

d'un icosaèdre régulier aux permutations des racines de l'équation du 5^e degré).

Dans le cas habituel où deux orientations seulement sont possibles pour chaque support donné, on voit ainsi apparaître un doublement de l'espace ponctuel qui se trouve recouvert deux fois.

On peut alors envisager une géométrie plus générale, pour laquelle il y ait dissociation des éléments géométriques, les figures orientées prenant vraiment leur individualité propre et se transformant indépendamment de la variété «opposée», le support ponctuel de la variété orientée initiale. On obtient ainsi des transformations (non ponctuelles), qui ne laissent plus invariante l'opposition de deux figures orientées: la notion d'orientation est donc beaucoup plus profonde et plus riche que la notion élémentaire de sens de parcours, puisqu'elle permet d'élargir le groupe fondamental.

Par exemple, en Géométrie plane, on peut plonger le groupe métrique dans le groupe de LAGUERRE, formé de transformations de contact qui changent un cercle en deux cercles différents selon le sens d'orientation, la notion d'éléments impropres, non susceptibles de dissociation par orientation (points) disparaissant dans la transformation. De même, en Géométrie de l'espace, on peut élargir le groupe anallagmatique en groupe LIE, par dissociation de la sphère en deux semi-sphères constituées par les génératrices de l'un et de l'autre système, à qui l'on permet de se transformer chacun pour son propre compte. On peut, de même, avec STUDY, considérer des transformations de droites orientées de l'espace pour lesquelles deux axes de même support se transforment en axes de support différent, sans que soit détruite la perpendicularité entre axes appartenant à deux couches différents; ces transformations sont précieuses dans la géométrie métrique des complexes linéaires et des toiseurs.

Remarquons l'importance primordiale que présentent les éléments *impropres* (non susceptibles de dissociation par orientation) dans la théorie des figures orientées. Par exemple, si un élément impropre est caractérisé par une relation quadratique entre coordonnées non surabondantes d'une figure orientée, les transformations projectives de ces coordonnées conservant cette relation donnent une *géométrie orientée élémentaire*, qui conserve l'opposition de deux figures de même support (Exemple: géométrie anallagmatique du plan, qui transforme entre eux les cercles de rayon nul). Par contre, si les coordonnées *surabondantes* d'une figure orientée sont liées par une relation quadratique, les transformations projectives de ces coordonnées conservant la relation, donnent naissance à une *géométrie orientée supérieure*, dont le groupe élargit le précédent, en dissociant les figures orientées de même support.

La géométrie des figures orientées est plus riche et plus précise que celle des figures ordinaires. Le dédoublement qui s'est opéré permet en effet, d'obtenir des formules analytiques valables *sans ambiguïté de signe*. D'ailleurs, la recherche des figures qui ne diffèrent d'une figure donnée que par la détermination à attribuer à un radical peut donner des résultats intéressants: prenons, par exemple, l'icosaèdre régulier convexe; toutes ses dimensions se déduisant de l'une d'elles par des formules contenant le symbole $\sqrt{5}$, caractéristique de l'inscription dans le cercle du pentagone régulier: il suffit de remplacer formellement $\sqrt{5}$ par $-\sqrt{5}$ dans toutes ces formules pour avoir les propriétés d'un icosaèdre régulier étoilé, qui se déduit du convexe comme le pentacle (pentagone étoilé) se déduit du pentagone convexe, et possède le même nombre d'éléments de nature analogue, à l'étoilement près.

Ce principe de conjugaison sert avec succès dans l'étude des polyèdres semi-réguliers et des hyperpolyèdres réguliers étoilés. (Continua)

Sobre a definição de multiplicação no grupo aditivo dos números reais ⁽¹⁾

por Luiz Neves Real

Considere-se no conjunto dos números reais, a operação de soma como base da organização desse conjunto como espaço algébrico. É sabido que assim se obtém um grupo abeliano, uma vez que se verificam os axiomas: I — Quaisquer que sejam α e β existe

a soma $\alpha + \beta$; II — A soma é associativa, $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$; III — É comutativa $\alpha + \beta = \beta + \alpha$; IV — A equação $\alpha + \xi = \beta$ é sempre resolúvel em ξ .

Se tomarmos a relação «menor do que», $\alpha < \beta$ para base da ordenação deste espaço algébrico, ele aparecer-nos-há como grupo abeliano ordenado; além dos quatro anteriores axiomas tem ainda logar a lei de monotonia V — Se $\alpha < \beta$, $\alpha + \gamma < \beta + \gamma$, qualquer que seja γ .

(1) F. Bachmann — Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, Band I., Heft 2 — 3, 23.

