0;
if t<tim then go to termo seguinte
end Euler
```

Exemplo 2.

```
procedure RK {x, y, n, FKT, eps, eta, xE, yE, fi};
value x, y; integer n;
Boolean fi; real x, eps, eta, xE; array y, yE;
procedure FKT;
comment: RK integra o sistema
 $y'_k = f_k\{x, y_1, y_2, \dots, y_n\}$   $\{k=1, 2, \dots, n\}$  de
equações diferenciais pelo método de Runge-
Kutta com uma escolha automática do valor
mais conveniente do passo da integração. Os
parâmetros são: os valores iniciais de x e
 $y[k]$  para x e as funções incógnitas  $y_k\{x\}$ .
A ordem n do sistema. O procedimento
FKT  $\{x, y, n, z\}$  que representa o sistema a
integrar, isto é o conjunto das funções  $f_k$ .
```


Os erros admissíveis ϵ e ϵ_0 que coordenam a precisão das integrações numéricas. O fim do intervalo de integração x_E . O parâmetro de saída y_E que representa a solução para $x = x_E$. A variável booleana fi que deve tomar sempre o valor true para uma entrada isolada ou para uma primeira entrada em RK. Mas, se as funções y devem ser determinadas em diferentes pontos $x_0, x_1, x_2, \dots$, então o procedimento pode ser chamado sucessivamente {com $x = x_k$, $x_E = x_{k+1}$, para $k = 0, 1, \dots, n-1$ } e então as chamadas ulteriores poderão aparecer com $fi = \text{false}$ para ganhar tempo de cálculo. Os parâmetros FKT devem ser x, y, n o parâmetro de saída z representa o conjunto das derivadas $z[k] = f_k\{x, y[1], y[2], \dots, y[n]\}$ para x e o valor efectivo de y . Um procedimento comp intervém como identificador não local;

begin

```
array z, y1, y2, y3[1:n]; real x1, x2, x3, H;
  Boole an out;
integer k, j; own real s, Hs;
procedure RK1ST{x, y, h, xE, ye}; real
  x, h, xE; array y, ye;
```

comment: RK1ST integra um passo isolado de Runge-Kutta com va'ores iniciais $x, y[k]$ que conduzam aos parâmetros de saída $x_E = x + h$ e $ye[k]$, sendo o último a solução em x_E .

Importante: os parâmetros n , FKT, z entram em RK1ST como entidades não locais;

begin

```
array w[1:n], a[1:5]; integer k, j;
a[1] := a[2] := a[5] := h/2;
a[3] := a[4] := h;
xe := x;
for k := 1 step 1 until n do ye[k] :=
  w[k] := y[k];
for j := 1 step 1 until 4 do
```

```
  FKT {xe, w, n, z};
  xe := x + a[j];
  for k := 1 step 1 until n do
    begin
      w[k] := y[k] + a[j] * z[k];
      ye[k] := ye[k] + a[j+1] * z[k]/3
    end k
  end j
end RK1ST;
```

Começo do programa.

```
if fi then begin H := xE - x; s := 0
end else H := Hs;
out := false;
AA: if {x + 2.01 * H - xE > 0} = {H > 0} then
  begin Hs := H; out := true; H :=
    {xE - x}/2 end if;
  RK1ST{x, y, 2 * H, x1, y1};
BB: RK1ST{x, y, x2, y2};
  RK1ST{x2, y2, H, x3, y3};
  for k := 1 step 1 until n do
    if comp {y1[k], y3[k], eta} > eps then
      go to CC;
  comment: comp {a, b, c} é um indicador
  de função cujo valor é o valor absoluto
  da diferença das mantissas de a e b uma
  vez que os expoentes destas quantidades
  tenham sido tomados iguais ao maior dos
  expoentes dos parâmetros iniciais dados
  a, b, c;
  x := x3; if out then go to DD;
  for k := 1 step 1 until n do y[k] := y3[k];
  if s = 5 then begin s := 0; H := 2 * H
  end if;
  s := s + 1; go to AA;
CC: H := 0.5 * H; out := false; x1 := x2;
  for k := 1 step 1 until n do y1[k] := y2[k];
  go to BB;
DD: for k := 1 step 1 until n do yE[k] := yE[k]
end RK
```


Índice alfabético das definições dos conceitos e das unidades sintáticas

Todas as referências são dadas por número de secção. As referências são divididas em três grupos:

- def** A seguir à abreviatura *def* indica-se a referência da definição sintática (se ela existe).
sint A seguir à abreviatura *sint* indicam-se as referências das ocorrências em fórmulas metalinguísticas. As referências já mencionadas no grupo *def* não são retomadas.
text A seguir à abreviatura *text* indicam-se as referências das definições dadas no texto.

Os símbolos de base representados por sinais diferentes das letras em futura fina são reunidos no começo. Os exemplos não foram considerados neste índice.

- +, ler: mais
 —, ler: menos
 ×, ler: multiplicação
 /, ÷, ler: divisão
 ↑, ler: exponenciação
 <, <=, >, >=, ≠, ler: <operador de relação>
 ≡, ⊃, ∨, ∧, ¬, ler: <operador lógico>
 ., ler: ponto
 10, ler: dez
 :, ler: dois pontos
 ;, ler: ponto e vírgula
 :=, ler: sinal de afectação
 □, ler: espaço
 {}, ler: parentesis
 [], ler: parentesis de índices
 <>, ler: parentesis de cadeias

- afectação** :=, sint 2.3, 4.2.1, 4.6.1, 5.3.1.
alfabeto, text 2.1.
<algarismo>, def 2.2.1, synt 2, 2.2.4.1, 2.5.1.
aritmético, text 3.3.6.
array, synt 2.3, 5.2.1, 5.4.1.
begin, synt 2.3, 4.1.1.
<bloco>, dif 4.1.1, synt 4.5.1, text 1, 4.1.3, 5.
<bloco não etiquetado>, def 4.1.1.
Boolean, synt 2.3, 5.1.1, text 5.1.3.
<cabeça de bloco>, def 4.1.1.
<cabeça de procedimento>, def 5.4.1, text 5.4.3.
<cadeia>, def 2.6.1, synt 3.2.1, 4.7.1, text 2.6.3.
<cadeia de letras>, def 3.2.1, 4.7.1.
<cadeia aberta>, def 2.6.1.
<cadeia própria>, def 2.6.1.
campo, text 2.7.
<código>, synt 5.4.1, text 4.7.8, 5.4.6.

- comment**, synt 2.3.
<composto não etiquetado>, def 4.1.1.
convenção comentário, text 2.3.
<corpo de procedimento>, def 5.4.1.
<declaração>, def. 5, synt 4.2.1, text 1,5 (toda a secção)
<declaração de comutação>, def. 5.3.1, synt 5, text 5.3.3.
<declaração de procedimento>, def 5.4.1, synt 5, text 5.4.3.
<declaração de tabela>, def 5.2.1, synt 5, text 5.2.3.
<declaração de tipo>, def 5.1.1, synt 5, text 5.1.3.
<declarador>, def 2.3.
dez 10, synt 2.3, 2.5.1.
dimensão, text 5.2.3.2.
divisão / ÷, synt 2.3, 3.3.1, text 3.3.4.2.
do, synt 2.3, 4.6.1.
dois pontos :, synt 2.3, 3.2.1, 4.1.1, 4.5.1, 4.6.1, 4.7.1, 5.2.1.
<elemento de lista de para>, def 4.6.1, text 4.6.4.1, 4.6.4.2, 4.6.4.3.
else, synt 2.3, 3.3.1, 3.4.1, 3.5.1, 4.5.1, text 4.5.3.2.
end, synt 2.3, 4.1.1.
espaço □, synt 2.3, text 2.3, 2.6.3.
<especificador>, def 5.4.1.
<etiqueta>, def 3.5.1, synt 4.1.1, 4.5.1, 4.6.1, text 1,
exponenciação ↑, synt 2.3, 3.3.1, text 3.3.4.3.
<expressão>, def 3, synt 3.2.1, 4.7.1, text 3 (toda a secção)
<expressão aritmética>, def 3.3.1, synt 3, 3.1.1, 3.3.1, 3.4.1, 4.2.1, 4.6.1, 5.2.1, text 3.3.3.
<expressão aritmética simples>, def 3.3.1, text 3.3.3.
<expressão booleana>, def 3.4.1, synt 3, 3.3.1, 4.2.1, 4.5.1, 4.6.1, text 3.4.3.
<expressão de designação simples>, def 3.5.1.
<expressão em índice>, def 3.1.1, synt 3.5.1.
<factor>, def 3.3.1.
<factor booleano>, def 3.4.1.
<factor de enquadramento>, def 2.5.1, text 2.5.3.
false, synt 2.2.2.
<fim de instrução composta>, def 4.1.1.
for, synt 2.3, 4.6.1.
função de transferência, text 3.2.5.
funções padrão, text 3.2.4, 3.2.5.
go to, synt 2.3, 4.3.1.
if, synt 2.3, 3.1, 4.5.1.
<identificador>, def 2.4.1, synt 3.1.1, 3.2.1, 3.5.1, 5.4.1, text 2.4.3.
<identificador de comutação>, def 3.5.1, synt 3.2.1, 4.7.1, 5.3.1.

<identificador de procedimento>, def 3.2.1, synt 3.2.1, 4.7.1, 5.4.1, text 4.7.5.4.
 <identificador de tabela>, def 3.1.1, synt 3.2.1, 4.7.1, 5.2.1, text 2.8.
 <implicação>, def 3.4.1.
 <indicador de comutação>, def 3.5.1, text 3.5.3.
 <indicador de função>, def 3.2.1, synt 3.3.1, 3.3.4.1, text 3.2.3, 5.4.4.
 <indicador de variável>, def 3.1.1.
 índice, text 3.1.4.1.
 <instrução>, def 4.1.1, synt 4.5.1, 4.6.1, 5.4.1, text 4 (toda a secção)
 <instrução de afectação>, def 4.2.1, synt 4.1.1, text 1, 4.2.3.
 <instrução de base>, def 4.1.1, synt 4.5.1.
 <instrução composta>, def 4.1.1, synt 4.5.1, text 1.
 <instrução condicional>, def 4.5.1, synt 4.1.1, text 4.5.3.
 <instrução não etiquetada de base>, def 4.1.1.
 <instrução *in* <*o*>>, def 4.3.1, synt 4.1.1, text 4.3.3.
 <instrução incondicional>, def 4.1.1, 4.5.1.
 <instrução *para*>, def 4.6.1, synt 4.1.1, 4.5.1, text 4.6. (toda a secção).
 <instrução de procedimento>, def 4.7.1, synt 4.1.1, text 4.7.3.
 <instrução *se*>, def 4.5.1, text 4.5.3.1.
 <instrução vazia>, def 4.4.1, synt 4.1.1, text 4.4.3.
integer, synt 2.3, 5.1.1, text 5.1.3.
 <inteiro>, def 2.5.1, text 2.5.4.
 inteiro, text 3.2.5.
 <inteiro sem sinal>, def 2.5.1, 3.5.1.
label, synt 2.3, 5.4.1.
 <letra>, def 2.1, synt 2.2.4.1, 3.2.1, 4.7.1.
 <limitador>, def 2.3, synt 2.
 <limitador de parâmetro>, def 3.2.1, 4.7.1, synt 5.4.1, text 4.7.7.
 <lista de comutação>, def 5.3.1.
 <lista de identificadores>, def 5.4.1.
 <lista de índices>, def 3.1.1.
 <lista de parâmetros efectivos>, def 3.2.1, 4.7.1.
 <lista de parâmetros formais>, def 5.4.1.
 <lista de pares de terminais>, def 5.2.1.
 <lista de partes esquerdas>, def 4.2.1.
 <lista de *pares*>, def 4.6.1, text 4.6.4.
 <lista de tabela>, def 5.2.1.
 <lista de tipo>, def 5.1.1.
 local, text 4.1.3.
 mais +, synt 2.3, 2.5.1, 3.3.1, text 3.3.4.1.
 menos -, synt 2.3, 2.3.1, 3.3.1, text 3.3.4.1.
 multiplicação $\times$, synt 2.3, 3.3.1, text 3.3.4.1.
 <número>, def 2.5.1, text 2.5.3, 2.5.4.
 <número decimal>, def 2.5.1, text 2.5.3.
 <número sem sinal>, def 2.5.1, synt 3.3.1.
 não local, text 4.1.3.

<operador>, def 2.3.
 <operador aritmético>, def 2.3, text 3.3.4.
 <operador aditivo>, def 3.3.1.
 <operador lógico>, def 2.3, synt 3.4.1, text 3.4.5.
 <operador multiplicativo>, def 3.3.1.
 <operador de relação>, def 2.3, 3.4.1.
 <operador sequencial>, def 2.3.
 own, synt 2.3, 5.1.1, text 5, 5.2.5.
 <par de terminais>, def 5.2.1.
 <parâmetro efectivo>, def 3.2.1, 4.7.1.
 <parâmetro formal>, def 5.4.1, text 5.4.3.
 <parentesis>, def 2.3.
 parentesis de índices [], synt 2.3, 3.1.1, 3.5.1, 5.2.1.
 parentesis de cadeias <>, synt 2.3, 2.6.1, text 2.6.3.
 parentesis de instruções, ver: *begin end*
 parêntesis {}, synt 2.3, 3.2.1, 3.3.1, 3.4.1, 3.5.1, 4.7.1, 5.4.1, text 3.3.5.2.
 <parte decimal>, def 2.5.1.
 <parte esquerda>, def 4.2.1.
 <parte de parâmetros efectivos>, def 3.2.1, 4.7.1.
 <parte de especificação>, def 5.4.1, text 5.4.5.
 <parte de parâmetros formais>, def 5.4.1.
 <parte de valor>, def 5.4.1, text 4.7.3.1.
 ponto ., synt 2.3, 2.5.1.
 ponto vírgula ;, synt 2.3, 4.1.1, 5.4.1.
 <primário aritmético>, def 3.3.1.
 <primário booleano>, def 3.4.1.
procedure, synt 2.3, 5.4.1.
 programa, text 1.
 <proposição *se*>, def 3.3.1, 4.5.1, synt 3.4.1, 3.5.1, text 3.3.3, 4.5.3.2.
 <proposição *para*>, def 4.6.1, text 4.6.3.
 quantidade, text 2.7.
real, synt 2.3, 5.1.1, text 5.1.3.
 <relação>, def 3.4.1, text 3.4.5.
 <secundário Booleano>, def 3.4.1.
 <secção de tabela>, def 5.2.1.
 <separador>, def 2.3.
 sucessor, text 1.
step, synt 2.3, 4.6.1, text 4.6.4.2.
string, synt 2.3, 5.4.1.
switch, synt 2.3, 5.3.1, 5.4.1.
 <símbolo de base>, def 2.
 tabela, text 3.1.4.1.
 terminais de índices, text 5.2.3.1.
 <terminal inferior>, def 5.2.1, text 5.2.4.
 <terminal superior>, def 5.2.1, text 5.2.4.
 <termo>, def 3.3.1.
 <termo Booleano>, def 3.4.1.
then, synt 2.3, 3.3.1, 4.5.1.
 <tipo>, def 5.1.1, synt 5.4.1, text 2.8.
 <tipo local ou remanescente>, def 5.1.1, synt 5.2.1.
true, synt 2.2.2.
until, synt 2.3, 4.6.1, text 4.6.4.2.

valor, text 2.8, 3.3.3.

<valor lógico>, def 2.2.2, synt 2, 3.4.1.

valor, synt 2.3, 5.4.1.

<variável>, def 3.3.1, synt 3.3.1, 3.4.1, 4.2.1, 4.6.1, text 3.1.3.

<variavel indiciada>, def 3.1.1, text 3.1.4.1.

<variável simples>, def 3.1.1, synt 5.1.1, text 2.4.3.

<vazio>, def 1.1, synt 2.6.1, 3.2.1, 4.4.1, 4.7.1, 5.4.1.

vírgula ,, synt 2.3, 3.1.1, 3.2.1, 4.6.1, 4.7.1, 5.1.1, 5.2.1, 5.3.1, 5.4.1.

while, synt 2.3, 4.6.1, text 4.6.4.3.

Centésimo número da «Gazeta de Matemática»

A Redacção da «Gazeta de Matemática» prepara o seu centésimo número.

Comemorando tal facto dirigiu a Institutos, Centros de Cálculo e Professores de outros países uma carta circular de que se transcreve o seguinte:

.....
«En outre il faut faire connaître au public portugais le rôle et l'importance de l'activité scientifique, notamment celle de la Mathématique, dans le développement économique des nations et des peuples. Dans ces conditions, la «Gazeta de Matemática» se fait un devoir d'y apporter sa contribution en présentant les points de vue de mathématiciens nationaux et étrangers sur une question si importante pour l'avenir scientifique de notre pays.

Nous serions donc très heureux de pouvoir compter sur votre collaboration à la tâche que nous nous sommes imposée; elle nous donnerait non seulement le précieux apport de votre expérience personnelle mais aussi des renseignements autorisés sur la solution trouvée à ce problème dans votre pays.

Sur ce dernier point, et dans le désir d'unification que vous voudrez bien comprendre, nous nous permettons de vous proposer une liste non limitative des points intéressant particulièrement notre pays:

1 — L'orientation et le développement actuels des diverses branches des mathématiques en vue des

- a) problèmes nouveaux posés par la vie humaine dans la deuxième moitié du XX^{ème} siècle.
- b) solutions nouvelles qui résultent des découvertes scientifiques et des réalisations technologiques dans la deuxième moitié du XX^{ème} siècle.
- c) techniques nouvelles de calcul et traitement des problèmes qui ont

trouvé le jour dans la deuxième moitié du XX^{ème} siècle.

2 — Les problèmes et les aspects des incidences réciproques entre la recherche scientifique, notamment dans le domaine de la mathématique, et les réalisations économiques, dans les domaines de l'industrie et de l'agriculture. Particulièrement des besoins de l'activité scientifique dans les domaines de la recherche fondamentale orientée, de la recherche appliquée et des opérations de mise au point technique.

3 — L'orientation et le développement à implanter, dans le futur prochain, à la recherche scientifique dans le domaine des mathématiques, en vue de l'évolution prévisible des aspects cités en 1. a), 1. b) et 1. c).

Il va de soi que la réponse à ces questions (et toutes les autres qui vous sembleraient importantes) aurait d'autant plus de valeur pour le public portugais qu'elle lui parviendrait par l'intermédiaire de votre irremplaçable expérience personnelle.

En sollicitant de votre bienveillance un article de cette nature, nous comptons sur votre esprit de collaboration scientifique et le désir d'apporter une contribution valable et très importante à la coopération et l'établissement des bonnes relations personnelles parmi les scientifiques des divers pays.»

.....
A Redacção da «Gazeta de Matemática» espera com vivo interesse dos portugueses vinculados à actividade matemática no País, particularmente dos Professores a vários níveis de ensino, válida contribuição para a discussão e o esclarecimento dum problema vital para o mesmo Ensino.

MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAME DE FREQUÊNCIA E FINAIS

MATEMÁTICAS GERAIS

F. C. P. — MATEMÁTICAS GERAIS — (Engenharia Electrotécnica, Mecânica, de Minas) — Exame 4 — 20-7-64.

Observação — O aluno deve resolver *sòmente* um dos problemas 2, 2', um dos problemas 5, 5' e os problemas 1, 3, 4. Quem desejar uma maior valorização da sua prova deverá optar pelo problema 5'. Pretende-se uma exposição clara e rigorosa.

5632 — 1) Para cada par $(a, b) \in R^2$, considere o seguinte sistema de equações lineares

$$S_{(a,b)} \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + a^2 y + z = a^2 \\ 2x + 2y + (3-a)z = b^2 \end{cases} \quad (x, y, z) \in R^3.$$

¶ a) Determine os conjuntos

$$\begin{aligned} A &= \{(a, b) \in R^2; S_{(a,b)} \text{ é possível} \}, \\ A' &= \{(a, b) \in R^2; S_{(a,b)} \text{ é simplesmente indeterminado} \} \subset A, \\ A'' &= \{(a, b) \in R^2; S_{(a,b)} \text{ é duplamente indeterminado} \} \subset A \text{ e} \\ A''' &= \{(a, b) \in R^2; S_{(a,b)} \text{ é triplamente indeterminado} \} \subset A, \end{aligned}$$

justificando as suas respostas mediante recurso ao teorema de Rouché.

b) Para $(a, b) \in A'$, determine o conjunto $B_{(a,b)}$ ($\subset R^3$) das soluções do sistema $S_{(a,b)}$.

2) Sejam A e B conjuntos não vazios, $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow A$ tais que $f \circ (g \circ f): A \rightarrow B$ é uma bijecção. Mostre que f e g também são bijecções.

2') Mostre que se A é uma parte não vazia de R , $a \in A$, $f: A \rightarrow R$ e $f'_e(a) \in R^+ - \{0\}$, f é contínua à esquerda em a e estritamente crescente à esquerda em a . (Comece por definir com precisão: derivada à esquerda de f em $a - f'_e(a) -$, função contínua à esquerda num ponto do domínio e função estritamente crescente à esquerda num ponto do domínio).

3) Seja $f: R \rightarrow R$
 $x \rightarrow sh(\text{sen}(sh\,x)).$

a) Determine a função derivada de f .
b) Determine o contradomínio de f , justificando.
(N. B. — Recorde que $sh: R \rightarrow R$ tem contradomínio R).

c) Diga em quantos pontos $f|[-2, 2]$ tem extremos relativos estritos, justificando a resposta.
(N. B. $3 < sh\,2 < 4$).

4) O referencial $(I) (0, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$ é ortonormado. O referencial $(II) (Q, \bar{I}, \bar{J}, \bar{K})$ é fixado, relativamente a (I) , da forma seguinte:

$$\begin{aligned} Q - 0 &= \bar{i}, \quad \bar{I} = \bar{i}, \quad \bar{J} = \bar{j}, \quad \bar{K} \text{ é unitário,} \\ \angle(\bar{i}, \bar{K}) &= \angle(\bar{j}, \bar{K}) = \angle(\bar{k}, \bar{K}) \end{aligned}$$

e (I) e (II) têm a mesma orientação.

a) Escreva as «fórmulas de transformação de coordenadas» que permitem determinar as coordenadas de P em (II) conhecidas as coordenadas de P em (I) .

b) Deduza a equação do cilindro de geratrizes paralelas a $\bar{K}$ e tendo por directriz a circunferência do plano $0xy$ de raio 1 e centro Q :

- 1.º no referencial (II) ;
- 2.º no referencial (I) .

5) Decomponha a fracção racional

$$\frac{X^4 - 2X^3 + 6X^2 - 8X + 7}{X^3 - 2X^2 + X - 2}$$

numa soma de elementos simples de $C(X)$, sabendo que 2 é um zero de $X^3 - 2X^2 + X - 2$.

5') Sobre $A =]-\infty, 1[$ considere a seguinte operação:

$$\begin{aligned} f: A^2 &\rightarrow A \\ (x, y) &\rightarrow x + (1-x) \cdot y. \end{aligned}$$

(Notação: $f(x, y) = x \# y$).

- a) Mostre que $[0, 1[$ é estável para a operação $\#$.
- b) Mostre que $(A, \#)$ é um grupo comutativo;

c) $[0, 1[$ com a operação induzida é um grupo comutativo? Porquê?

Resolução do exame 4

1. a) Designemos por M_a a matriz

$$M_a = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & 1 \\ 2 & 2 & 3-a \end{vmatrix}; \det(M_a) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a^2-1 & 0 \\ 2 & 0 & 1-a \end{vmatrix} =$$

$$= (a^2-1)(1-a). \text{ Se } a \neq -1, 1, \text{ a característica de } M_a \text{ é } 3 \text{ e } S_{(a,b)} \text{ é um sistema de Cramer, logo possível e determinado. Se } a = 1, \text{ a característica de } M_a \text{ é } 1. \text{ Escolhendo para principais a 1.ª linha e a 1.ª coluna de } M_a, \text{ as matrizes características da 2.ª e 3.ª equações são } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \text{ e } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & b^2 \end{vmatrix}. \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ e } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & b^2 \end{vmatrix} = 0 \text{ se e só se } (b = \sqrt{2} \vee b = -\sqrt{2}). \text{ Portanto, para } (a = 1) \wedge (b = \sqrt{2} \vee b = -\sqrt{2}), S_{(a,b)} \text{ é duplamente indeterminado; para } (a = 1) \wedge (b \neq \sqrt{2} \wedge b \neq -\sqrt{2}), S_{(a,b)} \text{ é impossível. Se } a = -1, \text{ a característica de } M_a \text{ é } 2 \text{ e podemos escolher para principais a 1.ª e 3.ª linhas e a 1.ª e 3.ª colunas:}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3+1 \end{vmatrix}. \text{ A matriz característica da 2.ª equação}$$

$$\text{será, então, } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & b^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \text{ cujo determinante é nulo}$$

qualquer que seja $b \in \mathbb{R}$, por existirem duas linhas iguais.

R: Em conclusão:

$$A = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2; (a \neq 1) \vee [a = 1 \wedge (b = \sqrt{2} \vee b = -\sqrt{2})]\},$$

$$A' = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2; a = -1\},$$

$$A'' = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2; (a = 1) \wedge (b = \sqrt{2} \vee b = -\sqrt{2})\},$$

$$A''' = \emptyset.$$

b) Se $(a, b) \in A'$, i. e., se $a = -1$, o sistema $S_{(a,b)}$ é equivalente ao sistema $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + 4z = b^2 \end{cases}$ $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Ora as soluções deste são:

$$\left(\frac{\begin{vmatrix} 1-y & 1 \\ b^2-2y & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}}, y, \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1-y \\ 2 & b^2-2y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}} \right), y \in \mathbb{R}, \text{ ou}$$

$$\left(\frac{4-4y-b^2+2y}{2}, y, \frac{b^2-2y-2+2y}{2} \right), y \in \mathbb{R};$$

$$R: B_{(a,b)} = \left\{ \left(-y - \frac{b^2-4}{2}, y, \frac{b^2-2}{2} \right); y \in \mathbb{R} \right\}$$

2. Sejam $\varphi = g \circ f$ e $\psi = f \circ \varphi$ e designemos por $cd(h)$, para toda a função h , o contradomínio de h . É evidente que $cd(\psi) \subset cd(f)$; como, por hipótese, $cd(\psi) = B$, também $cd(f) = B$, i. e., f é sobrejectiva. f é injectiva: senão, $\exists (\alpha, \beta) \in A^2$, tal que $\alpha \neq \beta$ e $f(\alpha) = f(\beta)$, logo $\psi(\alpha) = f(g(f(\alpha))) = f(g(f(\beta))) = \psi(\beta)$, o que é absurdo por ψ ser injectiva. Está, pois, provado que f é uma bijecção. Seja $h = f^{-1}$ a bijecção inversa. É evidente que $g = h \circ (\psi \circ h)$; como a composta de 2 bijecções é uma bijecção, fica provado que g é uma bijecção.

2'. (Ver apontamentos das aulas teóricas).

3. a) A função derivada é

$$f': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow ch[\sin(shx)] \cdot \cos(shx) \cdot chx.$$

b) De $cd(sh) = \mathbb{R}$ e $cd(\sin) = [-1, 1]$, concluímos que $cd(\sin \circ sh) = [-1, 1]$ e, portanto, $cd(f) = cd[sh \circ (\sin \circ sh)] = sh([-1, 1])$. Por outro lado, como $(sh)' = ch$ e, $\forall x \in \mathbb{R}$ $chx \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$ sh é uma função continua estritamente crescente e, então $sh([-1, 1]) = [sh(-1), sh(1)]$.

$$R: cd(f) = [sh(-1), sh(1)].$$

c) Designando por g a função $f|_{[-2, 2]}$, teremos $g' = f'|_{[-2, 2]}$. Como, $\forall x \in \mathbb{R}$, $chx > 0$, podemos concluir que a equação $g'(x) = 0$ é equivalente à equação $\cos(shx) = 0$, $x \in [-2, 2]$.

$$\text{De } \begin{cases} \frac{\pi}{2} < 3 < sh(2) < 4 < \frac{3\pi}{2} \\ -\frac{3\pi}{2} < -4 < sh(-2) < -3 < -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

resulta que $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \subset sh([-2, 2]) \subset \left[-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$; portanto, as únicas soluções da equação $g'(x) = 0$ são

$x_0 = \text{Arg } sh\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ e $x_1 = \text{Arg } sh\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Para $x \in]-2, x_0[\cup]x_1, 2[$ $g'(x) < 0$ e g é estritamente decrescente em x ; para $x \in]x_0, x_1[$ $g'(x) > 0$ e g é estritamente crescente em x . Portanto, g tem extremos relativos estritos em -2 , x_1 , x_0 e 2 (máximos nos 2 primeiros e mínimos nos 2 últimos).

R: $f|_{[-2, 2]}$ tem extremos relativos estritos em 4 pontos.

4. a) Para todo o ponto P , temos $P - O = (P - Q) + (Q - O)$, de onde $x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} = -X\bar{i} + Y\bar{j} + Z\bar{k} + \bar{i}$; mas $\bar{k} = \alpha(\bar{i} + \bar{j} + \bar{k})$, com $\alpha \in \mathbb{R}$, tal que $\alpha^2 \cdot 3 = 1$ e $\begin{vmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & \alpha \end{vmatrix} > 0$, isto é

$\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Portanto, $\bar{k} = \sqrt{3} \bar{K} - \bar{I} - \bar{J}$, e a igualdade anterior permite escrever:

$$(x-1)\bar{I} + y\bar{J} + z(-\bar{I} - \bar{J} + \sqrt{3}\bar{K}) = x\bar{I} + y\bar{J} + z\bar{K},$$

que é equivalente a (F)
$$\begin{cases} X = x - z - 1 \\ Y = y - z \\ Z = \sqrt{3}z. \end{cases}$$

R: São estas ((F)) as «fórmulas de transformação» pedidas.

b) 1.º) A equação do cilindro no referencial (II) é $X^2 + Y^2 = 1$, $(X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3$. Com efeito, como as geratrizes são paralelas a $\bar{K}$, basta notar que $Oxy = QXY$ e, como $\bar{I}|\bar{J} = 0$ e $\bar{I}$ e $\bar{J}$ são unitários, a distância de $P(X, Y, 0)$ a Q é $\sqrt{X^2 + Y^2}$; portanto as equações da circunferência directriz são

(em (II))
$$\begin{cases} X^2 + Y^2 = 1 \\ Z = 0, \end{cases} \quad (X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3.$$

2.º) No referencial (I) a equação do mesmo cilindro será: $(x-z-1)^2 + (y-z)^2 = 1$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

5. Podemos escrever

$$\frac{X^4 - 2X^3 + 6X^2 - 8X + 7}{X^3 - 2X^2 + X - 2} = X + \frac{5X^2 - 6X + 7}{X^3 - 2X^2 + X - 2}$$

$$\frac{X^4 - 2X^3 + 6X^2 - 8X + 7}{-X^4 + 2X^3 - X^2 + 2X} \left| \frac{X^3 - 2X^2 + X - 2}{X} \right.$$

$$\frac{5X^2 - 6X + 7}{1 \quad -2 \quad 1 \quad -2} \quad \left| \begin{array}{l} -2 \\ 2 \end{array} \right.$$

$$\frac{1 \quad 0 \quad 1 \quad 0}{X^2 + 1}$$

Os zeros de $(X^3 - 2X^2 + X - 2) \in \mathbb{C}[X]$ são 2, $-i$, $+i$. Pelo «teorema de decomposição», existem $\alpha \in \mathbb{C}$, $\beta \in \mathbb{C}$, tais que

$$\frac{5X^2 - 6X + 7}{X^3 - 2X^2 + X - 2} = \frac{\alpha}{X-2} + \frac{\beta}{X-i} + \frac{\bar{\beta}}{X+i}.$$

Esta igualdade é equivalente à seguinte:

$$5X^2 - 6X + 7 = \alpha(X^2 + 1) + \beta(X-2)(X+i) + \bar{\beta}(X-2)(X-i).$$

Atendendo a que 2 polinômios de $\mathbb{C}[X]$ são iguais se e só se as funções polinomiais associadas são iguais, podemos calcular α e β da seguinte forma:

$$\begin{aligned} x = 2 & \quad 20 - 12 + 7 = \alpha \cdot 5 \rightarrow \alpha = 3 \\ x = i & \quad -5 - 6i + 7 = \beta(i-2) \cdot 2i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{2-6i}{-2-4i} = \frac{-1+3i}{1+2i} = \\ &= \frac{-1+6+5i}{5} = 1+i. \end{aligned}$$

R: A decomposição pedida é:

$$\frac{X^4 - 2X^3 + 6X^2 - 8X + 7}{X^3 - 2X^2 + X - 2} = X + \frac{3}{X-2} + \frac{1+i}{X-i} + \frac{1-i}{X+i}.$$

5'. a) Seja $(x, y) \in ([0, 1])^2$; então, como $x < 1$, $1-x > 0$ e, como $0 \leq y < 1$, $0 \leq x+y-x < 1$, $(1-x)y < x+1-x=1$, i. e., $x+y \in [0, 1]$. $[0, 1]$ é, pois, estável para $\oplus$.

b) $(A, \oplus)$ é um grupo comutativo (Notar que $x \oplus y = x + y - xy$).

1) $\oplus$ é associativa, pois, $\forall (x, y, z) \in A^3$, $x \oplus (y \oplus z) = x + (y \oplus z) - x(y \oplus z) = x + (y + z - yz) - x(y + z - yz) = x + y + z - xy - yz - xz + xyz$ e $(x \oplus y) \oplus z = (x + y - xy) \oplus z = x + y + z - xy - (x + y - xy)z = x + y + z - xy - xz - yz + xyz = x \oplus (y \oplus z)$;

2) $\oplus$ é comutativa, pois, $\forall (x, y) \in A^2$ $x \oplus y = x + y - xy = y + x - yx = y \oplus x$;

3) $0 \in A$ é elemento neutro para $\oplus$, pois, $\forall x \in A$, $x \oplus 0 = x + 0 - x \cdot 0 = x = 0 + x - 0 \cdot x = 0 \oplus x$;

4) Vamos ver que todo o elemento de A é invertível, i. e., $\forall x \in A$, a equação $x \oplus y = 0$, $y \in A$ é possível (como $\oplus$ é comutativa, basta analisar a invertibilidade à direita). Ora, se $x \in A$, $x + y - xy = 0$,

$$y \in A \Leftrightarrow y = \frac{x}{x-1}, y \in A. \text{ Temos, pois, de verificar}$$

se é válida a proposição $\left(x \in A \Rightarrow \frac{x}{x-1} \in A\right)$,

Como $x < 1$, $x-1 < 0$ e, então, a inequação $\frac{x}{x-1} < 1$ ($x \in A$) é equivalente a $x > x-1$ ($x \in A$), que admite como solução todo o elemento de A . Está, pois, demonstrada a invertibilidade de todo o elemento $x \in A$.

c) $[0, 1[$, com a operação induzida, não é um grupo comutativo, pois nem todo o elemento é invertível.

Só 0 é invertível, porque, se $0 < x < 1$, $\frac{x}{x-1} < 0$,

$$\text{logo } \frac{x}{x-1} \notin A - [0, 1[.$$

(OBS. — A operação induzida por $\oplus$ sobre $[0, 1[$ é a habitual «adição de descontos»...).

I. S. C. E. F. — MATEMÁTICAS GERAIS — 1.ª cadeira —
Exame final — Época de Outubro — Prova escrita
— 4-10-1964.

5633 — 1) Aplicando o teorema dos acréscimos finitos à função $\log(\log x)$ no intervalo $[n, n+1]$, prove que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2 \log 2} + \frac{1}{3 \log 3} + \dots + \frac{1}{n \log n} \right) = \infty$.

Utilize o resultado anterior para indicar a natureza da série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$.

R: De

$$\log \log(n+1) - \log \log n = \frac{1}{(n+\theta) \log(n+\theta)} \quad (0 < \theta < 1)$$

vem

$$\log \log(n+1) - \log \log n < \frac{1}{n \log n}$$

e, fazendo $n = 2, 3, \dots$ nesta desigualdade, vem o conjunto de desigualdades

$$\log \log 3 - \log \log 2 < \frac{1}{2 \log 2}$$

$$\log \log 4 - \log \log 3 < \frac{1}{3 \log 3}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\log \log(n+1) - \log \log n < \frac{1}{n \log n}$$

que, somadas membro a membro, dão

$$\log \log(n+1) - \log \log 2 < \frac{1}{2 \log 2} + \frac{1}{3 \log 3} + \dots + \frac{1}{n \log n}$$

e

$$\lim \log \log(n+1) = \infty \Rightarrow \lim \left(\frac{1}{2 \log 2} + \frac{1}{3 \log 3} + \dots + \frac{1}{n \log n} \right) = \infty.$$

A série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$ é divergente pois a sucessão associada $S_{n-1} = \frac{1}{2 \log 2} + \frac{1}{3 \log 3} + \dots + \frac{1}{n \log n}$ é divergente.

2) Estude a continuidade e derivabilidade da função $f(x) = \begin{cases} 1/x & (x < 0) \\ 2 & (x = 0) \\ \cos x & (x > 0) \end{cases}$.

É aplicável a esta função o teorema de ROLLE no intervalo $[-1, \pi]$? Porquê?

R: A função $f(x)$ é contínua para todos os pontos próprios excepto $x=0$; é também contínua em $x=-\infty$ e descontínua em $x=+\infty$.

A descontinuidade em $x=0$ é infinita: $\omega(0) = +\infty$; em $x=+\infty$ é $\omega(+\infty) = 2$ e a descontinuidade é finita.

$$f'(x) = \begin{cases} -1/x^2 & (x < 0) \\ \pm \infty & (x = 0) \\ -\sin x & (x > 0) \end{cases}$$

Embora $f(-1) = f(\pi)$ o teorema de ROLLE não é aplicável porque $f(x)$ não é regular em $[-1, \pi]$.

$$3) \text{ Calcule } P \frac{\sqrt{x}-1}{6(\sqrt[3]{x}+1)}.$$

R: Fazendo $x = t^6$, vem

$$\begin{aligned} P \frac{\sqrt{x}-1}{6(\sqrt[3]{x}+1)} &= P \frac{t^3-t^0}{t^2+1} = \\ &= P \left(t^6 - t^4 - t^3 + t^2 + t - 1 + \frac{1-t}{t^2+1} \right) = \\ &= \frac{1}{7} t^7 - \frac{1}{5} t^5 - \frac{1}{4} t^4 + \frac{1}{3} t^3 + \frac{1}{2} t^2 - t + \\ &+ \arctg t - \frac{1}{2} \log(t^2+1) = \frac{1}{7} \sqrt[6]{x^7} - \frac{1}{5} \sqrt[6]{x^5} - \\ &- \frac{1}{4} \sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{3} \sqrt{x} + \frac{1}{2} \sqrt[3]{x} - \sqrt[6]{x} + \\ &+ \arctg \sqrt[6]{x} - \frac{1}{2} \log(\sqrt[3]{x}+1). \end{aligned}$$

4) Discuta a existência de extremantes para a função $g(x, y) = ax^2 + by^2 + 2x + 2y$ ($a, b \neq 0$).

R: $\begin{cases} g'_x = 2ax + 2 = 0 \\ g'_y = 2by + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1/a \\ y = -1/b \end{cases}$ (ponto de estacionaridade). Como $\begin{cases} r = 2a \\ s = 0 \\ t = 2b \end{cases}, \Delta = s^2 - rt = -4ab$

$\begin{cases} \Delta > 0 \Rightarrow ab < 0 \text{ (não há extremantes)} \\ \Delta < 0 \Rightarrow ab > 0 \text{ (há extremante)} \end{cases}$

$\begin{cases} a > 0 \wedge b > 0 \text{ minimizante} \\ a < 0 \wedge b < 0 \text{ maximizante.} \end{cases}$

5) Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 6 \end{bmatrix}$, ache uma matriz quadrada B , de característica 2, tal que $AB = 0$.

Sugestão: escolha as colunas de B entre as soluções de $AX = 0$.

R: O sistema $AX=0$ é duplamente indeterminado porque a característica de A é 1. Existem então duas soluções independentes que se acham facilmente:

A equação $x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$ dá as soluções independentes $X_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $X_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

A matriz $B = \begin{bmatrix} -1 & -2 & a_{13} \\ 1 & 0 & a_{23} \\ 0 & 1 & a_{33} \end{bmatrix}$ satisfaz às condições requeridas desde que a terceira coluna seja composição linear das duas primeiras: $a_{13} = -\lambda - 2\mu$, $a_{23} = \lambda$ e $a_{33} = \mu$.

6) Demonstre, utilizando o método da geometria analítica, que o lugar geométrico das rectas que passam por um ponto e são perpendiculares a uma recta é o plano que passa pelo ponto e é perpendicular à recta.

R: Dada a recta $r \equiv \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$ e o feixe de rectas $\frac{x-x_1}{h} = \frac{y-y_1}{k} = \frac{z-z_1}{l}$ que passam pelo ponto (x_1, y_1, z_1) , se estas são perpendiculares à primeira, virá $ah + bk + cl = 0$.

Fazendo $\frac{x-x_1}{h} = \frac{y-y_1}{k} = \frac{z-z_1}{l} = t$, obtém-se $h = \frac{x-x_1}{t}$, $k = \frac{y-y_1}{t}$ e $l = \frac{z-z_1}{t}$.

Substituindo em $ah + bk + cl = 0$, vem a equação do plano que passa por (x_1, y_1, z_1) e é perpendicular a r : $a(x-x_1) + b(y-y_1) + c(z-z_1) = 0$.

I. S. C. E. F. — MATEMÁTICAS GERAIS — 1.ª cadeira — 1.º exame de frequência e 1.º ponto de informação (1.ª chamada) — 24-2-1965.

I

5634 — 1) Considere a seguinte axiomática de álgebra de Boole:

Álgebra de Boole é um conjunto $B = \{a, b, c\}$ no qual se encontram definidas duas leis de composição interna, adição (+) e multiplicação ($\cdot$), tais que

- B_1 . Comutatividade: $a + b = b + a$, $a \cdot b = b \cdot a$
- B_2 . Associatividade: $(a + b) + c = a + (b + c)$, $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- B_3 . Distributividade: $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$, $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
- B_4 . Elementos neutros: $a + 0 = a$, $a \cdot 1 = a$
- B_5 . Complemento: $a + \sim a = 1$, $a \cdot \sim a = 0$.

Com base nos axiomas B_1, B_2, B_3, B_4 e B_5 , prove os seguintes teoremas:

$$T_1: a + a = a, a \cdot a = a$$

$$T_2: a + 1 = 1, a \cdot 0 = 0.$$

Que observações tem a fazer sobre a relação entre esta axiomática e a que foi apresentada no Curso de Matemáticas Gerais?

2) Considere o conjunto de números complexos

$\{z: 1 \leq |z| \leq 16 \wedge 0 < \arg z \leq \frac{\pi}{4}\}$. Como é constituído o conjunto $\{w: w = z^4\}$, caracterizando-o pelo módulo e argumento de w ?

Qual é o lugar geométrico das imagens de w no plano complexo?

R: 1) Demonstração de T_1 :

1. $a + 0 = a$ B_4
2. $a + (a \cdot \sim a) = a$ 1 e B_5
3. $(a + a) \cdot (a + \sim a) = a$ 2 e B_3
4. $(a + a) \cdot 1 = a$ 3 e B_5
5. $a + a = a$ 4 e B_4 .

A relação $a \cdot a = a$ deriva-se de $a + a = a$ por dualidade. Demonstração de T_2 :

1. $a + \sim a = 1$ B_5
2. $a + (a + \sim a) = a + 1$ Substituição
3. $(a + a) + \sim a = a + 1$ 2 e B_2
4. $a + \sim a = a + 1$ 3 e T_1
5. $1 = a + 1$ 4 e B_5 .

A relação $a \cdot 0 = 0$ deriva-se de $a + 1 = 1$ por dualidade.

A axiomática apresentada no Curso de Matemáticas incluía como axioma, além de B_1, B_2, B_3, B_4 , e B_5 , o teorema T_2 . Não se trata pois de uma axiomática independente.

$$2) \{w: 1 \leq |w| \leq 16^4 \wedge 0 < \arg w < \pi\}.$$

II

5635 — 1) Considere os conjuntos lineares A, B e $C = \{x: x = a + b \text{ com } a \in A \text{ e } b \in B\}$. Prove que, sendo A e B majorados, é $\sup C = \sup A + \sup B$.

2) Sendo u_n crescente (decrecente), demonstre que $(u_1 + u_2 + \dots + u_n)/n$ é crescente (decrecente). Calcule

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n+1}{n^2} + \frac{(n+1)^2}{n^3} + \dots + \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}} \right].$$

R: 1)

$$\left. \begin{array}{l} \forall a \in A \quad a \leq \sup A \\ \forall b \in B \quad b \leq \sup B \end{array} \right\} \Rightarrow \\ \Rightarrow \forall a + b \in C \quad a + b \leq \sup A + \sup B$$

$$\left. \begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0, \exists a': a' > \sup A - \frac{\varepsilon}{2} \\ \forall \varepsilon > 0, \exists b': b' > \sup B - \frac{\varepsilon}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \\ \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists a' + b': a' + b' > \sup A + \sup B - \varepsilon.$$

2) Suponha-se por exemplo, $u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \dots$. Então

$$\begin{aligned} \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n + u_{n+1}}{n+1} - \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{n} &= \\ = \frac{n u_{n+1} - (u_1 + u_2 + \dots + u_n)}{n(n+1)} &\geq \\ \geq \frac{n u_{n+1} - n u_1}{n(n+1)} = \frac{u_{n+1} - u_1}{n+1} &\geq 0, \end{aligned}$$

o que prova o resultado pretendido.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n+1}{n^2} + \frac{(n+1)^2}{n^3} + \dots + \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}} \right] &= \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n^2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{n+1}{n} \right)^n}{1 - \frac{n+1}{n}} &= \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{n+1}{n} \right) \left[1 - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right] &= e - 1. \end{aligned}$$

III

5636 — 1) Sendo p inteiro positivo, mostre que a série

$$S) 1 + \frac{x}{p+1} + \frac{x^2}{(p+1)(p+2)} + \dots + \frac{x^n}{(p+1)(p+2)\dots(p+n)} + \dots$$

é convergente qualquer que seja x e a sua soma é

$$S = \frac{p!}{x^p} \left[e^x - 1 - \frac{x}{1!} - \dots - \frac{x^{p-1}}{(p-1)!} \right] (x \neq 0).$$

2) Supondo a_n decrescente ($a_n \geq 0$) e $\Sigma (a_n a_{n+1})^{1/2}$ convergente, prove que Σa_n converge. Dê exemplo de uma série Σb_n ($b_n \geq 0$) divergente tal que $\Sigma (b_n b_{n+1})^{1/2}$ convirja.

R: 1) Para $x = 0$ a série é visivelmente convergente e a sua soma é igual a 1. Para $x \neq 0$, vem

$$\begin{aligned} \frac{x^p}{p!} \left[1 + \frac{x}{p+1} + \frac{x^2}{(p+1)(p+2)} + \dots + \frac{x^n}{(p+1)(p+2)\dots(p+n)} + \dots \right] &= \\ = \frac{x^p}{p!} + \frac{x^{p+1}}{(p+1)!} + \frac{x^{p+2}}{(p+2)!} + \dots + \frac{x^{p+n}}{(p+n)!} + \dots \end{aligned}$$

que é precisamente o resto de ordem p da série exponencial cuja soma é $e^x - 1 - \frac{x}{1!} - \dots - \frac{x^{p-1}}{(p-1)!}$.

Portanto,

$$R_p = \frac{p!}{x^p} \left[e^x - 1 - \frac{x}{1!} - \dots - \frac{x^{p-1}}{(p-1)!} \right].$$

$$2) a_n \geq a_{n+1} \Rightarrow \sqrt{a_n a_{n+1}} \geq \sqrt{a_{n+1}^2} = a_{n+1} \text{ e portanto } \Sigma \sqrt{a_n a_{n+1}} C \Rightarrow \Sigma a_n C.$$

Considerando para série Σb_n $1+0+1+0+1+\dots$ (divergente), é claro que $\Sigma (b_n b_{n+1})^{1/2} = 0+0+0+\dots$ é convergente.

I. S. G. E. F. — MATEMÁTICAS GERAIS — 4.ª cadeira — 1.º Exame de frequência e 1.º ponto de informação — (2.ª chamada) — 5-3-1965.

5637 — 1) O conjunto dos números reais pode ser introduzido axiomáticamente como o conjunto R no qual estão definidas duas leis de composição interna, adição (+) e multiplicação ($\times$) tal que

R_1 . O conjunto R é um corpo ordenado.

R_2 . Todo o subconjunto de R não vazio e majorado tem supremo.

Destes axiomas derivam-se os teoremas da teoria dos números reais, entre os quais os seguintes:

T_1 . Se $R = H \cup K$ e $\forall h \in H, k \in K \quad h < k$, então H tem máximo ou K tem mínimo.

T_2 . Todo o subconjunto de R não vazio minorado tem ínfimo.

Prove-os, recorrendo ao postulado R_2 .

2) Entre o conjunto C dos números complexos e o conjunto $\bar{C}$ dos conjugados é possível estabelecer um isomorfismo relativamente às operações de passagem ao conjugado, adição e multiplicação? Justifique.

No caso de C e $\bar{C}$ serem isomorfos em relação a alguma ou algumas das operações mencionadas, tratar-se-á de um isomorfismo ordenado? Porquê?

R: 1) Demonstração de T_1 :

O conjunto H é majorado por todos os números

$k \in K$ e portanto, de acordo com R_2 , H tem supremo. É claro que $\forall h \in H, k \in K, h \leq \sup H \leq k$ mas, como $R = H \cup K$, forçosamente $\sup H \in H$ ou $\sup H \in K$. Se $\sup H \in H$, então H tem máximo; se $\sup H \in K$, K tem mínimo.

Demonstração de T_2 :

Designa-se A o subconjunto de R não vazio e minorado e seja B o conjunto dos minorantes de A . É claro que B é não vazio e é majorado pelos elementos de A . De acordo com o axioma R_2 , o conjunto B tem supremo. Tem-se $\sup B \in B$ porque se $\sup B$ não fosse um minorante de A existiria $a \in A$ com $a < \sup B$ e, devido às propriedades do supremo, existiria também $b \in B$ tal que $a < b \leq \sup B$, o que é impossível pois $\forall a \in A, b \in B, b < a$.

Portanto $\sup B \in B$, isto é, o conjunto dos minorantes de A tem máximo que é, por definição, $\inf A$.

2) É possível estabelecer um isomorfismo relativamente às três operações. Não se trata de um isomorfismo ordenado porque não se define relação de ordem em C .

II

5638 — 1) Seja A um conjunto linear majorado. Demonstre que o conjunto dos majorantes é fechado. Pode este facto servir para justificar que A tem supremo? Porquê?

2) Considere as sucessões u_n e v_n tais que $u_n > 0 > v_n$ e $\lim (u_n - v_n) = 0$.

Prove que $\lim u_n = \lim v_n = 0$.

Calcule

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[n \log \left(1 + \frac{1}{n^2} \right) + (n+1) \log \left(1 + \frac{1}{n^2} \right) + \dots + (n+n) \log \left(1 + \frac{1}{n^2} \right) \right].$$

R: 1) Designando por B o conjunto dos majorantes de A , seja $k \notin B$.

Então $\exists a \in A: a > k$ e, tomando ε suficientemente pequeno, nenhum ponto de $V_\varepsilon(k)$ será majorante de A , isto é, k é isolado de B .

Como B é fechado e minorado por A , o conjunto B tem mínimo que é, por definição, o supremo de A .

2) Como $u_n > 0 > v_n$, tem-se

$$u_n + v_n = |u_n| - |v_n| \leq |u_n - v_n| = u_n - v_n$$

e, como $\lim (u_n - v_n) = 0$,

$$n > m \Rightarrow \begin{cases} u_n - v_n < \varepsilon \\ u_n + v_n < \varepsilon \end{cases} \Rightarrow u_n < \varepsilon$$

isto é $\lim u_n = 0$ e, portanto, $\lim v_n = 0$.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[n \log \left(1 + \frac{1}{n^2} \right) + (n+1) \log \left(1 + \frac{1}{n^2} \right) + \dots + (n+n) \log \left(1 + \frac{1}{n^2} \right) \right] &= \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} [n + (n+1) + \dots + (n+n)] \log \left(1 + \frac{1}{n^2} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[n(n+1) + \frac{n(n+1)}{2} \right] \log \left(1 + \frac{1}{n^2} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n(n+1)}{2n^2} \cdot \frac{1}{n} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

III

5639 — 1) Sendo $\sum n u_n$ convergente, mostre que $\sum u_n$ também converge. Estude a convergência e a convergência absoluta de $\sum (-1)^n (\sqrt{n^2+1} - n)$.

2) Dada a série $\sum \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1 \right) (\log x)^n$, determine o mais amplo intervalo de convergência uniforme.

R: 1) Tomando $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$, o teorema de ABEL ensina que $\sum n u_n \varepsilon_n = \sum u_n$ é convergente.

Como $\sqrt{n^2+1} - n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1} + n} \rightarrow 0$ decrescendo a série $\sum (-1)^n (\sqrt{n^2+1} - n)$ é alternada decrescente e portanto converge. A série $\sum (\sqrt{n^2+1} - n)$ é divergente porque $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1} - n} = +\infty$ e $\sum \frac{1}{n}$ diverge. A série dada é pois simplesmente convergente.

2) Como $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n+1}} - 1 \right)}{\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1 \right)} \cdot \frac{|\log x|^{n+1}}{|\log x|^n} = |\log x|$, a série é absolutamente convergente para $|\log x| < 1$ ou $\frac{1}{e} < x < e$. Para $x = \frac{1}{e}$, a série converge porque $\sum \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1 \right) (-1)^n$ é alternada decrescente; para $x = e$, a série é divergente.

O mais amplo intervalo de convergência uniforme é pois $\left[\frac{1}{e}, e \right]$.

F. C. P. — MATEMÁTICAS GERAIS — (Lic. em Matemáticas e Físico-Químicas) — Outubro de 1964.

5640 — I. Seja $E = [0, 2] - \{1\} \xrightarrow{f} R$,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ x & \text{se } 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

1) Indique o conjunto

$$\{(\delta, \varepsilon) \in R^+ \times R^+ | f(E \cap]1-\delta, 1+\delta[) \subset]1-\varepsilon, 1+\varepsilon[\}.$$

2) Indique os subconjuntos A de E tais que tem sentido falar de $f|_A$ e $f|_A$ e caracterize os prolongamentos g de f a $E \cup \{1\}$ tais que tem sentido falar de $g \circ g$. Justifique.

5641 — II. Sejam: $R \xrightarrow{f} R$, $f(x) = (x(x-3))^2$; $R \xrightarrow{g} R$, $g(x) = \sqrt[3]{x}$.

1) Indique o número de pontos fixos de f e calcule, pelo método das tangentes, os três primeiros termos do desenvolvimento decimal de um dos pontos fixos de f não pertencente a Q .

2) Indique, justificando, os conjuntos:

- $\{x \in R | g \circ f \text{ é finitamente derivável no ponto } x\}$;
- $\{x \in R | g \circ f \text{ é infinitamente derivável no ponto } x\}$;
- $\{x \in R | g \circ f \text{ tem máximo relativo no ponto } x\}$;
- $\{x \in R | g \circ f \text{ tem mínimo relativo no ponto } x\}$.

5642 — III. (Geometria analítica no plano). Seja $(O; \vec{i}, \vec{j})$ métricamente fixado como se indica:

$$\|\vec{i}\| = \sqrt{2}; \|\vec{j}\| = 2; \angle(\vec{i}, \vec{j}) = \frac{\pi}{4}. \text{ Sejam } A \text{ e } B$$

os pontos tais que $A - O = \vec{i}$ e $B - O = \vec{j}$.

1) Determine as coordenadas do ponto U assim caracterizado: pertence à recta que passa por B e é perpendicular à recta OB ; $\|U - A\| = \|U - B\|$.

2) Determine os eixos de simetria da elipse $8x^2 + 13y^2 + 4xy - 1 = 0$ sem previamente a representar num referencial ortonormado.

Enunciados dos n.ºs 5640 a 5642 de Aníbal Coimbra Aires de Matos

BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de Matemática de que os Autores ou Editores enviarem dois exemplares à Redacção

158 — A. DONEDDU — *Geometrie Euclidienne Plane*. Dunod — Paris.

Não é empresa fácil o desenvolvimento de uma teoria axiomática rigorosa da Geometria euclidiana. Neste livro, em que o Autor toma como via de exposição a que resulta de uma observação directa do nosso espaço físico, destacam-se dois elementos essenciais da geometria: a noção de *espaço* (o plano em geometria plana) e a noção de *grupo* (de transformação).

Para o *espaço*, os axiomas põem em relevo a recta, a semi-recta, a ordem sobre qualquer semi-recta e o semi-plano. Introduce-se uma figura, a que se dá o nome de *drapeau* e que intervém constantemente em todo o resto da teoria.

Na base da noção de «igualdade» de figuras encontra-se o grupo dos isometrias: os axiomas que o definem permitem que a teoria se edifique com uma lógica rigorosa mantendo no entanto contacto permanente com a realidade física.

Apenas de doze axiomas, na totalidade, podem ser

extraídas todas as estruturas, quer algébricas quer topológicas, do plano euclideano: a estrutura de semi-grupo ordenado das distâncias e a teoria da sua medida, estrutura de espaço vectorial, produto escalar e estrutura métrica do plano, estrutura topológica de espaço vectorial normado completo (espaço de Banach), estruturas angulares do plano (semi-grupo restrito quasi-arquimediano) e teoria da medida dos ângulos, rotações e medida das rotações (isomorfia com o grupo aditivo das classes de números reais módulo 2π): torna-se assim possível definir as funções seno e coseno e estudar a sua continuidade sem fazer intervir a teoria dos números complexos.

Contribuindo para o esclarecimento da teoria da geometria euclidiana plana, este livro que é edificado sobre a noção de grupo das isometrias, e descrito num estilo lógico e moderno sem perder o contacto com a mais elementar experimentação, deverá interessar não apenas o professor e o estudante de geometria elementar como todo aquele que pretende prosseguir estudos menos elementares nos domínios da álgebra e da análise.

J. G. T.

LITERATURA MATEMÁTICA RECIENTE

Editor — GAUTHIER-VILLARS, Paris

A. MICHAL — *Le Calcul Différentiel dans les Espaces de Banach.*

M. CARVALLO — *Principes et applications de l'analyse Booléenne.*

Mémoires des Sciences Mathématiques

J. ANASTASSIADIS — *Définition des fonctions Eulériennes par des Équations Fonctionnelles.*

W. J. TRJITZINSKY — *La Régularité Moyenne dans la Théorie Métrique.*

P. HUMBERT et S. COLOMBO — *Le Calcul Symbolique et ses applications à la Physique Mathématique — 2^{ème} Edition revue et augmentée.*

Monographies Internationales de Mathématiques Modernes

MARKOUCHEVITCH — *Fonctions d'une Variable Complexe — Problèmes Contemporains.*

BOGOLIOUBOV et I. MITROPOLSKI — *Les Méthodes Asymptotiques en Théorie des Oscillations non Linéaires.*

LINNICK — *Décomposition des Lois de Probabilités.*

J. MIKUSINSKY et R. SIKORSKI — *Théorie Élémentaire des Distributions.*

Editor — MASSON ET C.^{ie}, Paris

J. BASS — *Cours de Mathématiques — Troisième Édition Revue et Corrigée.*

— *Exercices de Mathématiques.*

M. BOUX — *Les Fonctions Généralisées ou Distributions.*

M. A. TONNELAT — *Les Vérifications Experimentales de la Relativité Générale.*

DA CUNHA-CASTELLE, REVUZ & SCHREIBER — *Récueil de Problèmes de Calcul des Probabilités.*

Editor — LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE ALBERT BLANCHARD — Paris

FRÉDÉRIC GILLOT — *Éléments de Logique Appliquée — d'après Wronski, Jevons, Solvay.*

Editor — AKADÉMIAI KIADÓ — BUDAPEST

Deuxième Congrès Mathématique Hongrois.

MEDGYESSY — *Decomposition of Superpositions of Distribution Functions.*

Editor — IZDATELSTVO AKADEMII NAUK SSSR — MOSKVA

LAWRENTJEW, JUSCHKEWITSCH, GRIGORJAN — *LEONHARD EULER.*

Editor — DUNOD, Paris

Collection SIGMA

M. RICHARDSON — *Éléments de Mathématiques Modernes.*

A. DONEDDU — *Les Bases de l'Analyse Mathématique Moderne.*

Editor — AKADEMIE-VERLAG, Berlin

A. I. LURJE — *Räumliche Probleme der Elastizitätstheorie.*

Editor — VEB DEUTSCHER VERLAG DER WISSENSCHAFTEN, Berlin

M. A. NEUMARK — *Normierte Algebren.*

OTAKAR BORÚVKA — *Grundlagen der Gruppoid- und Gruppentheorie.*

Mathematische Monographien

GERHARD RINGEL — *Färbungsprobleme auf Flächen und Graphen.*

Mathematische Forschungsberichte

A. N. KOLMOGOROFF und W. M. TICHOMIROV — *Arbeiten zur Informationstheorie III.*

A. W. POGORELOW — *Einige Untersuchungen zur Riemannschen Geometrie im Grossen.*

H. HORNICH — *Existenzprobleme bei Linearen Partiellen Differentialgleichungen.*

INSTITUTO DE MATEMATICA — UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

Bahia Blanca — Argentina

MARIA LAURA MOUSINHO LEITE LOPES — *Conceitos Fundamentais da Geometria.*

GAZETA DE MATEMÁTICA

Número avulso: 17 escudos e 50 centavos

Assinatura relativa a 1966 (4 números) 50 escudos

Assinatura para o estrangeiro, 80 escudos

PONTOS DE EXAME

Uma das secções permanentes da *Gazeta de Matemática* é constituída pelos pontos de Matemática do exame do 3.º ciclo do ensino liceal e de exames de aptidão às Universidades e pontos de exames de frequência e finais das cadeiras de matemática das escolas superiores.

2.ª EDIÇÃO DO VOL. II (N.º 5 a 8)

Continua aberta a inscrição para a nova edição do ano II da *Gazeta de Matemática* (n.º 5 a 8) ao preço de escudos 30. Esta nova edição oferece aos leitores da *Gazeta de Matemática* a possibilidade de completarem as suas colecções no formato e características actuais e com os textos cuidadosamente revistos. Logo que as inscrições atinjam o número de 300, proceder-se-á, à composição, impressão e distribuição da nova edição do ano II. Depois de publicada, a segunda edição do volume II será vendida ao preço de escudos 40.

CONDIÇÕES DE ASSINATURA

A administração da *Gazeta de Matemática* aceita, quando pedidas directamente, assinaturas de quatro números, ao preço de escudos 50, para o que basta

indicar o nome, a morada e o local de cobrança. As assinaturas são renovadas automaticamente no seu termo, salvo aviso prévio em contrário. Todas as assinaturas têm início com o primeiro número publicado em cada ano.

ASSINATURAS GRATUITAS

Todo o assinante que indique à administração da *Gazeta de Matemática* dez novos assinantes beneficiará de uma assinatura gratuita durante o ano seguinte ao da sua assinatura.

NÚMEROS ATRASADOS

Estão completamente esgotados os números 5 a 15, da *Gazeta de Matemática*. Os restantes números são vendidos aos preços seguintes:

N.º 1-4 (2.ª edição do ano I, no formato actual e com o texto cuidadosamente revisto)	40\$00
N.º 16 a 49, cada número	12\$50
N.º 50	60\$00
N.º 51 a 75 [cada número simples	17\$50
N.º 76 a 99 [" " duplo	35\$00
N.º 76-77	60\$00

A administração da *Gazeta de Matemática* executa qualquer encomenda à cobrança pelo correio.

ANGARIE ASSINANTES PARA A «GAZETA DE MATEMÁTICA».

Concorrerá, assim, para o melhoramento
de uma revista sem objectivos comerciais

PREÇO ESC. 35\$00

ADMINISTRAÇÃO DA «GAZETA DE MATEMÁTICA»

Rua Diário de Notícias, 134-1.º - Esq.º - LISBOA - 2 — Telefone 369449
