Inégalités

par Jean Aczél

V

Solutions des problèmes et des exercices de la partie IV

PROBLÈME 35. La concavité de $F(x,y)=\sqrt{xy}$ résulte de $(x_1+x_2)(y_1+y_2)=x_1y_1+x_1y_2+x_2y_1+x_2y_2 \geqslant \geqslant x_1y_1+2\sqrt{x_1x_2y_1y_2}+x_2y_2=(\sqrt{x_1y_1}+\sqrt{x_2y_2})^2$.
La convexité de $F(x,y)={}^a\log(a^x+a^y)$ résulte de

$$2\log\left(a^{\frac{x_1+x_2}{2}}+a^{\frac{y_1+y_2}{2}}\right)=$$
$$=\log(a^{x_1}a^{x_2}+2\sqrt{a^{x_1}a^{x_2}a^{y_1}a^{y_2}}+a^{y_1}a^{y_2})\leqslant$$
$$\leqslant\log(a^{x_1}a^{x_2}+a^{x_1}a^{y_2}+a^{y_1}a^{x_2}+a^{y_1}a^{y_2})=$$
$$=\log(a^{x_1}+a^{y_1})+\log(a^{x_2}+a^{y_2}).$$

Pour démontrer que $F(x,y)=x^{q_1}y^{q_2}$ est concave, il faut vérifier l'inégalité

$$\frac{x_1^{q_1}y_1^{q_2}+x_2^{q_1}y_2^{q_2}}{2}<\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^{q_1}\left(\frac{y_1+y_2}{2}\right)^{q_2},$$

c'est-à-dire, puisque $q_1+q_2=1$,

$$(21)\qquad x_1^{q_1}y_1^{q_2}+x_2^{q_1}y_2^{q_2}<(x_1+x_2)^{q_1}(y_1+y_2)^{q_2}.$$

Or, en utilisant la seconde inégalité (4), on a

$$\frac{x_1^{q_1}y_1^{q_2}+x_2^{q_1}y_2^{q_2}}{(x_1+x_2)^{q_1}(y_1+y_2)^{q_2}}=\left(\frac{x_1}{x_1+x_2}\right)^{q_1}\left(\frac{y_1}{y_1+y_2}\right)^{q_2}+$$
$$+\left(\frac{x_2}{x_1+x_2}\right)^{q_1}\left(\frac{y_2}{y_1+y_2}\right)^{q_2}<q_1\frac{x_1}{x_1+x_2}+q_2\frac{y_1}{y_1+y_2}+$$
$$+q_1\frac{x_2}{x_1+x_2}+q_2\frac{y_2}{y_1+y_2}=q_1+q_2=1.$$

ce qui équivaut à la relation (21). La concavité de $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x_1^{q_1}x_2^{q_2}\cdots x_n^{q_n}$ se démontre d'une manière complètement analogue.

PROBLÈME 36. En divisant les deux membres de l'inégalité (20) par k, on obtient l'inégalité de Jensen à k termes et à n variables pour la fonction $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x_1^{q_1}x_2^{q_2}\cdots x_n^{q_n}$; sa validité résulte de la concavité de cette fonction. Pour démontrer l'inégalité de Hölder posons dans (20) $n=2$, $1/r=q_1$, $1/s=q_2$, $a_1=x_1^{(1)},\cdots,a_k^r=x_1^{(k)}$, $b_1^r=x_2^{(1)},\cdots,b_k^r=x_2^{(k)}$.
L'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit:

$$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_k^2)^{1/2}(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_k^2)^{1/2}\geqslant a_1b_1+$$
$$+a_2b_2+\cdots+a_kb_k.$$

PROBLÈME 37. En procédant comme nous l'avons indiqué, on a

$$x_1(x_1+x_2)^{r-1}+y_1(y_1+y_2)^{r-1}<$$
$$<(x_1^r+y_1^r)^{1/r}[(x_1+x_2)^r+(y_1+y_2)^r]^{\frac{r-1}{r}};$$
$$x_2(x_1+x_2)^{r-1}+y_2(y_1+y_2)^{r-1}<$$
$$<(x_2^r+y_2^r)^{1/r}[(x_1+x_2)^r+(y_1+y_2)^r]^{\frac{r-1}{r}}$$

et, en ajoutant ces deux inégalités,

$$(x_1+x_2)^r+(y_1+y_2)^r<\frac{(x_1^r+y_1^r)^{1/r}+(x_2^r+y_2^r)^{1/r}}{[(x_1+x_2)^r+(y_1+y_2)^r]^{\frac{1-r}{r}}},$$

c'est-à-dire

$$[(x_1+x_2)^r+(y_1+y_2)^r]^{1/r}<(x_1^r+y_1^r)^{1/r}+(x_2^r+y_2^r)^{1/r}$$

En divisant les deux membres par $2^{1+1/r}$, on trouve

$$\left[\frac{\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^r+\left(\frac{y_1+y_2}{2}\right)^r}{2}\right]^{1/r}<\frac{\left(\frac{x_1^r+y_1^r}{2}\right)^{1/r}+\left(\frac{x_2^r+y_2^r}{2}\right)^{1/r}}{2}$$

qui est l'inégalité de Jensen demandée. La convexité de $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=[(x_1^r+\cdots+x_n^r)/n]^{1/r}$ se démontre d'une façon analogue.

PROBLÈME 38. L'inégalité de Minkowski n'est autre chose que l'inégalité de Jensen à k termes pour la fonction $F(x,y)=[(x^r+y^r)/2]^{1/r}$.

EXERCICE 19. En posant $a_1=v_1^{(p-1)/p},\cdots,a_k=$ $=v_k^{(p-1)/p}$, $b_1=u_1/a_1,\cdots,b_k=u_k/a_k$, $r=p/(p-1)$, $s=p$ dans l'inégalité de Hölder, on a

$$(v_1+\cdots+v_k)^{\frac{p-1}{p}}\left(\frac{u_1^p}{v_1^{p-1}}+\cdots+\frac{u_k}{v_k^{p-1}}\right)^{1/p}\geqslant(u_1+\cdots+u_k).$$

EXERCICE 21. En posant $a_1=a^{x_1},\cdots,a_k=a^{x_k}$, $b_1=$ $=a^{y_1},\cdots,b_k=a^{y_k}$ et en tenant compte de la convexité de la fonction ${}^a\log(a^x+a^y)$ (cf. Problème 35) il vient

$$\log\sqrt[k]{(a_1+b_1)\cdots(a_k+b_k)}=$$
$$=\frac{\log(a^{x_1}+a^{y_1})+\cdots+\log(a^{x_k}+a^{y_k})}{k}\geqslant$$
$$\geqslant\log\left(a^{\frac{x_1+\cdots+x_k}{k}}+a^{\frac{y_1+\cdots+y_k}{k}}\right)=\log\left(\sqrt[k]{a_1\cdots a_k}+\sqrt[k]{b_1\cdots b_k}\right).$$